

För betygen 3, 4 resp. 5 krävs 18, 25 resp. 32 poäng (inklusive eventuella bonuspoäng). Lösningarna skall vara väl motiverade. Skriv endast på ena sidan, börja ny uppgift på ny sida och använd ej rödpenna.

Tillåtna hjälpmedel: Räknedosa. Formel- och tabellsamling i matematisk statistik.

1. En slumpvariabel  $X$  har täthetsfunktion:

$$f(x) = c(c-1)x^{c-1}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

- (a) Bestäm  $c$  så att detta blir en täthetsfunktion. (1p)
  - (b) Låt  $Y = X^3/2$ , bestäm täthetsfunktionen för  $Y$ . (1p)
  - (c) Bestäm  $E(X)$ . (1p)
  - (d) Bestäm  $E(Y)$  med hjälp av svaret i (b). (1p)
  - (e) Bestäm  $E(X^3/2)$  med hjälp av täthetsfunktionen för  $X$ . (1p)
2. Jöns-Harald skall åka hiss. Han har tre stycken att välja mellan:  $H_1, H_2$  och  $H_3$ . Tiden det tar att åka hiss  $H_i$  är exponentialfördelad med parameter  $\lambda_i$ , där  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$  och  $\lambda_3 = 3$  (1/minuter).
- (a) Om Jöns-Harald väljer hiss slumpmässigt, beräkna sannolikheten att det tar minst 2 minuter för honom att åka hiss. (2p)
  - (b) Om Jöns-Harald får åka i minst 2 minuter, vad är sannolikheten att han åkte med hiss nummer 1? (2p)
3. (a) Låt  $X \sim N(7, 14)$ , beräkna 0.025-kvantilen. (2p)
- (b) Låt  $Y \sim \text{Exp}(4)$ , beräkna 0.25-kvantilen. (2p)
- (c) Låt  $Y$  vara som i uppgift (b) och låt den betingade fördelningen för  $Z$  givet  $Y = y$  vara  $\text{Exp}(y)$ . Beräkna 0.25-kvantilen för  $Z$ . (2p)
4. I föreläsningarna visade vi *Markovs olikhet*: om  $X$  är en icke-negativ slumpvariabel med väntevärde  $\mu$ , och  $a > 0$ , så är

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mu}{a}.$$

- (a) Visa, exempelvis med hjälp av Markovs olikhet, *Chebyshevs olikhet*: om  $X$  har väntevärde  $\mu$  och varians  $\sigma^2$  så är

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}.$$

(3p)

- (b) Använd Chebyshevs olikhet för att ge en övre gräns för  $P(|X - 1.16| \geq 2)$  där  $X$  har fördelning  $\Gamma(c, \lambda)$  med  $c = 2.9$  och  $\mu = 0.4$ . (2p)

5. Beräkna följande sannolikheter (approximation är tillåten men skall i så fall motiveras):

(a)  $P(1 \leq X_1 \leq 5)$  då  $X_1 \sim \text{Bin}(9, 0.85)$  (1p)

(b)  $P(1 \leq X_2 \leq 5)$  då  $X_2 \sim \text{Bin}(47, 0.03)$  (2p)

(c)  $P(X_3 \geq 18.1)$  då  $X_3 \sim \text{Po}(17.3)$  (2p)

6. Det har varit ett utsläpp av dioxiner från en fabrik. Detta misstänks ha förgiftat grönbetet för ett gäng kor och man är rädd att detta lagras i fettvävnaden hos korna. För att kontrollera långtidseffekterna tog man därför vävnadsprov från kor direkt efter att utsläppet skett och sedan en gång till ett halvår därefter. Vid första tillfället togs prover från 9 kor och vid andra tillfället från 10 kor. Data antogs komma från normalfördelningar  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  respektive  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  där  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  och blev som följer:

1:a tillfället: 3.4 1.3 3.5 2.4 2.0 2.4 1.9 1.9 2.7  
2:a tillfället: 2.6 2.9 2.4 3.2 2.2 2.3 2.4 1.3 3.5 4.1

(a) Skatta  $\mu_2 - \mu_1$  och  $\sigma^2$ . (2p)

(b) Ange ett 95% konfidensintervall för  $\mu_2 - \mu_1$ . (2p)

(c) Testa hypotesen  $H_0 : \mu_2 - \mu_1 = 0$  (mot  $H_1 : \mu_2 - \mu_1 \neq 0$ ). (1p)

7. Följande data tros uppfylla ett linjärt samband av formen  $Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ , där  $\varepsilon_i$  är oberoende  $N(0, \sigma^2)$ .

|     |       |       |       |       |       |       |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x$ | 12.3  | 14.2  | 16.0  | 16.9  | 18.3  | 19.2  | 21.0  |
| $y$ | 18.59 | 20.51 | 23.10 | 25.65 | 27.54 | 28.81 | 30.73 |

(a) Använd linjär regression för att skatta  $\alpha + (15.0)\beta$ . (2p)

(b) Uttala dig, med felrisk 5%, om hypotesen att  $\beta = 0$ . (3p)

8. Kom ihåg definitionen av ett konfidensintervall: Om  $\underline{\mu}, \bar{\mu}$  är skattningar av en parameter  $\mu$ , och  $\underline{\mu}(X), \bar{\mu}(X)$  är motsvarande estimatorer, så sägs  $(\underline{\mu}, \bar{\mu})$  vara ett konfidensintervall för  $\mu$  med konfidensgrad  $1 - \alpha$  om  $P(\underline{\mu}(X) < \mu < \bar{\mu}(X)) = 1 - \alpha$ .

(a) Härled ett konfidensintervall för väntevärdet  $\mu$  baserat på ett oberoende stickprov  $x_1, \dots, x_n$  ur  $N(\mu, 1)$ . Ange dina skattningar  $\underline{\mu}$  och  $\bar{\mu}$ . (3p)

(b) Beräkna ett konfidensintervall för  $\mu$  med konfidensgrad 99% baserat på stickprovet

3.0339 -1.0588 2.0622 1.5188 -0.1077 0.7664

ur  $N(\mu, 1)$ . (2p)