Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Jörgen Östensson

Lösningsförslag, tentamen 2008-10-23

1. Sätt $f(z) = z - 2$, $g(z) = e^{-z}$. Betrakta konturen Γ_R bestående av halvcirkeln $\Gamma_R^{(1)}$ i höger halvplan med centrum i origo och radie R samt linjesegmentet $\Gamma_R^{(2)}$ mellan $-iR$ och iR. Låt oss anta Γ_R orienterad moturs, samt att $R > 2$. (Rita figur!) Funktionerna f och g är analytiska på och inom Γ_R. Vidare har f precis ett nollställe inom Γ_R, nämligen $z = 2$. Det gäller att

$$|f(z)| = |z-2| \geq \begin{cases} \big||z|-2\big| = |R-2| = R-2, & z \in \Gamma_R^{(1)}, \\ 2, \quad z \in \Gamma_R^{(2)}, \end{cases}$$

samt att

$$|g(z)| = |e^{-(x+iy)}| = |e^{-x-iy}| = e^{-x} \leq 1, \quad z \in \Gamma_R.$$

Alltså: $|f(z)| > |g(z)|$ då $z \in \Gamma_R$, om vi väljer $R > 3$. Om $R > 3$ har alltså $f(z)$ och $f(z) + g(z) = z - 2 + e^{-z}$ precis lika många nollställen inom Γ_R, d.v.s. ett nollställe, enligt Rouches sats. Det följer att $z - 2 + e^{-z}$ har precis ett nollställe i höger halvplan.

$\square$

2. Eftersom $e^{iax} = \cos ax + i \sin ax$ så gäller att

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+1)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{(x^2+1)^2} dx.$$

Notera att integralen innehållande $\sin ax$ är noll, då integranden är udda. Låt

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{(z^2+1)^2}.$$

Märk att f har dubbelpoler i $z = \pm i$. Låt $\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$, där C_R är en halvcirkel i övre halvplanet med radie $R > 1$. Enligt residy-satsen gäller då att $\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=i} f(z)$. Standarduppskattning med ML-olikheten ger

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \frac{1}{(R^2-1)^2} \cdot \pi R \to 0, \quad \text{då } R \to +\infty.$$

Vidare gäller att

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{d}{dz} \frac{e^{iaz}}{(z+i)^2} \bigg|_{z=i} = \frac{iae^{iaz}}{(z+i)^2} - \frac{2e^{iaz}}{(z+i)^3} \bigg|_{z=i} = -\frac{i}{4}(a+1)e^{-a}.$$

Det följer att

$$I = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{\pi}{2}(a+1)e^{-a}.$$

Svar: $\frac{\pi}{2}(a+1)e^{-a}$.

3. Notera att funktionen $f(z) = \frac{5z}{(z+3)(z-2)}$ är analytisk i hela $\mathbb{C}$ med undantag för punkterna $z = -3$ och $z = 2$. Speciellt är f analytisk i $1 < |z-1| < 4$. Rita figur! Alltså har f en Laurentserieutveckling i den givna regionen. Notera att

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2},$$

där

$$A = \lim_{z\to -3}(z+3)f(z) = \frac{5z}{z-2}\bigg|_{z=-3} = 3 \quad \text{och} \quad B = \lim_{z\to 2}(z-1)f(z) = \frac{5z}{z+3}\bigg|_{z=2} = 2\,.$$

Det följer att Laurentserien till funktionen $f(z) = \frac{5z}{z^2+z-6}$ i regionen $1 < |z-1| < 4$ ges av

$$\begin{aligned}
f(z) &= 3\,\frac{1}{z-1+4} + 2\,\frac{1}{z-1-1} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{4}} + \frac{2}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} \\
&= \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{z-1}{4}\right)^k + \frac{2}{z-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3(-1)^k}{4^{k+1}}(z-1)^k + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(z-1)^{k+1}} \\
\Bigg(&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^n}{4^{n+1}}(z-1)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1}2\,(z-1)^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\,(z-1)^n, \text{ där } a_n = \begin{cases}\frac{3(-1)^n}{4^{n+1}} & ,n\geq 0\\ 2 & ,n\leq -1\end{cases}\Bigg).
\end{aligned}$$

Svar: Se ovan.

4. Sätt $g(z) = \frac{z-i}{z+i}$, $h(z) = e^z = e^{x+iy}$. Då är $f(z) = g(h(z))$. Notera först att h avbildar domänen $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im } z < \pi\}$ på övre halvplanet. Återstår att bestämma bilden av övre halvplanet under g. Märk att $g(i) = 0$, $g(-i) = \infty$, samt att $-i$ och i är spegelpunkter m.a.p. reella axeln. Klart därför att bilden av $\mathbb{R}$ under g är en cirkel med centrum i origo, enligt symmetriegenskapen hos Möbiusavbildningar. Men $g(0) = -1$, så cirkeln har radie 1. Klart därför att bilden av D under f är $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$.

Svar: Domänen D avbildas på enhetskivan $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$.

5. Laplacetransformering av bägge leden ger att

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 4X(s) = 4\,\frac{s}{s^2+4},$$

så med givna initial-data följer att

$$X(s) = \frac{s}{(s^2+4)} + 4\,\frac{s}{(s^2+4)^2}.$$

Enligt tabell är då

$$x(t) = \cos 2t + t\sin 2t.$$

Svar: $x(t) = \cos 2t + t\sin 2t$.

6. a) Konstanten c bestäms av att

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_x^1 cx^2 dy \right) dx$$
$$= c\int_0^1 x^2(1-x)dx = c\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{c}{12},$$

varför $c = 12$.

b) Enligt Sats 4.12 i boken så är

$$E[X^2+Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2+y^2) f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_x^1 (x^2+y^2)\cdot 12x^2\, dy \right) dx$$
$$= 12\int_0^1 \left(x^4(1-x) + x^2 \cdot \left[\tfrac{y^3}{3}\right]_x^1 \right) dx = 12\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6}\right)\right]_0^1$$
$$= 12\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{18}\right) = 12\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{18}\right) = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15}.$$

c) Enligt Sats 4.8 i boken så är

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx.$$

Om $y < 0$ eller $y > 1$ är därför $f_Y(y) = 0$. För $0 \le y \le 1$ så är

$$f_Y(y) = \int_0^y 12x^2\, dx = 12\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^y = 4y^3.$$

Alltså är

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4y^3 & ,0 \le y \le 1, \\ 0 & ,\text{annars.} \end{cases}$$

Enligt Definition 4.13 i boken så är då för $0 < y \le 1$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{3x^2}{y^3} & ,0 < x < y, \\ 0 & ,\text{annars.} \end{cases}$$

d) Enligt Definition 4.14 i boken så är

$$E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx = \int_0^y x \cdot \frac{3x^2}{y^3}\, dx = \frac{3}{y^3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^y = \frac{3y}{4}.$$

Det följer att $E[X|Y] = \frac{3Y}{4}$.

Svar: Se ovan.

7. Nej.

$$\begin{aligned} R_X(t,\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] = E[t(t+\tau)Y^6] = t(t+\tau)\,E[Y^6] \\ &= t(t+\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} y^6 f_Y(y)dy = t(t+\tau)\int_{-1}^{1} y^6\cdot\frac{1}{2}dy = \frac{t(t+\tau)}{7}. \end{aligned}$$

Alltså beror $R_X(t,\tau)$ på t, så $X(t)$ är ej svagt stationär. Således är $X(t)$ ej starkt stationär.

Svar: Nej.

8. Vi har att

$$R_X[n,k] = E[X_n\,X_{n+k}] = \sigma^2\,\delta[k],$$

så $R_X[k] = \sigma^2\,\delta[k]$ och X_n är en svagt stationär stokastisk följd. Det följer att

$$S_X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X[k]e^{-i\omega k} = \sigma^2.$$

Eftersom

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\,e^{-i\omega k} = 1 + ce^{-i\omega},$$

och således

$$|H(\omega)|^2 = (1+ce^{-i\omega})\cdot(1+ce^{i\omega}) = 1 + c^2 + 2c\cos\omega,$$

så följer att

$$S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega) = \sigma^2(1+c^2) + 2c\sigma^2\cos\omega.$$

Alltså måste

$$\begin{cases} \sigma^2(1+c^2) & = 4 \\ 2c\sigma^2 & = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{c}(1+c^2) & = 4 \\ \sigma^2 & = \frac{2}{c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 - 2c + 1 & = 0 \\ \sigma^2 & = \frac{2}{c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c & = 1 \\ \sigma^2 & = 2 \end{cases}.$$

Således är $c = 1$ och $\sigma^2 = 2$.

Alternativ lösning: Beräkna först $R_Y[n]$ m.h.a. formeln

$$R_Y[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_i h_j R_X[n+i-j]$$

och därefter $S_Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_Y[k]e^{-i\omega k}$. Bestäm sedan c och σ^2 som ovan.

Svar: $c = 1$ och $\sigma^2 = 2$.