Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Jörgen Östensson

Lösningsförslag, tentamen 2008-01-08

1. i) Låt $f(z) = 2z^5$, $g(z) = -6z^2 + z + 1$. Då är

$$|f(z)| = 2|z|^5 = 2 \cdot 2^5 = 64, \quad |z| = 2,$$
$$|g(z)| = |-6z^2 + z + 1| \leq 6|z|^2 + |z| + 1 = 6 \cdot 2^2 + 2 + 1 = 27, \quad |z| = 2.$$

Alltså är $|f(z)| > |g(z)|$, $|z| = 2$. Det följer att f och $f + g = P$ har lika många nollställen inom $|z| < 2$, d.v.s. 5 stycken.
ii) Låt $f(z) = -6z^2$, $g(z) = 2z^5 + z + 1$. Då är

$$|f(z)| = 6|z|^2 = 6, \quad |z| = 1,$$
$$|g(z)| = |2z^5 + z + 1| \leq 2|z|^2 + |z| + 1 = 4, \quad |z| = 1.$$

Alltså är $|f(z)| > |g(z)|$, $|z| = 1$. Det följer att f och $f + g = P$ har lika många nollställen inom $|z| < 1$, d.v.s. 2 stycken.
Sammantaget följer av i) och ii) att P har $5 - 2 = 3$ nollställen i $1 \leq |z| < 2$.
Svar: 3 stycken.

2. Eftersom $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ så gäller uppenbarligen att

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx.$$

Notera att integralen innehållande $\sin x$ är noll, då integranden är udda. Låt

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}.$$

Märk att f har enkelpoler i $z = \pm ia$ och $z = \pm ib$. Låt $\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$, där C_R är en halvcirkel i övre halvplanet med radie $R > a$. Enligt residy-satsen gäller då att $\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \cdot (\mathrm{Res}_{z=ia} f(z) + \mathrm{Res}_{z=ib} f(z))$. Standarduppskattning med ML-olikheten ger

$$\left| \int_{C_R} f(z)dz \right| \leq \frac{1}{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)} \cdot \pi R \to 0, \quad \text{då } R \to +\infty.$$

Vidare gäller att

$$\operatorname*{Res}_{z=ia} f(z) = \frac{e^{-a}}{2ia(b^2 - a^2)}, \quad \operatorname*{Res}_{z=ib} f(z) = \frac{e^{-b}}{2ib(a^2 - b^2)}.$$

Det följer att

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i(a^2 - b^2)} \left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a} \right) = \frac{\pi}{a^2 - b^2} \left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a} \right).$$

Svar: $\frac{\pi}{a^2-b^2} \left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a} \right)$.

3. Notera att funktionen $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$ är analytisk i hela $\mathbb{C}$ med undantag för punkterna $z = 1$ och $z = 2$. Alltså har f en Laurentserieutveckling i den givna regionen. Det gäller att

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2},$$

där

$$A = \lim_{z\to 1} \frac{z}{z-2} = -1,$$
$$B = \lim_{z\to 2} \frac{z}{z-1} = 2.$$

Det följer att Laurentserien till funktionen $\frac{z}{(z-1)(z-2)}$ i regionen $1 < |z| < 2$ ges av

$$\begin{aligned}\frac{z}{(z-1)(z-2)} &= \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{2}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)} - \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k - \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\,z^k - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}} \\ &\left(= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\,z^k - \sum_{k=-\infty}^{-1} z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,z^k,\ \text{där } a_k = \begin{cases} -\frac{1}{2^k} & ,k \ge 0 \\ -1 & ,k \le -1 \end{cases}\right).\end{aligned}$$

Svar: Se ovan.

4. Den sökta avbildningen ges av ekvationen

$$\begin{aligned}(z;-1,0,1) = (w;1,i,-1) &\iff \frac{z-(-1)}{z-1}\cdot\frac{0-1}{0-(-1)} = \frac{w-1}{w-(-1)}\cdot\frac{i-(-1)}{i-1} \\ &\iff \frac{z+1}{z-1}\cdot(-1) = \frac{w-1}{w+1}\cdot(-i)\end{aligned}$$

Efter förenkling fås att $w = \frac{z-i}{iz-1}$, så att $T(z) = \frac{z-i}{iz-1}$. Det är klart att den reella axeln avbildas på enhetscirkeln, och att $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ avbildas på $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
Svar: $T(z) = \frac{z-i}{iz-1}$. Övre halvplanet $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ avbildas på enhetskivan $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$.

5. Laplacetransformering av bägge leden ger att

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + X(s) = \frac{1}{s^2+1},$$

så med givna initial-data följer att

$$(s^2+1)X(s) = \frac{1}{s^2+1} - 1 \iff X(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{s^2+1}.$$

Enligt tabell så följer att

$$x(t) = \frac{\sin t - t\cos t}{2} - \sin t = -\frac{\sin t + t\cos t}{2}.$$

Svar: $x(t) = -\frac{\sin t + t\cos t}{2}$.

6. a) Enligt Sats 4.12 i boken så är

$$E[X^2Y] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 y f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x x^2y \cdot 6y\,dy\right)dx = \int_0^1 x^2\left[2y^3\right]_0^x dx$$
$$= \int_0^1 2x^5 dx = \frac{1}{3}.$$

b) Enligt Sats 4.8 i boken så är

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx.$$

Om $y < 0$ eller $y > 1$ är därför $f_Y(y) = 0$. För $0 \le y \le 1$ så är

$$f_Y(y) = \int_y^1 6y\,dx = 6y(1-y).$$

Alltså är

$$f_Y(y) = \begin{cases} 6y(1-y) & ,0 \le y \le 1 \\ 0 & ,\text{annars} \end{cases}.$$

Enligt Definition 4.13 i boken så är då för $0 < y < 1$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{6y}{6y(1-y)} & ,0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & ,\text{annars} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-y} & ,0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & ,\text{annars} \end{cases}.$$

c) Enligt Definition 4.14 i boken så är

$$E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx = \int_y^1 x \cdot \frac{1}{1-y}\,dx = \frac{1}{1-y}\left[\frac{x^2}{2}\right]_y^1$$
$$= \frac{1}{1-y}\cdot\frac{1}{2}(1-y^2) = \frac{1}{2}(1+y), \quad \text{för } 0 < y < 1.$$

d) Eftersom

$$E[X^2|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{X|Y}(x|y)dx = \int_y^1 x^2 \cdot \frac{1}{1-y}\,dx = \frac{1-y^3}{3(1-y)} = \frac{1}{3}(1+y+y^2),$$

för $0 < y < 1$, så följer att

$$\text{Var}[X|Y=y] = E[X^2|Y=y] - (E[X|Y=y])^2 = \frac{1}{3}(1+y+y^2) - \frac{1}{4}(1+2y+y^2)$$
$$= \frac{(1-y)^2}{12}, \quad \text{för } 0 < y < 1.$$

Svar: Se ovan.

7. Vi har att

$$R_X[n,k] = E[X_n\, X_{n+k}] = 4\,\delta[k],$$

så $R_X[k] = 4\,\delta[k]$ och X_n är en svagt stationär stokastisk följd. Det följer att

$$R_Y[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_i h_j R_X[n+i-j] = \sum_0^1\sum_0^1 \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\,\delta[n+i-j]$$

$$= 2\delta[n] + \delta[n+1] + \delta[n-1] = \begin{cases} 2, & n=0 \\ 1, & n=\pm 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}.$$

Det följer att

$$S_Y(\omega) = 2 + e^{i\omega} + e^{-i\omega} = 2(1+\cos\omega).$$

Det är så klart att $S_Y(\omega) \in [0,4]$ för alla $\omega \in \mathbb{R}$.
Alternativ lösning:

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-i\omega k} = \frac{1}{2}(1+e^{-i\omega})$$

$$\Longrightarrow |H(\omega)|^2 = \frac{1}{4}(1+e^{-i\omega})(1+e^{i\omega}) = \frac{1}{4}(2+e^{i\omega}+e^{-i\omega})$$

$$\Longrightarrow S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega) = 2 + e^{i\omega} + e^{-i\omega}$$

$$\Longrightarrow R_Y[n] = \begin{cases} 2, & n=0 \\ 1, & n=\pm 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

8. Eftersom $X(t) = W(t+1) - W(t)$, så är

$$R_X(t,\tau) = E[X(t)\,X(t+\tau)] = E\Big[\big(W(t+1)-W(t)\big)\big(W(t+\tau+1)-W(t+\tau)\big)\Big].$$

Vi skiljer nu två fall: i) $\tau \geq 1$ och ii) $0 < \tau < 1$.
i) I detta fall är $t < t+1 \leq t+\tau < t+\tau+1$ varför de två faktorerna under [ ] ovan är oberoende, enligt egenskapen om oberoende inkrement. Då faktorerna båda har väntevärde 0 så följer att $R_X(t,\tau) = 0$ i detta fall.
ii) I detta fall är $t < t+\tau < t+1 < t+\tau+1$. Vidare gäller att

$$A := W(t+\tau) - W(t) \text{ är Gaussian } \big(0, \sigma\sqrt{\tau}\big)$$

$$B := W(t+1) - W(t+\tau) \text{ är Gaussian } \big(0, \sigma\sqrt{1-\tau}\big)$$

$$C := W(t+\tau+1) - W(t+1) \text{ är Gaussian } \big(0, \sigma\sqrt{\tau}\big)$$

samt att A, B, C är oberoende stokastiska variabler. Härav följer att

$$\begin{aligned} R_X(t,\tau) &= E[(A+B)(B+C)] \\ &= E[AB + AC + B^2 + BC] \\ &= 0 + 0 + \sigma^2\,(1-\tau) + 0 = \sigma^2\,(1-\tau). \end{aligned}$$

Svar: $R_X(t,\tau) = \begin{cases} \sigma^2\,(1-\tau) & ,0<\tau<1 \\ 0 & ,\tau \geq 1 \end{cases}.$