Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Jörgen Östensson

Prov i matematik
1IT080
Informationsteknologi IT3
2009-01-07

Matematik för signalbehandling

Skrivtid: 14.00-19.00.
Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, räknedosa, BETA.

1. Visa att polynomet $P(z) = z^4 + 6z + 3$ har alla sina nollställen i regionen $|z| < 2$, samt att tre av dessa ligger i regionen $1 < |z| < 2$.

2. Beräkna med hjälp av residykalkyl integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{(x^2+1)^2}\, dx \qquad (a > 0).$$

3. Bestäm den följd $\{a(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ vars (bilaterala) z-transform ges av

$$A(z) = \frac{3z}{z^2 + z - 2}$$

i domänen $1 < |z| < 2$.

4. Bestäm bilden av domänen

$$D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$$

under Möbiusavbildningen

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}\ .$$

5. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$x''(t) + 4x'(t) + 3x(t) = e^{-t}, \quad x(0) = 1,\, x'(0) = -1,$$

med hjälp av Laplace-transformen.

6. De stokastiska variablerna X och Y har simultan täthetsfunktion

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\,x & , x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1, \\ 0 & , \text{annars.} \end{cases}$$

a) Bestäm konstanten c.
b) Beräkna $\mathrm{E}[XY]$.
c) Bestäm $f_{X|Y}(x|y)$.
d) Beräkna $\mathrm{E}[X|Y=y]$.

7. Låt Y vara en stokastisk variabel som är likformigt fördelad på intervallet $(0,1)$, d.v.s.

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & , 0 < y < 1, \\ 0 & , \text{annars.} \end{cases}$$

En stokastisk process $X(t)$ definieras av att

$$X(t) = e^{Y}\,t, \quad t \geq 0.$$

Bestäm väntevärdet $E[X(t)]$ och autokorrelationsfunktionen $R_X(t,\tau)$. Är $X(t)$ svagt stationär? Motivera svaret.

8. En följd X_n av oberoende och likafördelade stokastiska variabler med $\mathrm{E}[X_n] = 0$ och $\mathrm{Var}[X_n] = 9$, är insignal till ett tidsdiskret LTI-filter med impulssvar

$$h_n = \begin{cases} 1/3 & , \text{för } n \in \{0,1,2\}, \\ 0 & , \text{annars.} \end{cases}$$

Bestäm autokorrelationsfunktionen $R_Y[n]$ samt spektraltätheten $S_Y(\omega)$ för utsignalen Y_n.

LYCKA TILL!