

Matematik för Signalbehandling

Skrivtid: 08.00-13.00.

Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, räknedosa, BETA.

1. Bestäm antalet nollställen till polynomet $P(z) = z^6 - 5z^4 + z^3 - 2z$ i regionen $|z| < 1$.

2. Låt $a > 0$. Beräkna med hjälp av residykalkyl integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)^2} dx.$$

3. Bestäm Laurentserien till funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

i regionen $0 < |z| < 1$ respektive $|z| > 1$.

4. Ange bilden av enhetsdisken $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ under Möbiusavbildningen

$$T(z) = \frac{z+1}{2z-1}.$$

5. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = e^{-t}, \quad x(0) = 0, x'(0) = 4,$$

med hjälp av Laplace-transformen.

6. De stokastiska variablerna X och Y har simultan täthetsfunktion

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

- a) Beräkna $E[XY]$.
- b) Bestäm $f_Y(y)$.
- c) Bestäm $f_{X|Y}(x|y)$.
- d) Beräkna $E[X|Y = y]$.

7. Relationen mellan insignalen X_n och utsignalen Y_n till ett tidsdiskret LTI-filter ges av

$$Y_n = \frac{1}{3}(X_n + X_{n-1} + X_{n-2}).$$

Bestäm autokorrelationsfunktionen $R_Y[n]$ av utsignalen, om insignalen är en svagt stationär stokastisk sekvens med autokorrelationsfunktion $R_X[n]$ given av

$$R_X[n] = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ 1, & n = \pm 1, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

8. Låt $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, vara en svagt stationär stokastisk process. Sätt

$$Y(t) = X(t+1) - X(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bestäm autokorrelationsfunktionen $R_Y(\tau)$ i termer av $R_X(\tau)$. Bestäm också spektraltätheten $S_Y(\omega)$ uttryckt i $S_X(\omega)$.

LYCKA TILL!