UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
J. Björnberg, E. Broman

TENTAMEN I MATEMATIK
Sannolikhet och statistik 1MS005
2012-10-19

LÖSNINGAR

1. (a) Vi har att c måste uppfylla

$$1 = \int_0^1 c(c-1)x^{c-1}dx = [(c-1)x^c]_0^1 = c-1,$$

så att $c = 2$.

(b) Vi har att

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^3 \leq 2y) = P(X \leq (2y)^{1/3}) = \int_0^{(2y)^{1/3}} 2xdx = [x^2]_0^{(2y)^{1/3}} = (2y)^{2/3},$$

vi får att

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = 2\frac{2}{3}(2y)^{-1/3} = \frac{4}{3}(2y)^{-1/3},\ 0 \leq y \leq 1/2.$$

(c) Vi har att

$$E(X) = \int_0^1 x2xdx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

(d) Vi har att

$$E(Y) = \int_0^{1/2} y\frac{4}{3}(2y)^{-1/3}dy = \frac{4}{3}(2)^{-1/3}\int_0^{1/2} y^{2/3}dy$$
$$= \frac{3*4}{5*3}(2)^{-1/3}\int_0^{1/2}\left[y^{5/3}\right]_0^{1/2} = \frac{4}{5}2^{-1/3-5/3} = \frac{1}{5}.$$

(e) Vi har att

$$E(X^3/2) = \int_0^1 (x^3/2)2xdx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}.$$

2. (a) Låt T beteckna den slumpmässiga tiden det tar och låt A_i vara händelsen att Jöns-Harald tog hiss i. Vi har att

$$P(T > 2) = P(T > 2, A_1) + P(T > 2, A_2) + P(T > 2, A_3)$$
$$= \frac{P(T > 2|A_1) + P(T > 2|A_2) + P(T > 2|A_3)}{3}.$$

Vidare gäller att

$$P(T > 2|A_i) = \int_2^\infty \lambda_i e^{-\lambda_i s}ds = \left[-e^{-\lambda_i s}\right]_2^\infty = e^{-2\lambda_i},$$

så att

$$P(T > 2) = \frac{e^{-2} + e^{-4} + e^{-6}}{3}.$$

(b) Vad som eftersöks är $P(A_1|T>2)$. Vi får att

$$P(A_1|T>2) = \frac{P(A_1 \cap T>2)}{P(T>2)} = \frac{P(T>2|A_1)P(A_1)}{P(T>2)} = \frac{e^{-2}}{e^{-2}+e^{-4}+e^{-6}}.$$

3. (a) Vi har att

$$\frac{X-7}{\sqrt{14}} \sim N(0,1),$$

så att

$$0.95 = P(Z \geq 1.96) = P\left(\frac{X-7}{\sqrt{14}} \geq 1.96\right) = P\left(X \geq 7+1.96\sqrt{14}\right).$$

Därför är den eftersökta kvantilen $7+1.96\sqrt{14}$.

(b) Vi har att

$$0.25 = P(T \geq t_{1/4}) = \int_{t_{1/4}}^{\infty} 4e^{-4t}dt = \left[-e^{-4t}\right]_{t_{1/4}}^{\infty} = e^{-4t_{1/4}},$$

så att $-\log 4 = -4t_{1/4}$ och därmed

$$t_{1/4} = \frac{\log(4)}{4}.$$

(c) Enligt uppgift har Z den betingade fördelningsfunktionen $f_{Z|Y}(z|y) = ye^{-yz}$ och därmed är den gemensamma fördelningen

$$f_{Z,Y}(z,y) = f_{Z|Y}(z|y)f_Y(y) = ye^{-yz}4e^{-4y} = 4ye^{-y(4+z)}.$$

För att få fram marginalfördelningen för Z integrerar vi

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^{\infty} f(z,y)dy = \int_0^{\infty} 4ye^{-y(4+z)}dy \\ &= \left[y\frac{-4e^{-y(4+z)}}{4+z}\right]_0^{\infty} + 4\int_0^{\infty}\frac{e^{-y(4+z)}}{4+z}dy = \left[\frac{-4e^{-y(4+z)}}{(4+z)^2}\right]_0^{\infty} = \frac{4}{(4+z)^2}, \end{aligned}$$

så att

$$0.25 = P(Z > z_{1/4}) = \int_{z_{1/4}}^{\infty}\frac{4}{(4+z)^2}dz = 4\left[\frac{-1}{4+z}\right]_{z_{1/4}}^{\infty} = \frac{4}{4+z_{1/4}}.$$

Vi löser därför ekvationen $4+z_{1/4} = 16$ och får $z_{1/4} = 12$.

4. (a)

$$P(|X-\mu| \geq a) = P((X-\mu)^2 \geq a^2) \leq \frac{E((X-\mu)^2)}{a^2} = \frac{\sigma^2}{a^2}.$$

(b) Enligt formelsamlingen har $\Gamma(c,\lambda)$ väntevärde $\mu = c/\lambda$ och varians $\sigma^2 = c/\lambda^2 = \mu^2/c = 0.055$. Med triangelolikheten blir

$$P(|X-1.16| \geq 2) \leq P(|X-\mu| + 0.76 \geq 2) = P(|X-\mu| \geq 1.24),$$

vilket enligt Chebyshev är högst $0.055/(1.24)^2 = 0.0358$.

Alternativt kan vi dela upp händelsen $|X - 1.16| \geq 2$ i fallen $X \geq 2 + 1.16$ (dvs $X - \mu \geq 2.76$) respektive $X \leq -2 + 1.16$ (dvs $X - \mu \leq -1.24$) så att

$$\begin{aligned} P(|X - 1.16| \geq 2) &= P(X - \mu \geq 2.76) + P(X - \mu \leq -1.24) \\ &\leq P(|X - \mu| \geq 2.76) + P(|X - \mu| \geq 1.24), \end{aligned}$$

vilket enligt Chebyshev ger

$$P(|X - 1.16| \geq 2) \leq \frac{\sigma^2}{2.76^2} + \frac{\sigma^2}{1.24^2} = 0.0072 + 0.0358 = 0.0431,$$

vilket också är ett godtagbart svar.

5. (a) $P(1 \leq X_1 \leq 5) = P(4 \leq Y_1 \leq 8) = P(Y_1 \leq 8) - P(Y_1 \leq 3)$ där $Y_1 = 9 - X_1 \sim$ Bin(9,0.15). Vi tittar i tabellen och får därför svaret $1 - 0.9144 = 0.0856$.

   (b) $n = 47$ och $p = 0.03$ så $np(1-p) < 5$ och vi använder därför Poissonapproximation $X_2 \approx Y_2$ där $Y_2 \sim \text{Po}(\lambda)$ med $\lambda = 47 * 0.03 \approx 1.4$. Tabellen ger $P(1 \leq X_2 \leq 5) \approx P(Y_2 \leq 5) - P(Y_2 = 0) = 0.9968 - 0.2466 = 0.7502$.

   (c) $P(X_3 \geq 18.1) = P(X_3 \geq 19)$ eftersom X_3 är diskret. Då $\lambda = 17.3 > 15$ använder vi normalapproximationen $X_3 \approx Y_3 \sim N(17.3, 17.3)$. Vi har

$$P(X_3 \geq 19) \approx P\Big(\frac{Y_3 - 17.3}{\sqrt{17.3}} \geq \frac{19 - 17.3}{\sqrt{17.3}}\Big) = 1 - \Phi(0.4087) = 1 - 0.6591 = 0.3409.$$

6. (a) Vi skattar $\mu_2 - \mu_1$ med $\theta^*(x, y) = \bar{y} - \bar{x} \approx 0.3011$ och σ^2 med

$$s_p^2(x, y) = \frac{9 - 1}{9 + 10 - 2} s_x^2 + \frac{10 - 1}{9 + 10 - 2} s_y^2.$$

   Vi får

$$s_x^2 = \frac{1}{9 - 1} \sum_{i=1}^{9} (x_i - \bar{x})^2 \approx 0.5211, \quad s_y^2 = \frac{1}{10 - 1} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 \approx 0.6054$$

   så att $s_p^2 \approx 0.5658$.

   (b) Använd $\theta^*(X, Y) = \bar{Y} - \bar{Y} \sim N(\mu_2 - \mu_1, \frac{\sigma_1^2}{9} + \frac{\sigma_2^2}{10})$ och bilda referensvariabeln

$$R = \frac{\theta^*(X, Y) - (\mu_2 - \mu_1)}{s_p(X, Y)\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{10}}} \sim t(9 + 10 - 2),$$

   Därför får vi

$$\begin{aligned} 0.95 &= P(-2.1098 < R < 2.1098) \\ &= P\left(-2.1098 s_p(X, Y)\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{10}} < \theta^*(X, Y) - (\mu_2 - \mu_1) < 2.1098 s_p(X, Y)\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{10}}\right), \end{aligned}$$

   så att

$$I_{\mu_2 - \mu_1} = \bar{Y} - \bar{X} \pm 2.1098 s_p(X, Y)\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{10}},$$

   och därmed blir det numeriska 95% konfidensintervallet

$$I_{\mu_2 - \mu_1} = 0.3011 \pm 2.1098\sqrt{0.5658}\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{10}} = [-0.423, 1.030].$$

(c) Då $0 \in I_{\mu_2-\mu_1}$ så kan vi ej förkasta H_0 med felrisk 5%.

7. (a) Vi får: $\overline{x} = 16.8429$, $\overline{y} = 24.9941$, $S_{xy} = 79.1517$, $S_{xx} = 53.2971$ och $S_{yy} = 119.1516$. Så $\beta^* = S_{xy}/S_{xx} = 1.4851$ och $\alpha^* = \overline{y} - \beta^*\overline{x} = -0.0193$. Vi skattar $\alpha + (15.0)\beta$ med $\alpha^* + (15.0)\beta^* = 22.2572$.

   (b) Vi får $s_r = 0.5662$ och $t_{0.025}(5) = 2.5706$, och därmed

$$I_\beta = (\beta^* \pm t_{0.025}(5)s_r/\sqrt{S_{xx}}) = (1.4851 \pm 0.1994) = (1.2857, 1.6845).$$

   Eftersom $0 \notin I_\beta$ förkastar vi hypotesen.

8. (a) Skriv $\overline{X} = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ där X_i är oberoende $N(\mu, 1)$. Referensvariabeln $R = (\overline{X} - \mu)/(1/\sqrt{n})$ är standard normal, så

$$1 - \alpha = P(-\lambda_{\alpha/2} < R < \lambda_{\alpha/2}) = P(\overline{X} - \lambda_{\alpha/2}/\sqrt{n} < \mu < \overline{X} + \lambda_{\alpha/2}/\sqrt{n})$$

   Alltså ges ett $(1-\alpha)$-KI av $I_\mu = (\overline{x} \pm \lambda_{\alpha/2}/\sqrt{n})$. Vi använde $\underline{\mu} = \overline{x} - \lambda_{\alpha/2}/\sqrt{n}$ och $\overline{\mu} = \overline{x} + \lambda_{\alpha/2}/\sqrt{n}$.

   (b) Vi får $\overline{x} = 1.0358$, och eftersom $\lambda_{0.005} = 2.5758$ och $n = 6$ har vi $I_\mu = (1.0358 \pm 2.5758/\sqrt{6}) = (-0.0158, 2.0874)$.