

## Matematik för signalbehandling

Skrivtid: 09.00–14.00.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, räknedosa, *BETA*.

1. Bestäm alla analytiska funktioner  $f(z)$ ,  $z = x + iy$ , som har realdelen  $x^2 - y^2 - 2y + 2$ .

2. Lös differensekvationen

$$6y(n+2) - 7y(n+1) + 2y(n) = \frac{1}{2^n}, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

3. Beräkna integralerna

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx, \quad \text{b) } \int_{|z|=3} \frac{1}{z^2 + 4} dz.$$

4. Bestäm *alla* Möbiusavbildningar som avbildar enhetscirkeln på imaginära axeln, reella axeln på reella axeln, och som uppfyller  $T(0) = 1$ .

5. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + y = t \sin t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1,$$

med hjälp av Laplacetransform.

6. Låt  $X$  vara en normalfördelad stokastisk variabel med  $E[X] = 0$  och  $\text{Var}[X] = 16$ . Betrakta händelsen  $A = \{X > 0\}$ . Beräkna det betingade väntevärdet  $E[X|A]$  och den betingade variansen  $\text{Var}[X|A]$ .

7. Låt  $\{N(t), t \geq 0\}$ , där  $N(0) = 0$ , vara en Poissonprocess med intensiteten  $\lambda$ , och låt  $Y$  vara en av  $\{N(t)\}$  oberoende stokastisk variabel, som med lika sannolikhet antar värdena 0 och 1. Sätt  $Z(t) = (-1)^{Y+N(t)}$ . Bestäm väntevärdes- och kovariansfunktionen till  $\{Z(t)\}$ . Är denna process svagt stationär?

8. Låt  $(X_n)_{n=-\infty}^{\infty}$  vara en följd av oberoende, likafördelade Gaussiska variabler med väntevärde 0 och varians  $\sigma^2$ . Låt vidare en stationär, diskret tidsserie vara definierad av

$$Y_n = X_n + c_1 X_{n-1} + c_2 X_{n-2},$$

där  $c_1$  och  $c_2$  är konstanter. Man vet att spektraltätheten för  $Y$  ges av

$$S_Y(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_Y(k) e^{2\pi i k f} = 27 + 36 \cos(2\pi f) + 18 \cos(4\pi f), \quad |f| \leq 1/2$$

där kovariansfunktionen för  $Y$  betecknas  $R_Y(k) = \text{Cov}(Y_n, Y_{n+k})$ . Vad blir funktionsvärdena  $R_Y(0)$ ,  $R_Y(1)$  och  $R_Y(2)$ ? Beräkna med hjälp av dessa variansen  $\sigma^2$  för indata, och konstanterna  $c_1$  och  $c_2$ .

**LYCKA TILL!**