

Linjär algebra och geometri I för

IT1, STS1 och KandDv1

Kurslitteratur

H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Algebra (Application version)*, 9:e upplagan, Wiley, 2005. Kapitel 1–4.

Kurshemsida: <http://www.math.uu.se/staff/pages/?uname=ostensson>

Här finner du aktuell information om kursen, exempelvis utdelade papper i pdf-format.

Undervisning

Undervisning sker i form av föreläsningar (20 st.) och lektioner (10 st.). Cirka 5 av föreläsningarna kommer att ägnas åt räkneövningar med genomgång av problem och uppgifter.

Preliminär tidsplan

Föreläsning	Avsnitt	
1	1.1–1.2	Linjära ekvationssystem, Gausselimination
2	1.1–1.2	Mer om linjära ekvationssystem
3	1.3	Matriser, matrISRäkning
4	1.4–1.5	Matrisinvers
5	1.1–1.5	Räkneövning
6	1.6–1.7	Speciella typer av matriser och deras egenskaper
7	2.1–2.2	Determinanter
8	2.3–2.4	Determinantregler
9	1.6–2.4	Räkneövning
10	3.1–3.2	Vektorer
11	3.3	Skalärprodukt
12	3.4	Vektorprodukt
13	3.5	Linjer och plan i rymden
14	3.1–3.5	Räkneövning
15	4.1	Det euklidiska rummet $\mathbb{R}^n$
16		Linjärt oberoende av vektorer, baser, koordinater
17	4.2	Linjära avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$
18	4.3–4.4	Egenskaper hos linjära avbildningar, polynom
19	4.1–4.4	Räkneövning
20		Repetition

Inlämningsuppgifter

Under kursens gång kommer två uppsättningar av inlämningsuppgifter att delas ut. Lösningarna skall vara prydligt skrivna för hand. Om 40% resp. 60% av inlämningsuppgifterna är korrekt lösta får man 1 resp. 2 bonuspoäng. Dessa kommer att adderas till skrivningspoängen vid ordinarie tentamen den 19/12.

Examination

På måndagen den 24/11 kommer en dugga att äga rum. Duggan är 2 timmar lång och kommer att bestå av fyra uppgifter om vardera 5 poäng. Uppgifterna rättas och poängsätts. För att klara duggan krävs det 12 av 20 möjliga poäng.

Sluttentamen består av 8 uppgifter om vardera 5 poäng. En student som har klarat duggan får den första uppgiften på tentan godkänd med 5 poäng och behöver inte lösa denna uppgift på tentan.

På tentan krävs 18 poäng för betyget 3, 25 poäng för betyget 4, 32 poäng för betyget 5.

Den skriftliga sluttentamen äger rum fredagen den 19/12.

Resultatet från duggan samt bonuspoängen från inlämningsuppgifterna tillgodoräknas enbart vid detta tentamenstillfälle.

Mål

För godkänt betyg på kursen skall studenten

- kunna lösa linjära ekvationssystem med Gausselimination och kunna redogöra för hur lösningen beror av koefficient- och totalmatrisernas ranger;
- kunna räkna med matriser, beräkna matrisinverser och determinanter;
- kunna redogöra för vektorbegreppet, känna till och kunna använda räknelagarna för vektorer, kunna avgöra om vektorer är linjärt oberoende, känna till begreppen bas och koordinat;
- kunna redogöra för begreppen skalärprodukt och vektorprodukt, samt kunna beräkna sådana produkter och tolka dem geometriskt;
- känna till linjens och planets ekvationer samt kunna använda dessa för att beräkna skärningar och avstånd;
- veta vad som menas med rotationer, speglingar och ortogonala projektioner i planet och i rummet, samt kunna beräkna matriserna för sådana avbildningar;
- kunna tolka en $m \times n$ -matris som en linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$;
- kunna formulera viktigare resultat och satser inom kursens område;
- kunna använda kursens teori, metoder och tekniker för att lösa matematiska problem.

Tips

- Bearbeta varje föreläsning, helst samma dag men senast till nästa föreläsning, genom att läsa föreläsningssanteckningar samt motsvarande avsnitt i kursboken. Anteckna det som är oklart. Fråga vid nästa undervisningstillfälle.
- Diskutera uppgifter och teori med dina kurskamrater. Om något är oklart under en föreläsning eller en lektion, fråga direkt.
- Inför lektionerna, förbered dig genom att räkna så många som du hinner av de uppgifter som finns föreslagna på lektionsplaneringen nedan. På själva lektionen kan du då be om hjälp med sådana uppgifter som du har fastnat på.
- Ta vara på den s.k. Mattesupporten. Den är schemalagd i sal P2144 måndagar - torsdagar kl. 17.00 - 19.00, till och med den 11/12. Där finns amanuenser att fråga om du behöver hjälp.

Uppsala, den 24 oktober 2008.

Jörgen Östensson

Lektion 1

Till lektion 1 rekommenderas följande uppgifter:

Avsnitt 1.1, s. 6-8:

Uppgifterna 1, 2, 3(b),(c), 4(c), 5(c), 6-9, 12-14.

Avsnitt 1.2, s. 19-23:

Uppgifterna 3, 4(c),(d), 5(c),(d), 8, 9, 12, 13(a),(b), 16-19, 22, 26, 31.

Ytterligare ett par uppgifter:

1. Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} -ax + y + 2z = 3 \\ 2x + (a+2)y + z = 2 \\ (1-a)x + y + z = 2 \end{cases}$$

för alla värden på konstanten a .

2. Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x + 2y + bz = 1 \\ bx + y + z = 1+b \\ bx + 2by + b^2z = 1+b-b^2 \\ 2bx + (1+2b)y + 2z = b \end{cases}$$

för alla värden på konstanten b .

Facit:

- $a \neq \pm 1$: $(x, y, z) = (\frac{1}{1-a}, -\frac{1}{1-a}, \frac{2-a}{1-a})$,
 $a = -1$: $(x, y, z) = (t, 1-3t, 1+t)$, $t \in \mathbb{R}$,
 $a = 1$: inga lösningar.
- $b \neq -1$: inga lösningar,
 $b = -1$: $(x, y, z) = (\frac{1}{3} + t, \frac{1}{3}, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Lektion 2

Till lektion 2 rekommenderas följande uppgifter:

Avsnitt 1.3, s. 34-38:

Uppgifterna 1, 4(e),(f), 5(a),(b),(d),(e),(i), 8, 9, 10, 13, 14, 18, 21, 27, 31.

Avsnitt 1.4, s. 48-51:

Uppgifterna 4(c), 7(d), 9(c), 11, 14, 17, 21.

Lektion 3

Till lektion 3 rekommenderas följande uppgifter:

Avsnitt 1.5, s. 57-60:

Uppgifterna 1, 2, 3, 7(b),(d), 8(e), 10, 13, 14.

Avsnitt 1.6, s. 66-68:

Uppgifterna 8, 11, 15, 17, 21, 25.

Avsnitt 1.7, s. 73-76:

Uppgifterna 11, 18, 22.

Lektion 4

Till lektion 4 rekommenderas följande uppgifter:

Avsnitt 2.1, s. 94-96:

Uppgifterna 3(a),(b), 4, 9, 12, 18, 22, 31.

Avsnitt 2.2, s. 101-103:

Uppgifterna 2, 3, 9, 12, 13, 14.

Lektion 5

Till lektion 5 rekommenderas följande uppgifter:

Avsnitt 2.3, s. 109-111:

Uppgifterna 3, 4(a),(b), 7, 8, 10, 16.

Avsnitt 2.4, s. 117-118:

Uppgifterna 6-9, 13.

Avsnitt 3.1, s. 130-131:

Uppgifterna 1(a)-(e), 2(d),(g)-(i), 3(e), 6(a),(b), 7, 8, 9, 11, 13.

Avsnitt 3.2, s. 134-135:

Uppgifterna 1(b),(e), 2(c), 4, 7, 9, 10.

Ytterligare några uppgifter:

1. Beräkna följande determinant D av ordning $n \geq 2$:

$$D = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ b & b & b & \dots & b & x \end{vmatrix}.$$

Lös även ekvationen $D = 0$ i de fall då $a \geq 0$, $b \geq 0$.

2. Beräkna följande determinant D av ordning $n + 1$:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

- 3.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

är en determinant av ordning n . Visa att det finns ett enkelt samband mellan D_n , D_{n-1} och D_{n-2} och använd detta för att beräkna D_n .

Facit:

1. $D = x^{n-2}(x^2 - ab)$, $D = 0$ har rötterna $\pm\sqrt{ab}$ och 0 (om $n \geq 3$).
2. $D_{n+1} = (1 - a)^n$.
3. Sambandet $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$. Determinanten $D_n = n + 1$.

Lektion 6

Till lektion 6 rekommenderas följande uppgifter:

Avsnitt 3.3, s. 142-144:

Uppgifterna 1-6, 8, 10-21, 24-26.

Lektion 7

Till lektion 7 rekommenderas följande uppgifter:

Avsnitt 3.4, s. 153-155:

Uppgifterna 1(a)-(c), 2(b), 3(a), 4(a), 10(a), 11(a),(b), 13, 15-18, 19(a).

Avsnitt 3.5, s. 162-165:

Uppgifterna 2(a), 4(a), 5(a),(c), 6(a)-11(a), 19(b), 22, 24, 32, 35, 39(a), 41(c).

Lektion 8

Till lektion 8 rekommenderas följande uppgifter:

Avsnitt 4.1, s. 178-180:

Uppgifterna 3, 4, 6(a)-(c), 10, 14(e),(f), 15, 16, 17(d), 19-23, 26.

Från "Blandade övningar i Linjär Algebra", s. 8-9 i detta häfte:

Uppgifterna 1, 3, 5, 8.

Lektion 9

Till lektion 9 rekommenderas följande uppgifter:

Avsnitt 4.2, s. 193-197:

Uppgifterna 1(b)-(d), 5, 6, 12(a),(b), 13(b), 16, 18, 20.

Avsnitt 4.3, s. 206-209:

Uppgifterna 1, 2, 4, 5(a),(b), 6(a),(b), 7, 8, 13, 14(b),(c), 15, 16, 18, 20, 22, 23.

Lektion 10

Till lektion 10 rekommenderas följande uppgifter:

Avsnitt 4.4, s. 217-219:

Uppgifterna 1-5, 8, 9,

samt uppgifter som du inte hann med tidigare.

Blandade övningar i Linjär Algebra: linjärt oberoende, linjärt hölje, bas.

1. Låt $\vec{u}_1 = (1, -1, 0, 2)$, $\vec{u}_2 = (2, 1, -3, 1)$, $\vec{u}_3 = (-1, -2, 3, 1)$, $\vec{u}_4 = (-1, 0, 2, 1)$ vara vektorer i $\mathbb{R}^4$.

(a) Avgör om vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ är linjärt beroende eller oberoende.

(b) Avgör om vektorerna $\vec{v} = (1, 3, -1, 4)$ och $\vec{w} = (2, -1, 1, 2)$ tillhör det linjära höljet $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$. Om vektorn $\vec{v}$ resp. $\vec{w}$ tillhör det linjära höljet, framställ den som en linjärkombination av vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$.

2. För vilka värden av konstanten $a \in \mathbb{R}$ tillhör vektorn $\vec{v} = (1, a, 4, 1 - a)$ det linjära höljet av vektorerna $\vec{u}_1 = (1, -1, 1, -1)$, $\vec{u}_2 = (2, 1, -2, 1)$ och $\vec{u}_3 = (-1, 3, 1, 1)$ i $\mathbb{R}^4$?

3. Avgör om vektorerna $\vec{u}_1 = (1, 0, 2)$, $\vec{u}_2 = (1, -1, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, -2, 0)$ i $\mathbb{R}^3$ är linjärt beroende eller oberoende. I fall de är linjärt beroende, finn bland $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ en uppsättning vektorer som är linjärt oberoende och som spänner samma linjära hölje som $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.

4. Visa att vektorerna $\vec{v}_1 = (1, 0, 2, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, -1, 1, 2)$, $\vec{v}_3 = (1, -2, 0, 3)$, $\vec{v}_4 = (2, 1, 1, 3)$ är linjärt beroende. Uttryck en av dem som en linjär kombination av de övriga. Finn bland dem en uppsättning av linjärt oberoende vektorer som har samma linjära hölje som vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$.

5. Låt $\vec{u}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{u}_2 = (-1, 0, 1)$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^3$. Finn en ekvation som komponenterna x_1, x_2, x_3 måste uppfylla för att vektorn $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ skall tillhöra det linjära höljet $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$. Tolka resultatet geometriskt. För vektorer $\vec{v}$ som uppfyller ekvationen finn en framställning av $\vec{v}$ som en linjärkombination av $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$.

6. (a) Avgör om vektorerna $\vec{v}_1 = (1, 2)$, $\vec{v}_2 = (2, -1)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^2$. Om så är fallet finn koordinaterna i denna bas $\underline{v}$ för vektorn $\vec{F} = (1, 1)$ och för vektorn $\vec{w} = (x_1, x_2)$.

(b) Använd resultaten i del (a) för att dela upp kraftvektorn $\vec{F} = (1, 1)$ i $\mathbb{R}^2$ i komponenter parallella med vektorerna $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ (d.v.s. finn $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ sådana att $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ med $\vec{F}_1 \parallel \vec{v}_1$ och $\vec{F}_2 \parallel \vec{v}_2$).

7. (a) Avgör om vektorerna $\vec{u}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{u}_2 = (2, 0, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, -1, 2)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^3$. Om så är fallet finn koordinaterna i denna bas $\underline{u}$ för vektorn $\vec{F} = (1, 1, 1)$ och för vektorn $\vec{w} = (x_1, x_2, x_3)$.

(b) Vektorerna $\vec{u}_2 = (2, 0, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, -1, 2)$ spänner upp ett plan π genom origo i $\mathbb{R}^3$. Använd resultaten i del (a) av uppgiften för att framställa kraftvektorn $\vec{F} = (1, 1, 1)$ som summa av två komponenter $\vec{F}_1$ och $\vec{F}_2$, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, där komponenten $\vec{F}_1$ är parallell med vektorn $\vec{u}_1 = (1, -1, 1)$ och komponenten $\vec{F}_2$ är parallell med planet π .

8. Avgör om vektorerna $\vec{u}_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, -1, 0)$, $\vec{u}_3 = (1, -1, 1, 1)$, $\vec{u}_4 = (2, -1, 3, 3)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^4$. Om så är fallet finn koordinaterna i denna bas $\underline{u}$ för vektorn $\vec{F} = (1, 1, 2, 1)$ och för vektorn $\vec{w} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Facit:

1. (a) Vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ är linjärt beroende.
(b) $\vec{v} \in \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$, $\vec{v} = (-\frac{2}{3})\vec{u}_1 + \frac{7}{3}\vec{u}_2 + 0 \cdot \vec{u}_3 + 3\vec{u}_4$ (t.ex.),
 $\vec{w} \notin \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$.
2. $a = 2$.
3. Vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ är linjärt beroende. Vidare är t.ex. $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ och $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ är linjärt oberoende.
4. T.ex. $\vec{v}_3 = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$. Det gäller att $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4) = \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$.
5. Ekvationen är $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Geometrisk tolkning: vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ spänner upp ett plan π genom origo i $\mathbb{R}^3$. Planet π har ekvationen $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Vektorn $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$ tillhör det linjära höljet $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ om $\vec{v}$ ligger i (= är parallell med) detta plan. Om $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$ med $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ blir $\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$ med $c_1 = \frac{1}{2}x_2$, $c_2 = -x_1 + \frac{1}{2}x_2$.
6. (a) Ja, $\underline{\mathbf{v}} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^2$.
 $\vec{F} = (\frac{3}{5}, \frac{1}{5})_{\underline{\mathbf{v}}}$.
 $\vec{w} = (x_1, x_2) = (\frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2, \frac{2}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2)_{\underline{\mathbf{v}}}$.
(b) $\vec{F}_1 = \frac{3}{5}\vec{v}_1 = \frac{3}{5}(1, 2)$ och $\vec{F}_2 = \frac{1}{5}\vec{v}_2 = \frac{1}{5}(2, -1)$.
7. (a) Ja, $\underline{\mathbf{u}} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^3$.
 $\vec{F} = (-2, 1, 1)_{\underline{\mathbf{u}}}$.
 $\vec{w} = (\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - x_3, \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3)_{\underline{\mathbf{u}}}$.
(b) $\vec{F}_1 = -2\vec{u}_1 = (-2, 2, -2)$ och $\vec{F}_2 = \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = (3, -1, 3)$.
8. Ja, $\underline{\mathbf{u}} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^4$,
 $\vec{F} = (5, -1, -1, -1)_{\underline{\mathbf{u}}}$,
 $\vec{w} = (2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4, -x_3 + x_4, x_1 - x_2 - x_4, -x_1 - x_3 + 2x_4)_{\underline{\mathbf{u}}}$.