Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Jörgen Östensson

Prov i matematik
1IT080
Informationsteknologi IT3
2008-10-23

Matematik för signalbehandling

Skrivtid: 09.00-14.00.
Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, räknedosa, BETA.

1. Visa att ekvationen

$$z - 2 + e^{-z} = 0$$

har precis en rot i höger halvplan.

2. Beräkna med hjälp av residykalkyl integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+1)^2}\, dx \qquad (a > 0).$$

3. Bestäm Laurentserien till funktionen

$$f(z) = \frac{5z}{z^2 + z - 6}$$

i domänen $1 < |z - 1| < 4$.

4. Bestäm bilden av domänen

$$D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$$

under avbildningen

$$f(z) = \frac{e^z - i}{e^z + i}\ .$$

5. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$x''(t) + 4x(t) = 4\cos 2t, \quad x(0) = 1, x'(0) = 0,$$

med hjälp av Laplace-transformen.

6. De stokastiska variablerna X och Y har simultan täthetsfunktion

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\,x^2 & , 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & , \text{annars} \end{cases} .$$

a) Bestäm konstanten c.
b) Beräkna $\mathrm{E}[X^2 + Y^2]$.
c) Bestäm $f_{X|Y}(x|y)$.
d) Beräkna $\mathrm{E}[X|Y = y]$ och $\mathrm{E}[X|Y]$.

7. Låt Y vara en stokastisk variabel som är likformigt fördelad på intervallet $(-1, 1)$, d.v.s.

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/2 & , -1 < y < 1 \\ 0 & , \text{annars} \end{cases} .$$

En stokastisk process $X(t)$ definieras av att

$$X(t) = Y^3\,t, \quad t \ge 0.$$

Är $X(t)$ starkt stationär? Motivera svaret.

8. En följd av oberoende och likafördelade stokastiska variabler X_n med väntevärde 0 och varians σ^2 är insignal till ett tidsdiskret LTI-filter med impulssvar

$$h_n = \begin{cases} 1\,, & n = 0 \\ c\,, & n = 1 \\ 0\,, & \text{annars} \end{cases} \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

Man vet att spektraltätheten för utsignalen ges av

$$S_Y(\omega) = 4 + 4\cos\omega.$$

Bestäm konstanten c och variansen σ^2.

LYCKA TILL!