

## Matematik för Signalbehandling

**Skrivtid: 15.00-20.00.**

**Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon, räknedosa, BETA.

**1.** Bestäm antalet nollställen till polynomet  $P(z) = 2z^5 - 6z^2 + z + 1$  i regionen  $1 \leq |z| < 2$ .

**2.** Låt  $a > b > 0$ . Beräkna med hjälp av residykalkyl integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx.$$

**3.** Bestäm Laurentserien till funktionen

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

i regionen  $1 < |z| < 2$ .

**4.** Bestäm den Möbiusavbildning  $T$  som avbildar punkterna  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = 0$  och  $z_3 = 1$  på punkterna  $w_1 = 1$ ,  $w_2 = i$  och  $w_3 = -1$ . Bestäm även bilden av det övre halvplanet  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$  under  $T$ .

**5.** Lös begynnelsevärdesproblemet

$$x''(t) + x(t) = \sin t, \quad x(0) = 0, x'(0) = -1,$$

med hjälp av Laplace-transformen.

6. De stokastiska variablerna  $X$  och  $Y$  har simultan täthetsfunktion

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6y & , 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0 & , \text{annars.} \end{cases}$$

- a) Beräkna  $E[X^2Y]$ .
- b) Bestäm  $f_{X|Y}(x|y)$ .
- c) Beräkna  $E[X|Y = y]$ .
- d) Bestäm  $\text{Var}[X|Y = y]$ .

7. En sekvens  $X_n$  av oberoende och likafördelade stokastiska variabler med  $E[X_n] = 0$  och  $\text{Var}[X_n] = 4$ , är insignal till ett tidsdiskret LTI-filter med impulssvar

$$h_n = \begin{cases} 1/2 & , \text{för } n = 0 \text{ och } n = 1, \\ 0 & , \text{annars.} \end{cases}$$

Bestäm autokorrelationsfunktionen  $R_Y[n]$  samt spektraltätheten  $S_Y(\omega)$  för utsignalen  $Y_n$ . Visa att  $S_Y(\omega) \in [0, 4]$  för alla  $\omega \in \mathbb{R}$ .

8. Låt  $\{W(t), t \geq 0\}$  vara en Brownsk rörelseprocess sådan att  $W(t)$  har varians given av  $\sigma^2 t$  för tidpunkter  $t > 0$ . Sätt

$$X(t) = W(t+1) - W(t), \quad t \geq 0.$$

Bestäm autokorrelationsfunktionen  $R_X(t, \tau)$  för  $\tau > 0$ .

**LYCKA TILL!**