VEKTORRUMMET $\mathbb{R}^n$

RYSZARD RUBINSZTEIN

2008-10-08

1. Introduktion

Låt n vara ett heltal. Med $\mathbb{R}^n$ kommer vi att beteckna mängden vars element är alla n-tipplar av reella tal $(a_1,\, a_2, ..., \, a_n)$,

$$\mathbb{R}^n = \{\, (a_1,\, a_2, ..., \, a_n) \,\big|\, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R} \,\} \,.$$

Sådana n-tipplar $\vec{a} = (a_1,\, a_2, ..., \, a_n) \in \mathbb{R}^n$ kommer vi att kalla för **vektorer** i $\mathbb{R}^n$. Om $\vec{a} = (a_1,\, a_2, ..., \, a_n)$ och $\vec{b} = (b_1,\, b_2, ..., \, b_n)$ är vektorer ur $\mathbb{R}^n$ och λ är ett reellt tal definieras vektorernas summa $\vec{a} + \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ genom komponentvis addition

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1,\, a_2 + b_2, ..., \, a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n \,. \tag{1.1}$$

Produkten $\lambda\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ definieras genom komponentvis multiplikation

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1,\, \lambda a_2, ..., \, \lambda a_n) \in \mathbb{R}^n \,. \tag{1.2}$$

Vektorn $(0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ betecknas med $\vec{0}$ och kallas for **nollvektorn** i $\mathbb{R}^n$. Given en vektor $\vec{u} = (u_1,\, u_2, ..., \, u_n) \in \mathbb{R}^n$ betecknar vi med $-\vec{u}$ vektorn $-\vec{u} = (-u_1,\, -u_2, ..., \, -u_n) = (-1)\vec{u}$. Addition av vektorer och multiplikation av vektorer med reella tal uppfyller följande

Sats 1.1. Egenskaper av vektorer i $\mathbb{R}^n$

Om $\vec{u} = (u_1,\, u_2, ..., \, u_n)$, $\vec{v} = (v_1,\, v_2, ..., \, v_n)$ och $\vec{w} = (w_1,\, w_2, ..., \, w_n)$ är vektorer i $\mathbb{R}^n$ och λ och μ är reella tal, gäller följande:

(1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,	(5) $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$
(2) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$,	(6) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$,
(3) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$,	(7) $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$,
(4) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$,	(8) $1\vec{u} = \vec{u}$.

Bevis. Egenskaperna (1)-(8) följer direkt från definitionerna (1.1) och (1.2) och lämnas åt läsaren att kontrollera. □

Observera att om man har valt ett koordinatsystem i rummet representeras varje rymdvektor med sina tre koordinater $(a_1,\, a_2,\, a_3)$. På så sätt identifieras varje rymdvektor med ett element ur $\mathbb{R}^3$ och mängden av alla rymdvektorer med hela $\mathbb{R}^3$. Additionen av rymdvektorer och deras produkter med reella tal motsvarar då operationerna (1.1) respektive (1.2). På samma sätt tillåter oss ett val av ett koordinatsystem i planet att identifiera mängden av alla vektorer i planet med $\mathbb{R}^2$. [1]

[1]Författaren tackar Jörgen Östensson för språklig hjälp vid förberedelsen av detta manuskript.

2. Linjärt beroende och oberoende

Låt $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$ och låt $c_1, c_2, ..., c_k$ vara reella tal. En vektor i $\mathbb{R}^n$ på formen

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + ... + c_k\vec{u}_k \tag{2.1}$$

kallas **en linjärkombination** av vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$.

Definition 2.1. *En uppsättning av vektorer* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$ *i* $\mathbb{R}^n$ *kallas* **linjärt oberoende** *om*

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + ... + c_k\vec{u}_k = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = c_2 = ... = c_k = 0\,.$$

I motsatt fall kallas vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$ **linjärt beroende**.

Det finns en enkel metod för att avgöra om en godtycklig uppsättning av vektorer i $\mathbb{R}^n$ är linjärt beroende eller oberoende. Denna metod demonstreras i exempelet nedan.

Exempel 2.1: Avgör om $\vec{u}_1 = (1, 1, -1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 2, -1, 3)$, $\vec{u}_3 = (2, -1, 1, 1)$ är linjärt beroende eller linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^4$.

Lösning: För reella tal $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ är villkoret

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3 = \vec{0} \tag{2.2}$$

detsamma som

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Detta innebär att talen c_1, c_2, c_3 uppfyller likheten (2.2) om och endast om (c_1, c_2, c_3) är en lösning till det homogena linjära ekvationssystemet med totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right). \tag{2.4}$$

(Observera att koefficientmatrisens kolonner är lika med vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$. Detta är en omedelbar följd av (2.3).)

Vi löser ekvationssystemet (2.4) med Gausselimination:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\boxed{2}-\boxed{1} \\ \boxed{3}+\boxed{1} \\ \boxed{4}-\boxed{1}}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\boxed{1}-\boxed{2} \\ \boxed{4}-2\boxed{2} \\ \frac{1}{3}\boxed{3}}}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \xmapsto{\begin{array}{c} \boxed{1} - 5\boxed{3} \\ \boxed{2} + 3\boxed{3} \\ \boxed{4} - 5\boxed{3} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Den sista matrisen visar att ekvationssystemet (2.4) har enbart den triviala lösningen $(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$. Enligt (2.2) betyder det att den linjära kombinationen $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3$ är lika med nollvektorn $\vec{0}$ enbart då $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$. Enligt Definitionen 2.1 innebär det att vektorerna $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ är **linjärt oberoende**. $\square$

Den metod som vi använde i Exempel 2.1 kan tillämpas i varje $\mathbb{R}^n$ och för en godtycklig uppsättning av vektorer $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$.

Anmärkning 2.2. *Vektorerna $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$ är linjärt* **beroende** *om och endast om någon av dessa vektorer kan uttryckas som en linjärkombination av de övriga.*

Bevis. ($\Rightarrow$) Om vektorerna $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$ är linjärt beroende finns det koefficienter $c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}$, ej alla lika med noll, sådana att

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + ... + c_k\vec{u}_k = \vec{0}.$$

Om t.ex. $c_1 \neq 0$ kan vi skriva om det till $-c_1\vec{u}_1 = c_2\vec{u}_2 + ... + c_k\vec{u}_k$. Det följer att

$$\vec{u}_1 = (-\frac{c_2}{c_1})\vec{u}_2 + (-\frac{c_3}{c_1})\vec{u}_3 + ... + (-\frac{c_k}{c_1})\vec{u}_k,$$

vilket visar att $\vec{u}_1$ är en linjärkombination av de övriga vektorerna $\vec{u}_2, \vec{u}_3, ..., \vec{u}_k$.

($\Leftarrow$) Antag nu att någon av vektorerna $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k$, t.ex. $\vec{u}_1$ är en linjärkombination av de övriga,

$$\vec{u}_1 = b_2\vec{u}_2 + ... + b_k\vec{u}_k, \qquad b_2, ..., b_k \in \mathbb{R}.$$

Detta kan skrivas om som $(-1)\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + ... + b_k\vec{u}_k = \vec{0}$, vilket visar att det finns en linjärkombination av vektorerna $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k$, som ger nollvektorn $\vec{0}$ fast inte alla koefficienterna är lika med noll. Det innebär, enligt Definition 2.1, att vektorerna $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k$, är linjärt beroende. $\square$

Exempel 2.2: Geometrisk tolkning. Låt oss analysera den **geometriska** innebörden av de nya begreppen "linjärt beroende" och "linjärt oberoende" av vektorer i rummet $\mathbb{R}^3$.

(i) Låt $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^3$.

Enligt Anmärkning 2.2 är vektorerna $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ linjärt beroende om och endast om en av dem är en linjärkombination av den andra, t.ex. $\vec{u}_2 = c_1\vec{u}_1$ (eller tvärt om). Detta innebär att vektorerna $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ är parallella. (Se Figur 2.1.)

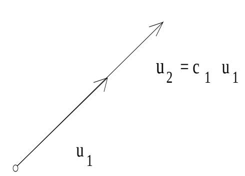

Fig. 2.1

Slutsats: två vektorer $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ är **linjärt beroende** om och endast om de är **parallella**.

Det följer att

(ii) två **icke-parallella** vektorer $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ är **linjärt oberoende** (Figur 2.2)

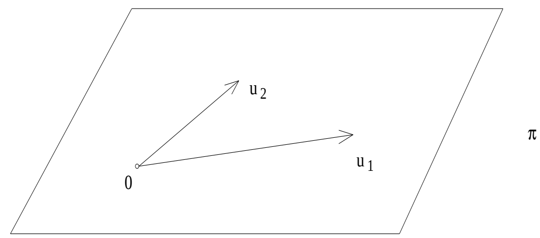

Fig. 2.2

(iii) Låt $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ och $\vec{u}_3$ vara tre vektorer i $\mathbb{R}^3$.

Enligt Anmärkning 2.2 är vektorerna $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ linjärt beroende om och endast om en av dem är en linjärkombination av dem övriga, t.ex. $\vec{u}_3 = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$. Det betyder att $\vec{u}_3$ ligger i det plan som spänns upp av vektorerna $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$ och att alla tre vektorerna ligger i detta plan. (Figur 2.3)

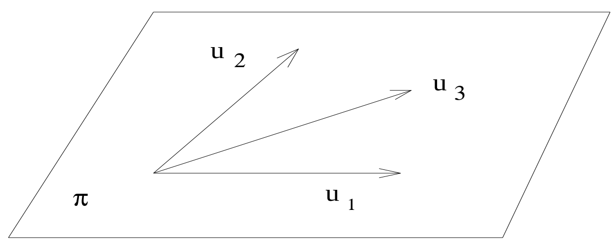

Fig. 2.3

Slutsats: tre vektorer $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ är **linjärt beroende** om och endast om **de ligger i ett och samma plan**.

Det följer att

(iv) tre vektorer $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ som **inte ligger i ett och samma plan** är linjärt **oberoende**. (Figur 2.4)

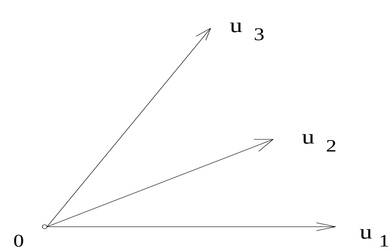

Fig. 2.4

(v) Varje uppsättning av **fyra eller fler** vektorer i $\mathbb{R}^3$ är **linjärt beroende**. Detta är ett speciellt fall av ett mer generellt resultat, se Sats 2.3 nedan.

Därvid avslutar vi diskutionen av den geometriska tolkningen av begreppen "linjärt beroende och oberoende" av vektorer i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$.

Sats 2.3. *Om* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$ *är vektorer ur* $\mathbb{R}^n$ *och* $k > n$, *så är vektorerna* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$ **linjärt beroende**.

Bevis. Vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$ är linjärt beroende omm det finns reella tal $c_1, c_2, ...$ $..., c_k \in \mathbb{R}$, **ej** alla lika med noll, sådana att $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + ... + c_k\vec{u}_k = \vec{0}$. Detta är ekvivalent med likheten

$$c_1 \begin{pmatrix} | \\ \vec{u}_1 \\ | \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} | \\ \vec{u}_2 \\ | \end{pmatrix} + \ldots + c_k \begin{pmatrix} | \\ \vec{u}_k \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ \vec{0} \\ | \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Vi betraktar nu (2.5) som ett **homogent** linjärt ekvationssystem i k obekanta $c_1, c_2, ..., c_k$ och med n ekvationer. Notera att eftersom enligt antagandet $k > n$, **är antalet obekanta** k **större än antalet ekvationer** n. Enligt en tidigare bevisad sats följer det att det homogena ekvationssystemet (2.5) har någon **icke-trivial** lösning $(c_1, c_2, ..., c_k) \neq (0, 0, ..., 0)$. Enligt Definition 2.1 betyder det att vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$ är **linjärt beroende**. $\square$

3. Det linjära höljet

Låt $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$.

Definition 3.1. *Det linjära höljet* $span\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *är mängden av dessa vektorer i* $\mathbb{R}^n$ *som kan framställas som linjära kombinationer av vektorerna* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$,

$$span\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k\} = \{c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + ... + c_k\vec{u}_k \,\big|\, c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Exempel 3.1: Avgör om vektorn $\vec{v} = (2, 8, -5, 9)$ tillhör det linjära höljet av vektorerna $\vec{u}_1 = (1, 1, -1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 2, -1, 3)$ och $\vec{u}_3 = (2, -1, 1, 1)$ i $\mathbb{R}^4$.

Lösning. Enligt Definitionen 3.1 tillhör vektorn $\vec{v} = (2, 8, -5, 9)$ det linjära höljet span$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ om och endast om $\vec{v} = (2, 8, -5, 9)$ är en linjär kombination av vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ dvs. om det finns reella tal $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ sådana att

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3 = \vec{v}. \tag{3.1}$$

Detta är ekvivalent med kravet att det linjära ekvationssystemet i obekanta c_1, c_2 och c_3,

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

har någon lösning.

Vi löser ekvationssystemet (3.2) med Gausselimination.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 8 \\ -1 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 9 \end{array}\right) \xmapsto{\substack{\boxed{2}-\boxed{1} \\ \boxed{3}+\boxed{1} \\ \boxed{4}-\boxed{1}}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right) \xmapsto{\substack{\boxed{1}-\boxed{2} \\ \boxed{4}-2\boxed{2} \\ \frac{1}{3}\boxed{3}}}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right) \xmapsto{\substack{\boxed{1}-5\boxed{3} \\ \boxed{2}+3\boxed{3} \\ \boxed{4}-5\boxed{3}}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Det följer att ekvationssystemet (3.2) har en unik lösning $(c_1, c_2, c_3) = (1, 3, -1)$.

(Kontroll: $1\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + (-1)\vec{u}_3 = 1 \cdot (1, 1, -1, 1) + 3 \cdot (1, 2, -1, 3) - (2, -1, 1, 1) = (2, 8, -5, 9) = \vec{v}$. Det stämmer!)

Eftersom $\vec{v} = 1\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + (-1)\vec{u}_3$ får vi att $\vec{v}$ är en linjärkombination av vektorerna $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$ och därmed att $\vec{v}$ tillhör det linjära höljet av $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$,

$$\vec{v} \in \operatorname{span}\{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3\}.$$

(Vi rekommenderar att läsaren, med hjälp av samma metod, visar att vektorn $\vec{w} = (2, 8, -5, 10)$ **inte** tillhör $\operatorname{span}\{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3\}$.) $\square$

Exempel 3.2: Geometrisk tolkning. Vi skall nu geometriskt beskriva linjära höljet av olika uppsättningar av vektorer i $\mathbb{R}^3$.

(i) Om $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$ är en vektor i $\mathbb{R}^3$ består $\operatorname{span}\{\vec{u}_1\}$ av alla vektorer på formen $c_1\vec{u}_1$, där $c_1 \in \mathbb{R}$ är ett godtyckligt reellt tal. Låt l vara den räta linje genom origo som har $\vec{u}_1$ som riktningsvektor. Det linjära höljet $\operatorname{span}\{\vec{u}_1\}$ består av alla vektorer parallella med linjen l. (Figur 3.1)

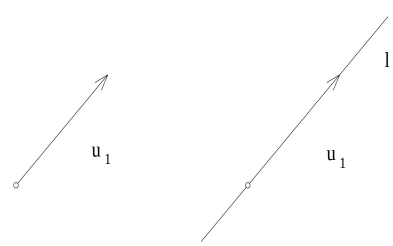

Fig. 3.1

(ii) Om $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2$ är två **parallella** vektorer i $\mathbb{R}^3$ har vi $\vec{u}_2 = b\vec{u}_1$ för något $b \in \mathbb{R}$ (eller tvärt om). Varje element $\vec{v}$ ur $\operatorname{span}\{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2\}$ är på formen $\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 = c_1\vec{u}_1 + c_2(b\vec{u}_1) = (c_1 + c_2 b)\vec{u}_1$ med $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Detta visar att alla element ur $\operatorname{span}\{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2\}$ är parallella med den linje l som spänns upp av $\vec{u}_1$ (förutsätt att $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$.) (Figur 3.2)

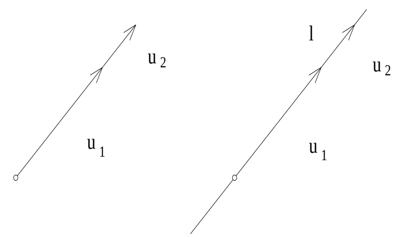

Fig. 3.2

(iii) Låt $\vec{u}_1,\, \vec{u}_2$ vara två **icke-parallella** vektorer i $\mathbb{R}^3$. Alla element $\vec{v}$ ur $\text{span}\{\vec{u}_1,\, \vec{u}_2\}$ är på formen $\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$ med $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Vektorerna $\vec{u}_1,\, \vec{u}_2$ spänner upp ett plan π genom origo i $\mathbb{R}^3$ och, som vi vet från kursens geometriavsnitt, utgör de en bas i detta plan. Varje vektor parallell med π kan skrivas på formen $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$ med $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ och varje vektor skriven på denna form är parallell med π. Det följer att $\text{span}\{\vec{u}_1,\, \vec{u}_2\}$ består av alla vektorer i $\mathbb{R}^3$ parallella med planet π.

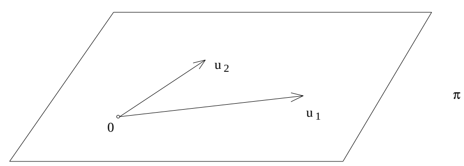

Fig. 3.3

(iv) Låt $\vec{u}_1,\, \vec{u}_2,\, \vec{u}_3$ vara tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ som **inte** ligger i ett och samma plan. Som vi vet från kursens geometriavsnitt kan dessa vektorer väljas som en bas i $\mathbb{R}^3$ och, följaktligen, kan **varje vektor** $\vec{v}$ ur $\mathbb{R}^3$ skrivas som en linjärkombination $\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_2\vec{u}_3$ med $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Detta visar att $\text{span}\{\vec{u}_1,\, \vec{u}_2,\, \vec{u}_3\}$ är lika med hela $\mathbb{R}^3$.

Slutligen

(v) låt $\vec{u}_1,\, \vec{u}_2,\, \vec{u}_3$ vara tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ som **ligger i ett och samma plan.** Om alla dessa vektorer är parallella (och inte alla lika med $\vec{0}$) visar man på samma sätt som i del (ii) att $\text{span}\{\vec{u}_1,\, \vec{u}_2,\, \vec{u}_3\}$ består av alla vektorer parallella med den linje genom origo som $\vec{u}_1,\, \vec{u}_2,\, \vec{u}_3$ är riktningsvektorer till. Om däremot t.ex. $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$ inte är parallella, spänner de upp ett plan π genom origo och alla tre vektorer $\vec{u}_1,\, \vec{u}_2,\, \vec{u}_3$ ligger i detta plan. (Figur 3.4)

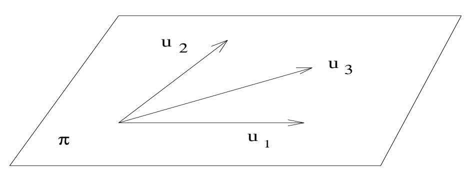

Fig. 3.4

Vektorerna $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$ kan väljas som en bas för planet π och $\vec{u}_3 = b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2$ för några $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Det följer att varje linjärkombination av $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ är på formen

$$\begin{aligned} c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3 = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3(b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2) = \\ = (c_1 + c_3b_1)\vec{u}_1 + (c_2 + c_3b_2)\vec{u}_2 \end{aligned}$$

dvs. är en linjärkombination av vektorerna $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$.

Detta visar att $\operatorname{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \operatorname{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ vilken enligt del (iii) består av alla vektorer parallella med planet π. □

4. Bas

Låt $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$.

Definition 4.1. *Vektorerna* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$ *utgör* **en bas** *i* $\mathbb{R}^n$ *om*

1) $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k$ *är linjärt oberoende och*

2) $\operatorname{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k\} = \mathbb{R}^n$.

Exempel 4.1: Vektorerna

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, ..., 0),\ \vec{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0),\ \vec{e}_3 = (0, 0, 1, ...0),\ ...\ ,\ \vec{e}_n = (0, 0, 0, ..., 1)$$

utgör en bas i $\mathbb{R}^n$. (Varje vektor $\vec{e}_j$ har 1 som j-te komponenten och alla andra komponenter lika med 0.) Denna bas kallas för **standardbasen** i $\mathbb{R}^n$.

Bevis. För varje vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ har vi

$$\begin{aligned} \vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) = a_1(1, 0, 0, ..., 0) + a_2(0, 1, 0, ..., 0) + ... + a_n(0, 0, 0, ..., 1) = \\ = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + ... + a_n\vec{e}_n . \end{aligned} \tag{4.1}$$

Detta visar att varje vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ är en linjärkombination av vektorerna $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ och därmed är $\operatorname{span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_k\} = \mathbb{R}^n$. Dessutom visar (4.1) att likheten $a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + ... + a_n\vec{e}_n = \vec{0} = (0, 0, 0, ..., 0)$ medför $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, vilket visar att vektorerna $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ är linjärt oberoende.

Därmed utgör vektorerna $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ en bas i $\mathbb{R}^n$. □

Vi har en grundläggande

Sats 4.2. *Varje bas i* $\mathbb{R}^n$ *innehåller* n *vektorer.*

Bevis. Ett fullständigt bevis för satsen (i ett större sammanhang) kommer att genomföras i en senare kurs. Tillsvidare vill vi bara påpeka följande: om en uppsättning vektorer $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ utgör en bas i $\mathbb{R}^n$, är dessa vektorer linjärt oberoende. Det följer då från sats 2.3 att $k \le n$. □

Anmärkning 4.3. *Vektorerna* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \in \mathbb{R}^n$ *utgör en bas i* $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ *För varje vektor* $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ *finns det* **unika** *reella tal* $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ *sådana att*

$$\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + ... + c_n\vec{u}_n . \tag{*}$$

Den unika n*-tippeln av talen* $(c_1, c_2, ..., c_n)$ *kallas för* $\vec{v}$*:s koordinater i basen* $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$.

Bevis. ($\Rightarrow$) Låt oss anta att vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ utgör en bas i $\mathbb{R}^n$. Låt $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Eftersom $\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\} = \mathbb{R}^n$ finns det reella tal $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ sådana att

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + ... + c_n\vec{u}_n = \vec{v}\,. \tag{1}$$

För att visa att dessa tal $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ är unika låt oss anta att även reella tal $d_1, d_2, ..., d_n \in \mathbb{R}$ uppfyller

$$d_1\vec{u}_1 + d_2\vec{u}_2 + ... + d_n\vec{u}_n = \vec{v}\,. \tag{2}$$

Om vi subtraherar likheten (2) från (1) får vi

$$(c_1 - d_1)\vec{u}_1 + (c_2 - d_2)\vec{u}_2 + ... + (c_n - d_n)\vec{u}_n = \vec{0}\,. \tag{3}$$

Eftersom vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ är linjärt oberoende (som basvektorer i en bas) medför (3) att $c_1 - d_1 = c_2 - d_2 = ... = c_n - d_n = 0$. Vi får $c_1 = d_1, c_2 = d_2, \dots, c_n = d_n$ vilket visar att talen $c_1, c_2, ..., c_n$ som uppfyller (1) är unika.

($\Leftarrow$) Låt oss anta nu att en uppsättning vektorer $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \in \mathbb{R}^n$ uppfyller villkoret (*). Eftersom för varje vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gäller

$$\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + ... + c_n\vec{u}_n\,,$$

får vi att $\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\} = \mathbb{R}^n$.

Eftersom för varje vektor $\vec{v}$ är likheten (*) uppfylld med en unik uppsättning av koefficienterna $c_1, c_2, ..., c_n$, gäller det i synnerhet för nollvektorn $\vec{0}$. Det betyder att likheten

$$\vec{0} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + ... + c_n\vec{u}_n\,, \tag{4}$$

kan vara uppfylld med endast en uppsättning av koefficienter $c_1, c_2, ..., c_n$. Eftersom (4) är uppfylld med koefficienterna $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$, är det den enda möjligheten. Vi får då

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + ... + c_n\vec{u}_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = ... = c_n = 0\,,$$

vilket innebär att vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ är linjärt oberoende.

Därmed utgör vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ en bas i $\mathbb{R}^n$. □

Exempel 4.1 (igen) Låt $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^n$, dvs. $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$ osv.

Som vi har sett tidigare, för varje vektor $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$ har vi

$$\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n) = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + ... + v_n\vec{e}_n\,.$$

Det betyder att n-tippeln $(v_1, v_2, ..., v_n)$ samtidigt utgör vektorn $\vec{v}$:s koordinater i standardbasen. □

Exempel 4.2: Visa att vektorerna $\vec{u}_1 = (1, 2, -1)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, 0)$, $\vec{u}_3 = (-1, -1, 1)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^3$ och finn koordinaterna för $\vec{v} = (1, -3, 1)$ i denna bas.

Lösning. Vi skall använda Anmärkning 4.3 för att lösa uppgiften.

Låt $\vec{w} = (b_1, b_2, b_3)$ vara en godtycklig vektor i $\mathbb{R}^3$. Finns det reella tal $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ sådana att

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3 = \vec{w} \quad ? \tag{4.2}$$

Är en sådan uppsättning av reella tal (c_1, c_2, c_3) unik?

Likheten (4.2) kan skrivas som

$$c_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Vi betraktar (4.3) som ett linjärt ekvationssystem i obekanta c_1, c_2, c_3 med ett **givet** högerled (b_1, b_2, b_3) (givet av vektorn $\vec{w}$). Ekvationsystemet löses med Gausselimination:

$$\left(\begin{array}{rrr|l}1&1&-1&b_1\\2&1&-1&b_2\\-1&0&1&b_3\end{array}\right)\xmapsto{\substack{\boxed{2}-2\boxed{1}\\ \boxed{3}+\boxed{1}}}\left(\begin{array}{rrr|l}1&1&-1&b_1\\0&-1&1&-2b_1+b_2\\0&1&0&b_1+b_3\end{array}\right)\xmapsto{\substack{\boxed{1}-\boxed{3}\\ \boxed{2}+\boxed{3}}}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|l}1&0&-1&-b_3\\0&0&1&-b_1+b_2+b_3\\0&1&0&b_1+b_3\end{array}\right)\xmapsto{\substack{\boxed{1}+\boxed{2}\\ \boxed{2}\leftrightarrow\boxed{3}}}\left(\begin{array}{rrr|l}1&0&0&-b_1+b_2\\0&1&0&b_1+b_3\\0&0&1&-b_1+b_2+b_3\end{array}\right).$$

Den sista matrisen visar att ekvationssystemet (4.3) har en **unik** lösning $(c_1, c_2, c_3) = (-b_1 + b_2,\ b_1 + b_3,\ -b_1 + b_2 + b_3)$ för varje val av högerled $\vec{w} = (b_1, b_2, b_3)$.

Detta betyder i sin tur att för varje vektor $\vec{w} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ finns det en unik uppsättning av reella tal (c_1, c_2, c_3) som uppfyller (4.2). Enligt Anmärkning 4.3 innebär det att vektorerna $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$ utgör en bas i $\mathbb{R}^3$ och att $(c_1, c_2, c_3) = (-b_1 + b_2,\ b_1 + b_3,\ -b_1 + b_2 + b_3)$ är $\vec{w}$:s koordinater i denna bas.

Låt oss beteckna denna bas med $\underline{\mathbf{u}} = (\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3)$. Det följer att för vektorn $\vec{v} = (1, -3, 1) = (b_1, b_2, b_3)$ är $\vec{v}$:s koordinater i basen $\underline{\mathbf{u}}$ lika med $(c_1, c_2, c_3) = (-b_1 + b_2,\ b_1 + b_3,\ -b_1 + b_2 + b_3) = (-4, 2, -3)$.

Vi skriver $\vec{v} = (-4, 2, -3)_{\underline{\mathbf{u}}}$ (" $\vec{v}$:s koordinater i basen $\underline{\mathbf{u}}$ ").

(**Kontroll:** $-4\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 - 3\vec{u}_3 = -4(1, 2, -1) + 2(1, 1, 0) - 3(-1, -1, 1) = (1, -3, 1) = \vec{v}$. Det stämmer!) □

5. Ett exempel

Exempel 5.1: Låt $\vec{u}_1 = (1, 1, 0, -1, 1)$, $\vec{u}_2 = (2, 1, -1, 0, 2)$, $\vec{u}_3 = (1, 0, -1, 1, 1)$, $\vec{u}_4 = (1, -1, 1, 0, 1)$, $\vec{u}_5 = (1, 2, -2, 0, 1)$ vara vektorer i $\mathbb{R}^5$. Visa att vektorerna $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3,\ \vec{u}_4,\ \vec{u}_5$ är linjärt beroende. Finn **bland dem** en uppsättning av **linjärt oberoende** vektorer som spänner upp samma linjära hölje som $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3,\ \vec{u}_4,\ \vec{u}_5$.

Lösning. Vi börjar med att undersöka för vilka reella tal $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$ det gäller att

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3 + c_4\vec{u}_4 + c_5\vec{u}_5 = \vec{0}. \tag{5.1}$$

Detta är ekvivalent med

$$c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\\1\end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}+c_5\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Vi betraktar (5.2) som ett linjärt ekvationssystem i obekanta $c_1, ..., c_5$ och löser systemet med Gausselimination:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{2} - \boxed{1} \\ \boxed{4} + \boxed{1} \\ \boxed{5} - \boxed{1} \\ \longmapsto \end{array} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{3} - \boxed{2} \\ \boxed{4} + 2\boxed{2} \\ \longmapsto \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{1} + 2\boxed{2} \\ \boxed{4} + \boxed{3} \\ (-1)\boxed{2} \\ \frac{1}{3}\boxed{3} \\ \longmapsto \end{array} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{1} + 3\boxed{3} \\ \boxed{2} - 2\boxed{3} \\ \longmapsto \end{array}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{5.3}$$

Den sista matrisen är en **radkanonisk** matris och har pivotelement i kolonn $1, 2$ och 4. Vi väljer $c_3 = s$, $c_5 = t$ som parametrar (kolonner utan pivotelement!) och får lösningarna

$$(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (s, -s-t, s, t, t), \quad s, t \in \mathbb{R}. \tag{5.4}$$

Detta visar att det finns reella tal $c_1, ..., c_5$, **ej alla** lika med 0, som uppfyller (5.1). Det innebär att vektorerna $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{u}_4$, $\vec{u}_5$ är **linjärt beroende**.

Om vi i (5.4) väljer $t = 1$ och $s = 0$ får vi lösningen $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (0, -1, 0, 1, 1)$ vilket visar att

$$-\vec{u}_2 + \vec{u}_4 + \vec{u}_5 = \vec{0}$$

och därmed

$$\vec{u}_5 = \vec{u}_2 - \vec{u}_4 .$$

Eftersom $\vec{u}_5$ är en linjärkombination av de övriga vektorerna får vi

$$\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5\} = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}. \tag{5.5}$$

Om vi i (5.4) väljer $t = 0$ och $s = 1$ får vi lösningen $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (1, -1, 1, 0, 0)$ vilket visar att

$$\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{0}$$

och därmed

$$\vec{u}_3 = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2 .$$

Från detta följer att

$$\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\} = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_4\}. \tag{5.6}$$

Till slut, om vi sätter $c_3 = 0$ och $c_5 = 0$ dvs. $s = t = 0$ får vi enbart lösningen $c_1 = 0, c_2 = 0, c_4 = 0$ vilket visar att det enda fallet när

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_4\vec{u}_4 = \vec{0}$$

är då $c_1 = c_2 = c_4 = 0$. Det visar att vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_4$ är **linjärt oberoende**.

Vi har dessutom

$$\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5\} = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\} = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_4\}.$$

Svar: $\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5\} = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_4\}$ och vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_4$ är linjärt oberoende.

Obs 1: Detta är **inte** den enda möjliga lösningen till uppgiften. Ett annat val av parametrar i Gausseliminationen skulle ha givit en annan lösning.

Obs 2: De linjärt oberoende vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_4$ i vår lösning motsvarar de kolonner i den radkanoniska matrisen (5.3) som innehåller pivotelement (kolonnerna $1, 2$ och 4). Den lösningsmetod som vi har valt fungerar alltid på detta sätt (och leder alltid till en lösning). $\square$

Blandade övningar i Linjär Algebra: linjärt oberoende, linjärt hölje, bas.

1. Låt $\vec{u}_1 = (1,-1,0,2)$, $\vec{u}_2 = (2,1,-3,1)$, $\vec{u}_3 = (-1,-2,3,1)$, $\vec{u}_4 = (-1,0,2,1)$ vara vektorer i $\mathbb{R}^4$.

(a) Avgör om vektorerna $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{u}_4$ är linjärt beroende eller oberoende.

(b) Avgör om vektorerna $\vec{v} = (1,3,-1,4)$ och $\vec{w} = (2,-1,1,2)$ tillhör det linjära höljet $\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$. Om vektorn $\vec{v}$ resp. $\vec{w}$ tillhör det linjära höljet, framställ den som en linjärkombination av vektorerna $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{u}_4$.

2. För vilka värden av konstanten $a \in \mathbb{R}$ tillhör vektorn $\vec{v} = (1,a,4,1-a)$ det linjära höljet av vektorerna $\vec{u}_1 = (1,-1,1,-1)$, $\vec{u}_2 = (2,1,-2,1)$ och $\vec{u}_3 = (-1,3,1,1)$ i $\mathbb{R}^4$?

3. Avgör om vektorerna $\vec{u}_1 = (1,0,2)$, $\vec{u}_2 = (1,-1,1)$, $\vec{u}_3 = (1,-2,0)$ i $\mathbb{R}^3$ är linjärt beroende eller oberoende. I fall de är linjärt beroende, finn bland $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ en uppsättning vektorer som är linjärt oberoende och som spänner samma linjära hölje som $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$.

4. Visa att vektorerna $\vec{v}_1 = (1,0,2,1)$, $\vec{v}_2 = (1,-1,1,2)$, $\vec{v}_3 = (1,-2,0,3)$, $\vec{v}_4 = (2,1,1,3)$ är linjärt beroende. Uttryck en av dem som en linjär kombination av de övriga. Finn bland dem en uppsättning av **linjärt oberoende** vektorer som har samma linjära hölje som vektorerna $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$.

5. Låt $\vec{u}_1 = (1,2,1)$, $\vec{u}_2 = (-1,0,1)$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^3$. Finn en ekvation som komponenterna x_1, x_2, x_3 måste uppfylla för att vektorn $\vec{v} = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ skall tillhöra det linjära höljet $\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$. Tolka resultatet geometriskt. För vektorer $\vec{v}$ som uppfyller ekvationen finn en framställning av $\vec{v}$ som en linjärkombination av $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$.

6. (a) Avgör om vektorerna $\vec{v}_1 = (1,2)$, $\vec{v}_2 = (2,-1)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^2$. Om så är fallet finn koordinaterna i denna bas för vektorn $\vec{F} = (1,1)$ och för vektorn $\vec{w} = (x_1,x_2)$.

(b) Använd resultaten i del (a) för att dela upp kraftvektorn $\vec{F} = (1,1)$ i $\mathbb{R}^2$ i komposanter parallella med vektorerna $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ (dvs. finn $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ sådana att $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ med $\vec{F}_1 \parallel \vec{v}_1$ och $\vec{F}_2 \parallel \vec{v}_2$).

7. (a) Avgör om vektorerna $\vec{u}_1 = (1,-1,1)$, $\vec{u}_2 = (2,0,1)$, $\vec{u}_3 = (1,-1,2)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^3$. Om så är fallet finn koordinaterna i denna bas för vektorn $\vec{F} = (1,1,1)$ och för vektorn $\vec{w} = (x_1,x_2,x_3)$.

(b) Vektorerna $\vec{u}_2 = (2,0,1)$, $\vec{u}_3 = (1,-1,2)$ spänner upp ett plan π genom origo i $\mathbb{R}^3$. Använd resultaten i del (a) av uppgiften för att framställa kraftvektorn $\vec{F} = (1,1,1)$ som summa av två komposanter $\vec{F}_1$ och $\vec{F}_2$, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, där komposanten $\vec{F}_1$ är parallell med vektorn $\vec{u}_1 = (1,-1,1)$ och komposanten $\vec{F}_2$ är parallell med planet π.

8. Avgör om vektorerna $\vec{u}_1 = (1,0,1,1)$, $\vec{u}_2 = (1,1,-1,0)$, $\vec{u}_3 = (1,-1,1,1)$, $\vec{u}_4 = (2,-1,3,3)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^4$. Om så är fallet finn koordinaterna i denna bas för vektorn $\vec{F} = (1,1,2,1)$ och för vektorn $\vec{w} = (x_1,x_2,x_3,x_4)$.

Facit:

1. (a) Vektorerna $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3,\ \vec{u}_4$ är linjärt beroende.
(b) $\vec{v} \in \text{span}\{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3,\ \vec{u}_4\}$, $\vec{v} = (-\frac{2}{3})\vec{u}_1 + \frac{7}{3}\vec{u}_2 + 0\cdot\vec{u}_3 + 3\vec{u}_4$,
$\vec{w} \notin \text{span}\{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3,\ \vec{u}_4\}$.

2. $a = 2$.

3. Vektorerna $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$ är linjärt beroende. Vidare är t.ex. $\text{span}\{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3\} = \text{span}\{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2\}$ och $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2$ är linjärt oberoende.

4. T.ex. $\vec{v}_3 = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$. $\quad$ $\text{span}\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_4\} = \text{span}\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3,\ \vec{v}_4\}$.

5. Ekvationen är $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Geometrisk tolkning: vektorerna $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2$ spänner upp ett plan π genom origo i $\mathbb{R}^3$. Planet π har ekvationen $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Vektorn $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$ tillhör det linjära höljet $\text{span}\{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2\}$ omm $\vec{v}$ ligger i (= är parallell med) detta plan.

Om $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$ med $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ blir $\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$ med $c_1 = \frac{1}{2}x_2$, $c_2 = -x_1 + \frac{1}{2}x_2$.

6. (a) Ja, $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2$ utgör en bas i $\mathbb{R}^2$.
$\vec{F} = \frac{3}{5}\vec{v}_1 + \frac{1}{5}\vec{v}_2$.
$\vec{w} = (x_1, x_2) = (\frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2)\vec{v}_1 + (\frac{2}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2)\vec{v}_2$.
(b) $\vec{F}_1 = \frac{3}{5}\vec{v}_1 = \frac{3}{5}(1, 2)$ och $\vec{F}_2 = \frac{1}{5}\vec{v}_2 = \frac{1}{5}(2, -1)$.

7. (a) Ja, $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$ utgör en bas i $\mathbb{R}^3$.
$\vec{F} = (-2)\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$.
$\vec{w} = (\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - x_3)\vec{u}_1 + (\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2)\vec{u}_2 + (-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3)\vec{u}_3$.
(b) $\vec{F}_1 = -2\vec{u}_1 = (-2, 2, -2)$ och $\vec{F}_2 = \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = (3, -1, 3)$.

8. Ja, $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3,\ \vec{u}_4$ utgör en bas i $\mathbb{R}^4$,
$\vec{F} = 5\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3 - \vec{u}_4$,
$$\vec{w} = (2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4)\vec{u}_1 + (-x_3 + x_4)\vec{u}_2 + \\ + (x_1 - x_2 - x_4)\vec{u}_3 + (-x_1 - x_3 + 2x_4)\vec{u}_4\,.$$