СПЛЕТЕНИЯ СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ

О. Я. ВИРО,
Ю. В. ДРОБОТУХИНА

Заголовок этой статьи кажется несколько странным, не правда ли? Сплетают что-то гибкое. А тут — прямые! В заголовке, правда, говорится не о процессе сплетения, а, скорее, о результате. Но могут ли быть сплетены, зацеплены друг за друга, хитро расположены по отношению друг к другу скрещивающиеся прямые? На первый взгляд кажется, что не могут. Впрочем, откуда у нас это впечатление? В повседневной жизни мы никогда не имеем дела с чем-либо действительно похожим на прямые: не так существенно то, что не бывает предметов бесконечно тонких — толщиной мы готовы пренебречь,— существеннее отсутствие неограниченно протяженных объектов. Даже лучи света — эти образцы прямолинейности,— рассеиваясь и слабея, на большом расстоянии становятся неощутимыми. На практике приходится иметь дело лишь с отрезками прямых. Любой набор непересекающихся друг с другом отрезков можно, двигая отрезки так, чтобы они все время оставались непересекающимися, расположить как попало. В этом нас убеждает опыт, да и доказать это не трудно. Прямые мы изображаем их отрезками. Потому-то нам и кажется, что прямые не могут быть сплетены. Ну а как на самом деле?

Прежде всего, давайте более точно сформулируем интересующие нас вопросы. Первый вопрос: могут ли несколько непересекающихся прямых располагаться по-разному? А что значит «располагаться по-разному»? Сейчас нас не интересуют ни углы, ни расстояния между прямыми. Будем считать, что при движении прямых, в процессе которого они остаются непересекающимися, взаимное расположение их не изменяется. Если же один набор прямых нельзя получить из другого таким движением, то условимся считать, что прямые в этих наборах *расположены по-разному*.

Самыми легкими для нашего пространственного воображения являются наборы параллельных прямых. Ясно, что любые два таких набора, состоящие из одинакового числа прямых, устроены одинаково. Действительно, поворачивая все пространство с «вмороженными» в него прямыми одного набора, можно сделать их параллельными прямым другого набора, после чего, передвигая по очереди прямые первого набора так, чтобы они не наезжали друг на друга и оставались параллельными, легко совместить их с прямыми второго набора.

Обратимся теперь к произвольным наборам прямых. Можно ли произвольный набор непересекающихся прямых превратить в набор параллельных прямых, как бы «причесать» его? У этой задачи есть простое и неожиданное решение. Попробуйте ответить, не заглядывая в последующий текст. Подумали? Ну, тогда читайте дальше. Ответ — всегда можно. Докажем это.

Возьмем произвольный набор непересекающихся прямых. Выберем две параллельные друг другу плоскости, не параллельные ни одной прямой нашего набора. Зафиксируем точки пересечения первой плоскости с прямыми: поставим там шарниры. Точки пересечения второй плоскости с прямыми тоже зафиксируем, но так, чтобы они были неподвижны только на плоскости, а по прямым могли бы скользить. Другими словами, ограничимся тем, что просверлим во второй плоскости маленькие отверстия в местах ее пересечения с прямыми. Будем теперь отодвигать вторую плоскость от первой в перпендикулярном им обеим направлении. При этом прямые будут поворачиваться. Углы, которые они образуют с плоскостями, будут увеличиваться, и, если плоскость за конечное время унесется на бесконечность, они все достигнут 90°, т. е. прямые станут параллельными. Это «причесывание» набора прямых в более привычной для геометрии манере описывается так: мы подвергаем пространство растяжению от первой плоскости в перпендикулярном ей направлении с коэффициентом растяжения, быстро возрастающим и за конечное время достигающим бесконечности. Прямые при этом поворачиваются вокруг точек пересечения с этой плоскостью и в пределе становятся перпендикулярными ей.

Итак, сплетений непересекающихся прямых не бывает, все наборы непересекающихся прямых устроены одинаково — так же, как параллельные. Но в заголовке речь шла о скрещивающихся прямых, так что наборы параллельных прямых были исключены. На то имеются серьезные причины. Параллельные прямые очень близки к пересекающимся: повернув одну из двух параллельных прямых на сколь угодно малый угол, можно сделать эти прямые пересекающимися. А для скрещивающихся прямых это не так.

Поскольку нам разонравились параллельные прямые, придется пересмотреть представление о том, какие наборы прямых устроены одинаково, а какие — нет. Будем считать, что если при движении прямых они все время остаются скрещивающимися, то их взаимное расположение не изменяется. В дальнейшем нам придется много раз рассматривать такие движения, поэтому удобно будет для их обозначения иметь специальное слово. Будем называть их *изотопиями**). Если один набор прямых нельзя получить из другого изотопией, то условимся считать, что прямые в этих наборах расположены по-разному. О таких наборах будем говорить, что они *не изотопны*.

Сложность вопроса об изотопности двух наборов прямых зависит, прежде всего, от числа прямых в этих наборах. Чем больше прямых, тем, по-видимому, хитрее может оказаться изотопия, соединяющая эти наборы. Вначале обратимся к самой легкой ситуации.

*) Слово «изотопия» (греч.) означает «равное место» или «равное положение».

Две прямые

Возьмем любые две пары скрещивающихся прямых и попытаемся решить задачу об их изотопности. Слово «задача» звучит, пожалуй, слишком торжественно, ибо изотопность здесь совершенно очевидна. Тем не менее, всмотримся в доказательство.

Поворотом вокруг общих перпендикуляров, соединяющих прямые наших пар, сделаем углы между прямыми в обеих парах одинаковыми, например, равными 90°. Отрезок общего перпендикуляра двух прямых, заключенный между ними, является кратчайшим отрезком, соединяющим эти прямые. Сближая прямые в наших парах (или отодвигая их друг от друга), сделаем эти отрезки равными по длине, а затем совместим их. Поворотом вокруг полученного отрезка совместим какую-либо прямую первой пары с одной из прямых второй. Это можно сделать, поскольку прямые перпендикулярны отрезку. При этом те прямые, за которыми мы не следили, тоже совместятся (мы считаем, что прямые как бы жестко припаяны к концам отрезка).

Конец доказательства подсказывает вопрос: *пусть у двух пар скрещивающихся прямых одинаковы и расстояние и угол; всегда ли возможно изотопией, в процессе которой не изменяется ни то, ни другое, совместить эти пары?* Как показывает предыдущее рассуждение, это можно сделать, если углы между прямыми равны 90°. А вот если углы не равны 90°, то в результате изотопии, описанной выше, вторые прямые пар могут не совместиться. На рисунке 1 показано, что получится в этом несчастном случае. Вторые прямые пар образуют угол, биссектриса которого параллельна первым прямым (совмещенным); а плоскость этого угла пер-

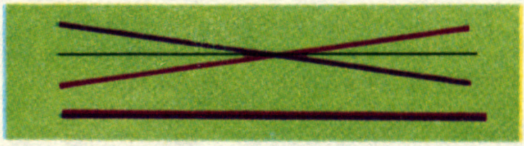

Рис. 1.

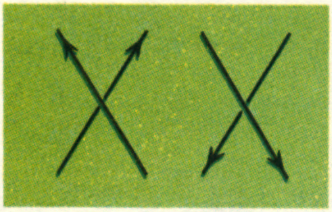

Рис. 2.

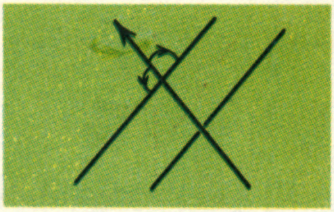

Рис. 3.

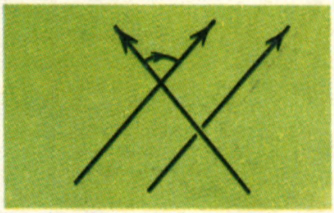

Рис. 4.

пендикулярна плоскости, проходящей через биссектрису и первые прямые. Так что вовсе не случайно в доказательстве изотопности любых двух пар скрещивающихся прямых углы были сделаны равными 90°. При любой другой величине угла эта конструкция доказательства не дает. Более того, дело здесь не в конструкции. Оказывается, две пары скрещивающихся прямых с одинаковыми расстояниями и углами, которые не совмещаются при помощи нашей конструкции, не могут быть совмещены никакой изотопией, в процессе которой расстояние и угол постоянны. Это связано с замечательным явлением, которое нам еще не раз встретится. Его стоит обсудить подробнее.

Ориентации и полуориентации

Ориентированной прямой называется прямая с выделенным на ней направлением. Направление обычно показывается стрелкой. Прямую можно ориентировать двумя способами, две прямые — четырьмя, набор из n прямых — 2^n способами. *Полуориентацией* набора прямых называется пара противоположных ориентаций этого набора. Другими словами, полуориентация набора прямых — это его ориентация с точностью до одновременного обращения всех стрелок («с точностью до наоборот»). На рисунке 2 показаны две ориентации пары прямых, составляющие одну ее полуориентацию.

Каждую пару не перпендикулярных прямых можно снабдить *канонической полуориентацией* (т. е. полуориентацией, которая определяется самой парой, точнее, взаимным расположением входящих в нее прямых). Для этого ориентируем как-либо одну из прямых такой пары и повернем эту прямую так, чтобы она стала параллельна другой прямой. Такой поворот можно осуществить двумя способами (рис. 3); выберем из них самый экономный — тот, при котором угол поворота наименьший (он единственный, поскольку прямые не ортогональны). Получается ориентированная прямая, она параллельна второй прямой нашей пары, которая тем самым приобретает ориентацию (рис. 4). Таким образом, выбор ориентации одной из прямых дает ориентацию пары. Если мы выберем противоположную ориентацию этой прямой, то получим противоположную ориентацию пары. Начав с другой прямой, мы получим те же две противоположные друг другу ориентации пары. Эти две ориентации и составляют обещанную каноническую полуориентацию.

Изотопия, в процессе которой не меняется угол между прямыми, переводит каноническую полуориентацию в каноническую полуориентацию. Это наводит на мысль рассмотреть еще один тип изотопий — *изотопий полуориентированных пар* скрещивающихся прямых: мы допускаем изменения угла и расстояния между прямыми, но требуем, чтобы в процессе изотопии полуориентация не менялась (полуориентация может

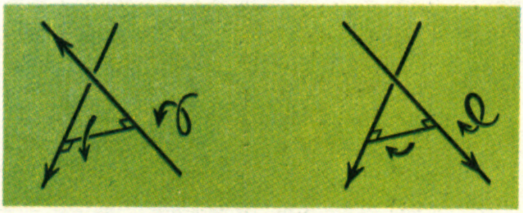

Рис. 5.

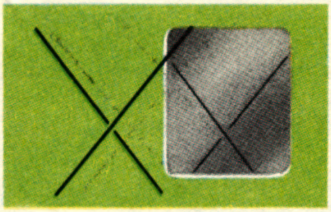

Рис. 6.

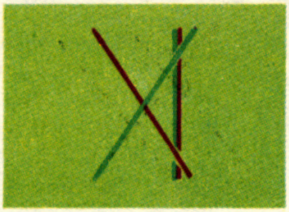

Рис. 7.

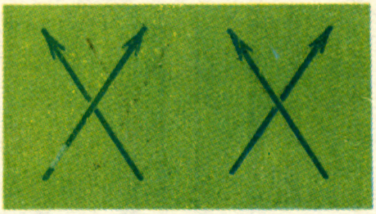

Рис. 8.

быть не канонической). Такая изотопность занимает промежуточное положение между наличием произвольной изотопии и наличием изотопии, в процессе которой расстояние и угол ($\neq 90^\circ$) не меняются. Уж если между интересующими нас полуориентированными парами прямых нет такой изотопии, то не может быть и изотопии, при которой расстояние и угол не меняются. Что же может препятствовать изотопности полуориентированных пар прямых?

Коэффициент зацепления прямых

У каждой полуориентированной пары прямых имеется характеристика, которая может принимать значения $+1$ и -1. Эта характеристика называется *коэффициентом зацепления*. Она сохраняется при изотопиях, и поэтому если две полуориентированные пары прямых имеют разные коэффициенты зацепления, то они не изотопны. Вот как определяется коэффициент зацепления. Имеется самый экономный способ совместить одну ориентированную прямую с другой, скрещивающейся с ней,— перемещать прямую вдоль общего перпендикуляра и поворачивать ее на наименьший угол, необходимый для совмещения направлений. При этом прямая будет двигаться либо как ручка правого буравчика, либо как ручка левого (рис. 5); заметим, что тип буравчика не зависит от того, какую из двух прямых мы двигали. В первом случае коэффициент зацепления равен -1, во втором — $+1$.

Ясно, что переориентация одной из прямых пары влечет за собой изменение коэффициента зацепления. Поэтому при замене ориентации пары на противоположную коэффициент зацепления не меняется и, стало быть, является характеристикой полуориентированной пары и зависит только от полуориентации. При отражении в зеркале коэффициент зацепления пары ориентированных прямых меняется (рис. 6).

Вспомним теперь тот несчастный случай, с которым мы столкнулись в поисках изотопии между двумя парами скрещивающихся прямых, сохраняющей расстояния и углы между прямыми (рис. 7). Тогда мы не смогли ответить на вопрос об изотопности наборов, показанных на рисунке 8. Но теперь-то мы знаем, что такие пары (со своими каноническими полуориентациями) получаются одна из другой отражением в зеркале и имеют поэтому различные коэффициенты зацепления. Значит, такие пары нельзя соединить изотопией, в процессе которой не меняются расстояния и углы между прямыми. А если у двух пар одинаковы расстояния, углы и коэффициенты зацепления, то эти пары можно соединить такой изотопией.

Тройки прямых

Когда мы занимались парами, заметную роль играл общий перпендикуляр пары скрещивающихся прямых. Строго говоря, без него можно было обойтись, но он так естественно связан с прямыми, так надежно соединяет их во что-то целое и обозримое, что было бы странно не воспользоваться им. Теперь хорошо бы найти объекты, столь же присущие тройке скрещивающихся прямых. Мы не будем делать это для тройки, прямые которой лежат в трех параллельных плоскостях. Дело в том, что такое расположение неустойчиво: чуть повернув любую из прямых, мы получим изотопную тройку, к которой наши конструкции применимы.

Итак, рассмотрим произвольную тройку попарно скрещивающихся прямых, не содержащуюся в трех параллельных плоскостях. Через каждую из этих прямых проведем две плоскости, параллельные двум другим прямым. Так получаются шесть плоскостей. Ясно, что они распадаются на три пары параллельных (каждая пара скрещивающихся прямых содержится в двух параллельных плоскостях). Пересекаясь, плоскости образуют параллелепипед. Наши прямые являются продолжениями трех его попарно скрещивающихся ребер (рис. 9). Таким образом, любые три попарно скрещивающиеся прямые, не лежащие в трех параллельных плоскостях, являются продолжениями ребер некоторого параллелепипеда. Этот параллелепипед и является обещанным выше объектом, связанным с тройкой прямых. Чем он замечателен? Прежде всего, он единствен.

В самом деле, через прямую проходит единственная плоскость, параллельная другой, скрещивающейся с ней прямой, и если эти прямые — продолжение ребер параллелепипеда, то в этой плоскости лежит одна из его граней. Следовательно, построенная нами шестерка плоскостей однозначно определяется исходной тройкой прямых, и всякий параллелепипед, ребра которого лежат на этих прямых, ограничен этими плоскостями и, значит, тоже однозначно определен.

Мы видим, что несущий параллелепипед соединяет прямые тройки ничуть не хуже, чем общий перпендикуляр соединял прямые в паре. Здесь, как в случае общего перпендикуляра и в случае полуориентации пары не перпендикулярных прямых, из исходной геометрической конфигурации естественно возникает нечто дополнительное по отношению к ней, но канонически с ней связанное и потому достойное внимания при изучении исходного объекта.

Загадка. *На рисунке 10 изображены, вопреки доказанному выше, два параллелепипеда с ребрами, лежащими на трех попарно скрещивающихся прямых. В чем дело? Где спрятан обман — в доказательстве или в рисунке?*

Займемся классификацией троек с точностью до изотопий. Как было показано, какую бы тройку попарно скрещивающихся прямых мы ни взяли, слегка пошевелив ее, мы можем добиться, чтобы ее прямые оказались продолжениями ребер некоторого параллелепипеда. Параллелепипед определяется (с точностью до движений) длинами своих ребер и углами между ними. Непрерывной деформацией мы можем сначала сделать все углы прямыми (получим прямоугольный параллелепипед), а затем все ребра сделать одинаковой длины, например единичной (получим куб; рис. 11). Эта деформация сопровождается изотопией тройки прямых, являющихся продолжениями ребер параллелепипеда. Таким образом, нам удалось уложить прямые нашей тройки на попарно скрещивающиеся ребра единичного куба. Это замечательное достижение. Действительно, теперь мы знаем, что неизотопных наборов из трех попарно скрещивающихся прямых не так уж много — не больше, чем троек попарно скрещивающихся ребер у куба. А сколько их? На

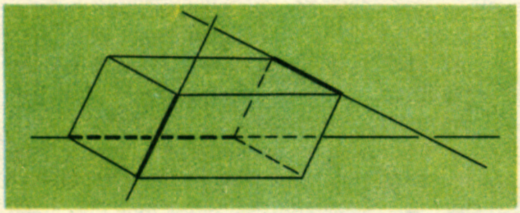

Рис. 9.

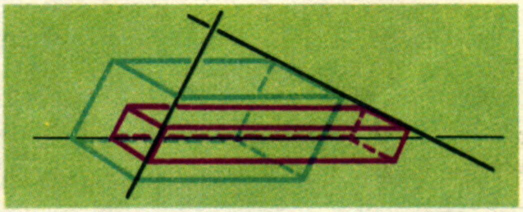

Рис. 10.

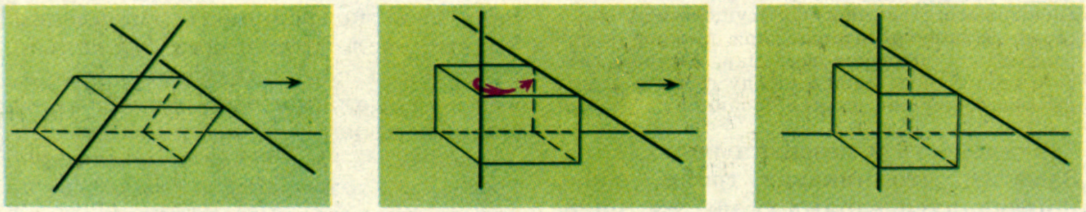

Рис. 11.

первый взгляд, их восемь. В самом деле, фиксируем какую-нибудь грань куба; как мы видели, в ней содержится ровно одно ребро из каждой тройки попарно скрещивающихся ребер, и оно может быть любым из четырех ребер этой грани, а троек, содержащих фиксированное ребро, ровно две (рис. 12). Впрочем, восемь — это слишком много. Поворачивая куб, мы можем перевести любое его ребро в любое другое. Так что возможностей не больше двух; они и показаны на рисунке 12. Этот успех дает надежду на то, что, действуя таким образом, удастся доказать изотопность и троек прямых, показанных на этом рисунке, а значит, и вообще всех троек попарно скрещивающихся прямых. Попробуйте!

Не получается? Не расстраивайтесь, и не должно получиться. Как и у пар ориентированных прямых, у троек (неориентированных!) прямых есть характеристика, называемая *коэффициентом зацепления*, которая может принимать значения ± 1 и которая сохраняется при изотопиях и изменяется при отражении тройки прямых в зеркале. Вот ее определение. В произвольном наборе из трех попарно скрещивающихся прямых ориентируем как попало все прямые. Пары прямых, содержащиеся в нашей тройке, приобретают при этом коэффициенты зацепления (равные ± 1). Перемножив их, получим некоторое число (тоже $+1$ или -1), которое и называется коэффициентом зацепления исходной тройки прямых. Оно не зависит от ориентации прямых: переориентировав любую прямую, мы поменяем знак у двух из трех сомножителей, что не изменит произведения. Сохранение коэффициента зацепления тройки прямых при изотопии и его изменение при отражении тройки в зеркале вытекают из соответствующих свойств коэффициента зацепления пары ориентированных прямых. Поскольку тройки прямых на рисунке 12 являются зеркальными образами друг друга, их коэффициенты зацепления различны, и эти тройки действительно не изотопны.

Поскольку всякая тройка попарно скрещивающихся прямых изотопна одной из двух троек, изображенных на рисунке 12, *две тройки изотопны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые коэффициенты зацепления.*

Итак, уже тройки попарно скрещивающихся прямых могут располагаться по-разному. Это оправдывает заголовок статьи, а также то, что в дальнейшем наборы попарно скрещивающихся прямых мы будем называть просто сплетениями.

Задачи

1. Найдите коэффициенты зацепления каждой из троек прямых на рисунке 12.

2. Прямые, содержащие ребра пространственного четырехугольника $ABCD$, ориентированы «по кругу» (от A к B, от B к C, от C к D, от D к A). Сравните коэффициенты зацеплений пар прямых, лежащих на противоположных ребрах.

3. Докажите, что у всякой тройки попарно

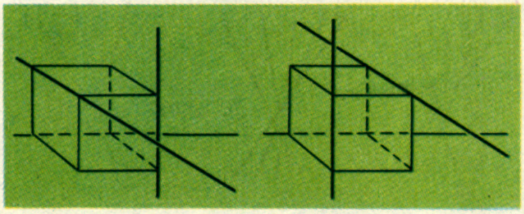

Рис. 12.

скрещивающихся прямых существует единственная полуориентация, при которой коэффициенты зацепления всех пар, содержащихся в этой тройке, равны между собой и равны коэффициенту зацепления тройки.

Зеркальность и незеркальность

Заметим, что никакая тройка скрещивающихся прямых не изотопна своему зеркальному образу, а всякая пара — изотопна. Набор попарно скрещивающихся прямых назовем *зеркальным*, если он изотопен своему зеркальному образу, и *незеркальным* в противном случае. Таким образом, любая тройка незеркальна, а любая пара зеркальна. Возникают вопросы:

1) бывают ли еще такие p, что любое сплетение из p прямых незеркально;

2) и такие p, что любое сплетение из p прямых зеркально;

3) при каких p сплетения p прямых незеркальны;

4) и при каких p — зеркальны?

Хотя мы еще не очень далеко продвинулись в ответе на основной вопрос, поставленный в начале статьи (какими с точностью до изотопий бывают сплетения p прямых), имеет смысл отвлечься от него на вопросы 1)—4). Они более грубые и поверхностные, но и более качественные. Их грубость и поверхностность сулят легкий успех, который, несомненно, пригодится при классификации.

В нашем распоряжении пока не очень много средств доказательства незеркальности — мы знаем, что всякая тройка незеркальна. Но это не так уж мало. Ведь в каждом сплетении большего числа прямых присутствуют тройки. При зеркальном отражении каждая тройка меняет свой коэффициент зацепления. Значит, если сплетение зеркально, то троек с коэффициентом зацепления $+1$ должно быть столько же, сколько троек с коэффициентом зацепления -1. *Общее количество троек, которые можно выбрать из зеркального сплетения, должно быть* поэтому *четным*. Эти нехитрые соображения приводят к следующему неожиданному результату.

Теорема. *Если при делении числа p на 4 получается остаток 3, то всякое сплетение из p прямых незеркально.*

Для доказательства осталось убедиться в справедливости двух фактов, которые мы оставляет читателям в виде задач.

Задачи

4. Докажите, что сплетение из p прямых содержит $p(p-1)(p-2)/6$ троек (и вообще, любой набор из p предметов содержит столько троек).

5. Докажите, что число $p(p-1)(p-2)/6$ нечетно тогда и только тогда, когда при делении числа p на 4 получается остаток 3.

Теорема отвечает (утвердительно) на первый из сформулированных выше вопросов о зеркальности. Ответ на второй вопрос отрицателен: *для любого $p \geqslant 3$ можно сконструировать незеркальное сплетение из p прямых*. Выделенное курсивом утверждение дает ответ и на третий вопрос. Простейшие такие сплетения для $p=4, 5, 6$ изображены на рисунке 13. Эту серию легко продолжить. (Все тройки прямых, содержащиеся в сплетениях этой серии, имеют одинаковые коэффициенты зацепления, и именно поэтому такие сплетения незеркальны.)

Что же касается последнего вопроса, то здесь ответ такой: *зеркальные тройки существуют, если при*

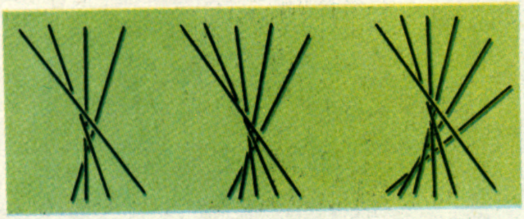

Рис. 13.

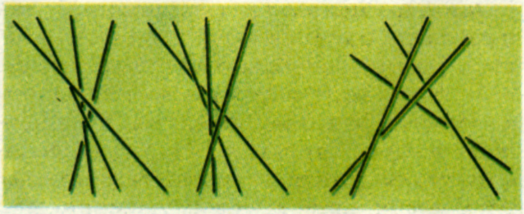

Рис. 14.

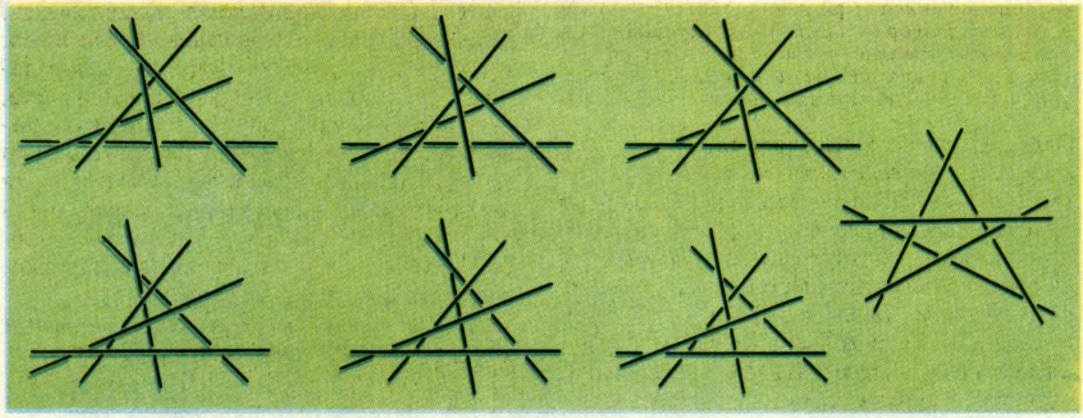

Рис. 15.

делении p на 4 не получается остаток 3. Примеры попробуйте придумать сами; они составляют две серии — одну для четных p, другую для тех p, что дают при делении на 4 остаток 1.

Вернемся теперь к вопросу о классификации сплетений при $p \geqslant 4$.

Сплетения из четырех или более прямых

Со всеми неизотопными типами сплетений из четырех прямых теперь легко познакомиться. Их три (рис. 14). Слева — сплетение, встречавшееся на рисунке 13, в центре — его зеркальный образ, а справа некое зеркальное сплетение. Уже было доказано, что *они не изотопны друг другу*: первое незеркально, и поэтому не изотопно второму (своему зеркальному образу), а третье — зеркально, и поэтому не изотопно ни первому, ни второму. Мы не будем объяснять, почему *любое сплетение четырех прямых изотопно одному из сплетений рисунка 14.* Попробуйте найти объяснение сами.

Можно показать (но это уже не просто), что *любое сплетение из пяти прямых изотопно одному из семи сплетений, изображенных на рисунке* 15. Эти семь сплетений не изотопны друг другу. Для доказательства этого факта сосчитайте у каждого из них сумму коэффициентов зацепления всех 10 троек, которые содержатся в данном сплетении. Ответы все оказываются разными. Ясно, что такая сумма сохраняется при изотопии, и поэтому все семь сплетений попарно не изотопны.

Дальше — еще сложней. *Для $p=6$ имеется 19 типов сплетений* (эта теорема была доказана в 1987 году студентом Ленинградского университета В. Ф. Мазуровским). Некоторые из этих сплетений уже нельзя отличить друг от друга при помощи только коэффициентов зацепления входящих в них троек прямых. Чтобы доказать их неизотопность, пришлось вычислять на ЭВМ более сложные характеристики сплетений.

О числе типов сплетений при $p=7$ известно только, что оно большое и четное. Четное потому, что любая семерка незеркальна.

Начав с элементарного вопроса о классификации сплетений, вот мы уже подошли к «переднему краю науки»..., а значит, и к концу нашего рассказа.