Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Jörgen Östensson

Lösningsförslag, tentamen 2007-10-22

1. Sätt $f(z) = -5z^4, g(z) = z^6 + z^3 - 2z$. Då gäller för $|z| = 1$, att

$$|f(z)| = |-5z^4| = 5|z|^4 = 5,$$
$$|g(z)| = |z^6 + z^3 - 2z| \leq |z^6| + |z^3| + |-2z| = |z|^6 + |z|^3 + 2|z| = 4.$$

Således är $|g(z)| < |f(z)|$ för $|z| = 1$. Alltså har, enligt Rouches sats, f(z) och f(z)+g(z) = P(z) lika många nollställen i $|z| < 1$, dvs 4 stycken. **Svar:** 4 stycken.

2. Eftersom $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ så gäller uppenbarligen att

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + a^2)^2} dx.$$

Notera att integralen innehållande $\sin x$ är noll, då integranden är udda. Sätt

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2)^2}.$$

Märk att f har dubbelpoler i $z = \pm ia$. Låt $\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$, där C_R är en halvcirkel i övre halvplanet med radie R. Enligt residy-satsen gäller att $\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \cdot \text{Res}_{z=ia} f(z)$, om vi väljer $R > a$. Standarduppskattning med ML-olikheten ger

$$\left| \int_{C_R} f(z)dz \right| \leq \frac{1}{(R^2 - a^2)^2} \cdot \pi R \to 0, \quad \text{då } R \to +\infty.$$

Vidare gäller att

$$\text{Res}_{z=ia} f(z) = \lim_{z \to ia} \frac{d}{dz}\big((z - ia)^2 f(z)\big) = \left(\frac{e^{iz}}{(z + ia)^2} \right)' \Bigg|_{z=ia} = -\frac{i}{4} \frac{1 + a}{a^3 e^a}.$$

Låt alltså $R \to +\infty$, så fås följer att $I = \frac{\pi(1+a)}{2a^3 e^a}$. **Svar:** $\frac{\pi(1+a)}{2a^3 e^a}$.

3. Notera att funktionen $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ är analytisk i hela $\mathbb{C}$ med undantag för punkterna $z = 0$ och $z = 1$. Alltså har f(z) Laurentserieutvecklingar i de givna regionerna $0 < |z| < 1$ och $|z| > 1$. Om man så vill kan man partialbråksuppdela $f(z)$ enligt

$$f(z) = \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z},$$

men det är inte nödvändigt här. För $0 < |z| < 1$ gäller att

$$\frac{1}{z - 1} = -\frac{1}{1 - z} = -\sum_{k=0}^{\infty} z^k,$$

varför $f(z) = -\sum_{k=-1}^{\infty} z^k$. För $|z| > 1$ fås att

$$\frac{1}{z - 1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - 1/z} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (1/z)^k,$$

så att $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-2} z^k$.

Svar: $f(z) = -\sum_{k=-1}^{\infty} z^k$ för $0 < |z| < 1$ och $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-2} z^k$ för $|z| > 1$.

4. En lösning är följande. Notera först att endast $z = 1/2$ avbildas på ∞, varför cirkeln $|z| = 1$ avbildas på en cirkel. Möbiusavbildningar avbildar ju nämligen klassen av linjer och cirklar på sig själv. Spegelpunkten till $z = 1/2$ med avseende på cirkeln $|z| = 1$ är punkten $z = 2$, se formeln i kursboken. Därför måste bilderna av dessa punkter under T vara spegelpunkter med avseende på bilden av $|z| = 1$ under T, enligt den symmetribevarande egenskapen. Men då måste $T(2) = 1$ vara centrum av "bildcirkeln", dvs av bilden av $|z| = 1$ under T. Eftersom punkten $z = -1$ ligger på $|z| = 1$, och eftersom $T(-1) = 0$, står det klart att bildcirkeln är $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$. Vidare ligger $z = 2$ utanför enhetsdisken, och $T(2) = 1$, så det yttre av enhetsdisken avbildas på området innanför bildcirkeln. Alltså avbildas enhetsdisken på området utanför bildcirkeln. **Svar:** Bilden är $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1\}$.

5. Laplacetransformering av bägge leden ger att

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 2\big(sX(s) - x(0)\big) + X(s) = \frac{1}{s+1},$$

så med givna initial-data följer att

$$(s^2 + 2s + 1)X(s) = \frac{1}{s+1} + 4.$$

Alltså är

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{4}{(s+1)^2},$$

vilket enligt tabell är transformen av $x(t) = \big(\frac{1}{2}t^2 + 4t\big)e^{-t}$. **Svar:** $x(t) = \big(\frac{1}{2}t^2 + 4t\big)e^{-t}$.

6. a) Enligt Sats 4.12 i boken så är

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x xy \cdot 8xy\,dy\right)dx = \int_0^1 8x^2 \cdot \frac{x^3}{3}dx = \frac{4}{9}.$$

b) Enligt Sats 4.8 i boken så är

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx.$$

Om $y < 0$ eller $y > 1$ är därför $f_Y(y) = 0$. För $0 \le y \le 1$ så är

$$f_Y(y) = \int_y^1 8xy\,dx = 8y \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_y^1 = 4y(1-y^2).$$

c) Enligt Definition 4.13 i boken så är då för $0 < y < 1$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{8xy}{4y(1-y^2)} & ,0 \le y \le x \le 1, \\ 0 & ,\text{annars.} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2x}{1-y^2} & ,0 \le y \le x \le 1, \\ 0 & ,\text{annars.} \end{cases}$$

d) Enligt Definition 4.14 i boken så är

$$\begin{aligned} E[X|Y=y] &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_{X|Y}(x|y)dx = \int_y^1 x \cdot \frac{2x}{1-y^2}\,dx = \frac{2}{1-y^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_y^1 \\ &= \frac{2}{3}\frac{1-y^3}{1-y^2} = \frac{2}{3}\frac{(1-y)(1+y+y^2)}{(1-y)(1+y)} = \frac{2}{3}\frac{1+y+y^2}{1+y}, \qquad \text{för } 0 < y < 1. \end{aligned}$$

Svar: Se ovan.

7. Eftersom $Y_n = \frac{1}{3}\big(X_n + X_{n-1} + X_{n-2}\big) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_i X_{n-i}$, så följer att

$$h_i = \begin{cases} 1/3, & i = 0, \\ 1/3, & i = 1, \\ 1/3, & i = 2, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Det följer att

$$\begin{aligned} R_Y[n] &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_i h_j R_X[n+i-j] = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} \frac{1}{9} R_X[n+i-j] \\ &= \frac{1}{9}\big(3R_X[n] + 2R_X[n+1] + 2R_X[n-1] + R_X[n+2] + R_X[n-2]\big). \end{aligned}$$

Eftersom $R_X[n] = 2\delta[n] + \delta[n+1] + \delta[n-1]$, så följer att

$$\begin{aligned} R_Y[n] = \frac{1}{9}\Big(& 3\Big(2\delta[n] + \delta[n+1] + \delta[n-1]\Big) \\ & + 2\Big(2\delta[n+1] + \delta[n+2] + \delta[n]\Big) + 2\Big(2\delta[n-1] + \delta[n] + \delta[n-2]\Big) \\ & + \Big(2\delta[n+2] + \delta[n+3] + \delta[n+1]\Big) + \Big(2\delta[n-2] + \delta[n-1] + \delta[n-3]\Big)\Big) \\ = & \begin{cases} 10/9, & n = 0, \\ 8/9, & |n| = 1, \\ 4/9, & |n| = 2, \\ 1/9, & |n| = 3, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases} \end{aligned}$$

Svar: Se ovan.

8. Eftersom $X(t)$ är en svagt stationär stokastisk process och $Y(t) = X(t+1) - X(t)$, så följer att direkt från Definition 10.13 i boken att

$$\begin{aligned} R_Y(t,\tau) &= E\Big[Y(t)Y(t+\tau)\Big] = E\Big[\Big(X(t+1) - X(t)\Big)\Big(X(t+\tau+1) - X(t+\tau)\Big)\Big] \\ &= E[X(t+1)X(t+\tau+1)] - E[X(t+1)X(t+\tau)] - E[X(t)X(t+\tau+1)] + E[X(t)X(t+\tau)] \\ &= R_X(\tau) - R_X(\tau-1) - R_X(\tau+1) + R_X(\tau) = 2R_X(\tau) - R_X(\tau+1) - R_X(\tau-1) \equiv R_Y(\tau). \end{aligned}$$

Spektraltätheten är, enligt Wiener-Khintchines sats 11.12 i boken, Fouriertransformen av autokorrelationsfunktionen:

$$S_Y(\omega) = \widehat{R_Y}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_Y(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau.$$

Men om $f_T(t) = f(t-T)$, så är uppenbarligen $\widehat{f_T}(\omega) = e^{-i\omega T}\widehat{f}(\omega)$, varför

$$S_Y(\omega) = 2S_X(\omega) - e^{i\omega}S_X(\omega) - e^{-i\omega}S_X(\omega) = 2(1-\cos\omega)S_X(\omega).$$

Svar: $R_Y(\tau) = 2R_X(\tau) - R_X(\tau+1) - R_X(\tau-1)$ och $S_Y(\omega) = 2(1-\cos\omega)S_X(\omega)$.