

Fourieranalys

Lars-Åke Lindahl

2010

Fourieranalys

© 2010 Lars-Åke Lindahl, Matematiska institutionen, Uppsala universitet

Innehåll

Förord	vii
1 Värmeledningsekvationen	1
2 Rekvisita	7
2.1 Komplexvärda funktioner	7
2.2 Rummet L^1	9
2.3 Serier	14
2.4 Likformig konvergens	23
2.5 Potensserier	34
Övningsuppgifter	38
3 Z-transformen	41
3.1 Definition och egenskaper	41
3.2 Translation och differensekvationer	49
3.3 Faltning och svarta lådor	51
Övningsuppgifter	54
4 Fourierserier	55
4.1 Periodiska funktioner och fourierkoefficienter	55
4.2 Fourierkoefficienternas storlek	63
4.3 Faltning och Dirichletkärnan	65
4.4 Cesàrosummation och Fejérkärnan	70
4.5 Summationskärnor	74
4.6 Entydighet	77
4.7 Punktvise konvergens	79
4.8 Gibbs fenomen	84
4.9 Weierstrass approximationssats	87
Övningsuppgifter	88
5 L^2-teori	93
5.1 Inre produktrum	93

5.2	l^2 och L^2	96
5.3	Ortogonalitet	99
5.4	Fullständighet	104
5.5	Ortogonal polynom	108
	Övningsuppgifter	114
6	Diskreta fouriertransformen	117
6.1	Cykliska gruppen \mathbf{Z}_N	117
6.2	Karaktärerna till gruppen \mathbf{Z}_N	120
6.3	Den diskreta fouriertransformen	123
6.4	Tidsrummet och frekvensrummet	128
6.5	Faltning och translationsinvarianta operatorer	129
6.6	Sambandet mellan \mathbf{Z}_N och $\mathbf{Z}_{N/2}$	133
6.7	Snabba fouriertransformen	136
	Övningsuppgifter	140
7	Fouriertransformen	143
7.1	Introduktion	143
7.2	Fouriertransformen	145
7.3	Inversionsformler	150
7.4	L^2 -teori	156
	Övningsuppgifter	161
8	Laplacetransformen	167
8.1	Definition	167
8.2	Räkneregler	173
8.3	Deriverbarhet och entydighet	177
8.4	Dynamiska system	180
8.5	Diracmättet	182
	Övningsuppgifter	190
9	Utblickar mot abstrakt harmonisk analys	193
9.1	Lokalt kompakta abelska grupper	193
9.2	Fouriertransformen	197
9.3	De klassiska grupperna	200
9.4	L^2 -teorin	202
	Övningsuppgifter	203
10	Wavelets på \mathbf{Z}_N	205
10.1	Lokalisering	205
10.2	Karaktärsegenskaper	207

10.3 Upp- och nedsampling	209
10.4 Ortogonalitetsrelationer	211
10.5 Waveletbaser	216
10.6 Exempel	229
Svar till övningsuppgifter	241
Sakregister	248

Förord

Kandidatprogrammet i matematik vid Uppsala universitet innehåller två kurser om fouriermetoder, som båda ligger i årskurs 2 och har en omfattning om 5 högskolepoäng vardera. Den inledande kursen, Transformmetoder, är kalkylinriktad, medan mer teoretiska frågor som exempelvis konvergensvillkor för fourierserier och fullständighet hos ortogonalsystem behandlas i fortsättningskursen, Fourieranalys. Det här kompendiet har utvecklats ur föreläsningar som jag hållit för båda kurserna under årens lopp, och det täcker gott och väl innehållet i båda kursena, även om tonvikten ligger åt det mer teoretiska hållet. För att väcka intresse för fortsatta studier i området har jag också lagt till ett kapitel om abstrakt harmonisk analys och ett kapitel som introducerar den diskreta wavelettransformen.

Tillräckliga förkunskaper för att tillgodogöra sig innehållet har man om man läst en kurs i flerdimensionell analys och en kurs i linjär algebra. Eftersom många studenter trots det har ganska skakiga kunskaper om konvergens av numeriska serier och funktionsserier, innehåller rekvisitakapitlet en snabbrepetition av dessa saker. Naturligtvis är det en fördel om man också läst komplex analys, men det förutsätter jag inte.

Jag har tagit mig friheten att använda Lebesgueintegralen och Lebesgues sats om dominerad konvergens eftersom det gör det lättare att formulera många resultat och enklare att bevisa dem, trots att detta integralbegrepp inte behandlas förrän på masternivå. Att den genomsnittlige läsaren därigenom inte kan förväntas förstå alla detaljer bekymrar mig inte — den som går vidare mot högre studier i matematik kommer att göra detta så småningom, och den som inte fortsätter med matematik på högre nivå kan helt obekymrat leva vidare i den förvissningen att Lebesgueintegralen ger samma resultat som Riemannintegralen för alla funktioner som man (som icke-matematiker) träffar på i praktiken.

Uppsala, april 2009.
Lars-Åke Lindahl

Kapitel 1

Värmeledningsekvationen

Värmefördelningen i en homogen kropp utan interna värmekällor beskrivs av den s. k. värmeledningsekvationen

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a^{-2} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Här betecknar $u = u(x, y, z, t)$ temperaturen i punkten (x, y, z) vid tiden t , och a är en konstant som beror av kroppens värmeledningsegenskaper.

Värmeledningsekvationen studerades av Joseph Fourier i arbetet *Théorie analytique de la chaleur*, som utkom 1822, och för att lösa ekvationen utvecklade Fourier en generell metod att skriva allmänna funktioner som oändliga summor av sinus- och cosinusfunktioner.

Vi ska skissera Fouriers metod då kroppen är en homogen stav, som hålls isolerad från sin omgivning så att inget värmeutbyte äger rum utom i stavens båda ändar, vilka hålls vid konstant temperatur noll. För att förenkla räkningarna väljer vi de fysikaliska enheterna så att $a = 1$ och staven får längd π . Den kan då betraktas som intervallet $[0, \pi]$ på x -axeln. Temperaturen u i punkten x vid tiden t ges nu som en funktion $u = u(x, t)$ av de två variablerna x och t .

Vi startar vid tiden $t = 0$ och antar att den ursprungliga värmefördelningen i staven är känd, dvs. att vi känner funktionen

$$(B) \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Villkoret att ändpunkterna har konstant temperatur noll innebär att

$$(R) \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Värmeledningsekvationen reduceras för två variabler till den partiella differentialekvationen

$$(E) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0.$$

Villkoret (R) är ett randvillkor och villkoret (B) är ett begynnelsevillkor till differentialekvationen (E), och vi vill hitta en lösning som satisfierar såväl randvillkoret som begynnelsevillkoret. Observera att differentialekvationen är linjär och homogen och att randvillkoret har samma egenskaper. Därför är varje linjärkombination $u = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$ av lösningar u_i till differentialekvationen som uppfyller randvillkoret också själv en lösning till ekvationen som uppfyller randvillkoret.

Fouriers geniala idé bestod i att först bestämma alla lösningar till differentialekvationen (E), som uppfyller randvillkoret (R) men inte nödvändigtvis begynnelsevillkoret, och som har den speciella formen

$$(1.1.1) \quad u(x, t) = X(x)T(t).$$

Genom att sedan bilda en lämplig (oändlig) summa av sådana enkla lösningar kunde Fourier konstruera en lösning som också uppfyller begynnelsevillkoret. Lösningssmetoden kallas *variabelseparation*.

Anledningen till att studera funktioner på formen (1.1.1) är förstas att differentialekvationen (E) för sådan funktioner får den mycket enkla formen

$$X''(x)T(t) = X(x)T'(t).$$

Om vi skriver denna ekvation på formen

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)},$$

ser vi omedelbart att vänsterledet antar samma värde för alla värden på x , dvs. det är konstant. Om vi betecknar denna konstant med $-\lambda$, så har vi alltså

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

eller ekvivalent

$$(1.1.2) \quad \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) + \lambda T(t) = 0. \end{cases}$$

Vi har med andra ord ersatt vår ursprungliga partiella differentialekvation med ett system som består av två ordinära differentialekvationer. Av randvillkoret (R) följer vidare att $X(0)T(t) = X(\pi)T(t) = 0$ för alla $t > 0$, och om vi exkluderar den triviala lösningen $u(x, t) \equiv 0$ måste vi ha $T(t) \neq 0$ för åtminstone något värde på t , varför

$$(1.1.3) \quad X(0) = X(\pi) = 0.$$

Låt oss nu lösa den första av differentialekvationerna i systemet (1.1.2) med randvillkoret (1.1.3). Det är en linjär differentialekvation av andra ordningen, och vi behöver särskilja tre fall beroende på tecknet hos λ .

Fall 1, $\lambda < 0$: Skriv λ på formen $\lambda = -\alpha^2$ med $\alpha > 0$. Den allmänna lösningen till differentialekvationen är nu $X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$. Konstanterna A och B bestäms av randvillkoren; vi får $A+B=0$ och $Ae^{\alpha\pi} + Be^{-\alpha\pi} = 0$, vilket med en gång ger $A = B = 0$. Således är $X(x) \equiv 0$ och därmed också $u(x, t) \equiv 0$. I fall 1 har differentialekvationen inga icke-triviala lösningar.

Fall 2, $\lambda = 0$: Nu är $X''(x) = 0$, varför $X(x) = Ax + B$. Randvillkoret medför också denna gång att $A = B = 0$, så vi får återigen bara den triviala lösningen.

Fall 3, $\lambda > 0$: Vi sätter nu $\lambda = \omega^2$, där ω är ett positivt reellt tal. Lösningarna till $X''(x) + \omega^2 X(x) = 0$ har formen $X(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$. Randvillkoret $X(0) = 0$ ger att $A = 0$, varför $X(x) = B \sin \omega x$. Av det andra randvillkoret $X(\pi) = 0$ följer slutligen att $B \sin \omega\pi = 0$. Eftersom vi vill undvika den triviala lösningen söker vi lösningar med $B \neq 0$. Detta är givetvis möjligt om och endast om $\sin \omega\pi = 0$, dvs. om och endast om ω är ett (positivt) heltal.

För varje positivt heltal n erhåller vi således icke-triviala lösningar på formen $B_n \sin nx$. Motsvarande parametervärde λ är $\lambda = n^2$, och för dessa värden återstår det nu att lösa differentialekvationen i (1.1.2) för funktionen $T(t)$, dvs. ekvationen

$$T'(t) + n^2 T(t) = 0.$$

Detta är en enkel linjär differentialekvation av första ordningen med lösningen $T(t) = C_n e^{-n^2 t}$.

Genom att välja $B_n = C_n = 1$ erhåller vi med andra ord för varje positivt heltal n en lösning till (E) och (R) på formen

$$u_n(x, t) = e^{-n^2 t} \sin nx.$$

Enligt vår tidigare anmärkning om linearitet är varje ändlig linjärkombination

$$u = \sum_{n=1}^N b_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

också en lösning till (E) som uppfyller randvillkoret (R). Vad gäller då för begynnelsevillkoret (B)? Jo, vi har

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^N b_n \sin nx,$$

så vi har hittat en lösning ifall $f(x)$ råkar vara en ändlig summa av sinusfunktioner $\sin nx$.

Om $f(x)$ inte är en sådan ändlig summa, kan vi istället försöka skriva $f(x)$ som en oändlig summa av sinusfunktioner:

$$(1.1.4) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Summan måste förstas konvergera och representera funktionen $f(x)$ på något bra sätt. Konvergensproblemet kommer vi att återkomma till längre fram i kursen, så tills vidare tillåter vi oss att resonera helt heuristiskt. Vi konstaterar då att motsvarande summa

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

representerar en lösning till vår värmeledningsekvation förutsatt att vi kan beräkna u 's partiella derivator genom att derivera innanför summatecknet.

Det återstår förstas att bestämma koefficienterna b_n i serieutvecklingen (1.1.4) av f . Vi börjar därför med observationen att

$$\int_0^{\pi} \sin nx \sin kx \, dx = \begin{cases} \pi/2 & \text{om } k = n \\ 0 & \text{om } k \neq n. \end{cases}$$

Integralen ovan beräknas med hjälp av den trigonometriska formeln

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

som leder till att

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin nx \sin kx \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos(n-k)x - \cos(n+k)x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-k)x}{n-k} - \frac{\sin(n+k)x}{n+k} \right]_0^{\pi} = 0 \quad \text{för } k \neq n, \end{aligned}$$

medan

$$\int_0^{\pi} \sin^2 kx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2kx) \, dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin 2kx}{2k} \right]_0^{\pi} = \pi/2.$$

Multiplikera nu båda sidorna av (1.1.4) med $\sin kx$ och integrera sedan. Förutsatt att det är tillåtet kasta om ordningen mellan summation och in-

tegration får vi då

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x) \sin kx &= \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^\infty b_n \sin nx \sin kx \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^\infty b_n \int_0^\pi \sin nx \sin kx dx = \frac{\pi}{2} b_k.\end{aligned}$$

Alltså är

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin kx dx.$$

Därmed har vi kommit fram till formeln

$$f(x) = \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin kx dx \right) \sin kx,$$

som representerar $f(x)$ som en oändlig summa av sinusfunktioner i intervallet $[0, \pi]$. Det bör förstås betonas att härledningen är heuristisk och att vi måste undersöka konvergensfrågan ordentligt. Vi ska återkomma till detta längre fram.

Kapitel 2

Rekvisita

2.1 Komplexvärda funktioner

Vi påminner om följande definition av exponentialfunktionen för imaginära värden på argumentet:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Genom att utnyttja välkända egenskaper hos sinus och cosinus får man

$$e^{-it} = \cos t - i \sin t = \overline{e^{it}}, \quad |e^{it}| = 1, \quad e^{i(s+t)} = e^{is} e^{it}, \quad \text{och} \quad e^{2n\pi i} = 1.$$

Vi kan rekonstruera sinus och cosinus från exponentialfunktionen på följande vis:

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \quad \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}).$$

Exponentialfunktionen e^{it} är ett exempel på en komplexvärd funktion. Allmänt kan en funktion f , som antar komplexa värden och är definierad på någon delmängd av \mathbf{R} , skrivas på formen

$$f = u + iv,$$

där u och v är två reella funktioner. Vi sätter helt enkelt $u(t)$ lika med realdelen och $v(t)$ lika med imaginärdelen av $f(t)$.

Definition En komplexvärd funktion f kallas *kontinuerlig* i punkten t_0 om

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |f(t) - f(t_0)| = 0.$$

En komplexvärd funktion $f = u + iv$ är kontinuerlig i en punkt t_0 om och endast om de båda reella funktionerna u och v är kontinuerliga i samma punkt. Detta följer enkelt av de elementära olikheterna

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z| \quad \text{och} \quad |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|,$$

som tillämpade på det komplexa talet $z = f(t) - f(t_0)$ ger

$$\begin{aligned} |u(t) - u(t_0)| &\leq |f(t) - f(t_0)|, & |v(t) - v(t_0)| &\leq |f(t) - f(t_0)| \quad \text{och} \\ |f(t) - f(t_0)| &\leq |u(t) - u(t_0)| + |v(t) - v(t_0)|. \end{aligned}$$

Definition En komplexvärd funktion $f = u + iv$ kallas

- *deriverbar* i punkten t med *derivata* $f'(t) = u'(t) + iv'(t)$, om u och v båda är deriverbara i punkten t ,
- *integrerbar* över ett intervall $I = [a, b]$ med *integral*

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

om de båda integralerna i högerledet existerar.

I fortsättningen skriver vi ofta $\int_I f(t) dt$ istället för $\int_a^b f(t) dt$. På motsvarande sätt betecknar $\int_{\mathbf{R}} f(t) dt$ den generaliserade integralen $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$.

EXEMPEL 2.1.1 Låt oss som ett enkelt exempel beräkna derivatan av exponentialfunktionen $e^{iat} = \cos at + i \sin at$. Definitionen ger oss

$$\frac{d}{dt}(e^{iat}) = -a \sin at + ia \cos at = ia(\cos at + i \sin at) = iae^{iat}.$$

Den komplexa exponentialfunktionen uppför sig således precis som den reella med avseende på derivering. \square

Läsaren bör som enkel övning verifiera att följande linearitetsregler gäller:

$$\begin{aligned} \int_a^b (f_1(t) + f_2(t)) dt &= \int_a^b f_1(t) dt + \int_a^b f_2(t) dt \\ \int_a^b cf(t) dt &= c \int_a^b f(t) dt, \quad \text{där } c \text{ är ett godtyckligt komplext tal.} \end{aligned}$$

Man verifierar vidare lätt att om f är en kontinuerlig komplexvärd funktion med primitiv funktion F (dvs. $F'(t) = f(t)$ för alla t i intervallet $[a, b]$), så är

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

EXEMPEL 2.1.2 För $\alpha \neq 0$ är $(i\alpha)^{-1}e^{i\alpha t}$ en primitiv funktion till exponentialfunktionen $e^{i\alpha t}$. Det följer att

$$\int_a^b e^{i\alpha t} dt = \frac{e^{i\alpha b} - e^{i\alpha a}}{i\alpha}$$

om $\alpha \neq 0$.

Genom att speciellt låta $\alpha = n$ vara ett heltal och välja $b = a + 2\pi$, samt utnyttja att $e^{in(a+2\pi)} = e^{ina} \cdot e^{i2\pi n} = e^{ina}$, erhåller vi följande mycket viktiga formler:

$$\int_a^{a+2\pi} e^{int} dt = \begin{cases} 2\pi, & \text{om } n = 0 \\ 0, & \text{om } n \neq 0. \end{cases}$$

Integralen av e^{int} över ett godtyckligt intervall av längd 2π är med andra ord lika med 0 för alla nollskilda heltal n . \square

Följande olikhet generaliserar triangelolikheten och kommer att utnyttjas många gånger i fortsättningen.

Sats 2.1.1 (Triangelolikheten för integraler) *För alla integrerbara funktioner f är*

$$\left| \int_I f(t) dt \right| \leq \int_I |f(t)| dt.$$

Bevis. Skriv det komplexa talet $\int_I f(t) dt$ på polär form som $Re^{i\theta}$, där $R = \left| \int_I f(t) dt \right|$ är absolutbeloppet av talet och θ är argumentet. Då är

$$R = e^{-i\theta} \int_I f(t) dt = \int_I e^{-i\theta} f(t) dt.$$

Talet $R = \int_I e^{-i\theta} f(t) dt$ är reellt och är därför lika med sin realdel. Det följer att

$$R = \operatorname{Re} \int_I e^{-i\theta} f(t) dt = \int_I \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(t)) dt \leq \int_I |e^{-i\theta} f(t)| dt = \int_I |f(t)| dt.$$

Den andra likheten gäller på grund av sättet att definiera integralen av komplexvärda funktioner, och olikheten beror på att $\operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(t)) \leq |e^{-i\theta} f(t)|$ för alla t . \square

2.2 Rummet L^1

Definition Med rummet $L^1(\mathbf{R})$ menas mängden av alla komplexvärda (Lebesgue-mätbara) funktioner f , som är definierade på \mathbf{R} och uppfyller

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbf{R}} |f(t)| dt < \infty.$$

Det skulle föra för långt att försöka specificera vad "Lebesgue-mätbar" betyder; för våra behov räcker det att veta att alla styckvis kontinuerliga funktioner är mätbara.

EXEMPEL 2.2.1 Funktionen $f(t) = \frac{e^{it}}{1+t^2}$ tillhör $L^1(\mathbf{R})$ eftersom

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbf{R}} \frac{dt}{1+t^2} = \pi < \infty.$$

Funktionen $g(t)$, definierad som $t^{-1/2}$ för $0 < t < 1$, och 0 för alla övriga värden på t , tillhör också $L^1(\mathbf{R})$, eftersom $\|g\|_1 = \int_0^1 t^{-1/2} dt = 2$. \square

$\|\cdot\|_1$ kallas för L^1 -normen. Vi kommer ofta att utnyttja triangelolikheten

$$\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$$

som följer genom att integrera motsvarande triangelolikhet $|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$ för komplexa tal.

När ska två L^1 -funktioner f och g anses ligga nära varandra? Kom ihåg att om f och g är reellvärda, så mäter integralen $\int_{\mathbf{R}} |f(t) - g(t)| dt$ arean av området mellan de båda funktionernas grafer. Det låter rimligt att säga att funktionerna ligger nära varandra ifall denna area är liten. Vi generaliserar nu detta för allmänna komplexvärda L^1 -funktioner genom att använda

$$\|f - g\|_1 = \int_{\mathbf{R}} |f(t) - g(t)| dt$$

som ett mått på avståndet mellan två sådana funktioner. Speciellt mäter alltså $\|f\|_1$ ($= \|f - 0\|_1$) avståndet mellan funktionen f och nollfunktionen.

Integralen av en funktion påverkas inte om vi ändrar funktionens värden i enstaka punkter. Om $f(t) = g(t)$ för alla utom ändligt många värden på t är således $\int_{\mathbf{R}} f(t) dt = \int_{\mathbf{R}} g(t) dt$ och $\|f - g\|_1 = 0$. I denna situation förefaller det rimligt att betrakta de båda funktionerna såsom lika.

Mera generellt gäller att f och g har samma integraler ifall de båda funktionerna är lika utanför en så kallad nollmängd.

Definition En delmängd E av reella axeln kallas en *nollmängd*, om det för varje $\epsilon > 0$ är möjligt att täcka över mängden E med en union av (oändligt många) intervall vars totala längd är mindre än ϵ .

EXEMPEL 2.2.2 Mängden \mathbf{Q} av alla rationella tal utgör en nollmängd, ty vi kan räkna upp de rationella talen r_1, r_2, r_3, \dots , och sedan för varje n bilda intervallet

$$I_n =]r_n - 2^{-(n+1)}\epsilon, r_n + 2^{-(n+1)}\epsilon[$$

som har talet r_n som mittpunkt och längd $2^{-n}\epsilon$. Unionen av alla dessa intervall täcker uppenbarligen över \mathbf{Q} , och den totala längden av alla intervallen är $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\epsilon = \epsilon$. \square

Om t_0 är en punkt där funktionen f är kontinuerlig och $f(t_0) \neq 0$, så är nödvändigtvis $\|f\|_1 > 0$, ty på grund av kontinuiteten finns det ett intervall $[a, b]$ kring t_0 , där $|f(t)| > |f(t_0)|/2$, varav följer att

$$\int_{\mathbf{R}} |f(t)| dt \geq \int_a^b |f(t)| dt \geq (b-a)|f(t_0)|/2 > 0.$$

Om t_0 är en kontinuitetspunkt och $\|f\|_1 = 0$, så vet vi alltså att $f(t_0) = 0$. Genom att tillämpa denna information på differensen $f - g$ mellan två L^1 -funktioner drar vi slutsatsen: *Om funktionerna f och g båda är kontinuerliga i punkten t_0 och $\|f - g\|_1 = 0$, så är $f(t_0) = g(t_0)$.*

Låt nu I vara ett godtyckligt intervall, och låt f vara en komplexvärd funktion som är definierad på intervallet. Vi kan utvidga f till en funktion F som är definierad på hela \mathbf{R} på ett triviale sätt genom att definiera

$$F(t) = \begin{cases} f(t) & \text{för } t \in I \\ 0 & \text{för } t \notin I. \end{cases}$$

Vi får då

$$\int_I f(t) dt = \int_{\mathbf{R}} F(t) dt.$$

Vi säger att f tillhör rummet $L^1(I)$ om och endast om den utvidgade funktionen F tillhör $L^1(\mathbf{R})$. Om så är fallet, sätter vi vidare $\|f\|_1 = \|F\|_1$.

När man talar om $\|\cdot\|_1$ -normen, måste man förstås vara medveten om vilket underliggande intervall I som avses, men detta intervall kommer alltid att framgå av sammanhanget.

Vid sidan om $\|\cdot\|_1$ -normen kommer vi också att använda den s. k. *oändlighetsnormen* $\|\cdot\|_\infty$. Låt I vara ett givet intervall och betrakta en begränsad komplexvärd funktion f på I . (Begränsad betyder att den icke-negativa reellvärda funktionen $|f|$ är begränsad.) Vi sätter

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|.$$

Uppenbarligen gäller då olikheten $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, och vidare är $\|f\|_\infty = 0$ om och endast om f är identiskt lika med noll på ifrågavarande intervall I .

Om $I = [a, b]$ är ett begränsat intervall och om funktionen f är begränsad på I , så är

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt \leq \int_a^b \|f\|_\infty dt = (b-a)\|f\|_\infty.$$

En L^1 -funktion kan ha olika slags diskontinuiteter, men den kan alltid approximeras godtyckligt väl av regelbundna funktioner.

Sats 2.2.1 Låt $f \in L^1(\mathbf{R})$ och $\epsilon > 0$ vara givna. Då finns det en kontinuerligt deriverbar funktion g som är identiskt 0 utanför något begränsat intervall och som uppfyller $\|f - g\|_1 < \epsilon$.

Bevis. Eftersom vi inte har givit en precis definition av begreppet mätbarhet kan vi inte ge ett rigoröst bevis, men följande skiss innehåller alla väsentliga ingredienser i ett sådant bevis.

Först kan vi, eftersom $\int_{\mathbf{R}} |f(t)| dt < \infty$, hitta ett positivt tal A så att

$$\int_{|t|>A} |f(t)| dt < \epsilon/3.$$

På det begränsade intervallet $[-A, A]$ kan vi sedan approximera funktionen f med en trappstegsfunktion h (en funktion som är sträckvis konstant) som uppfyller olikheten

$$\int_{-A}^A |f(t) - h(t)| dt < \epsilon/3.$$

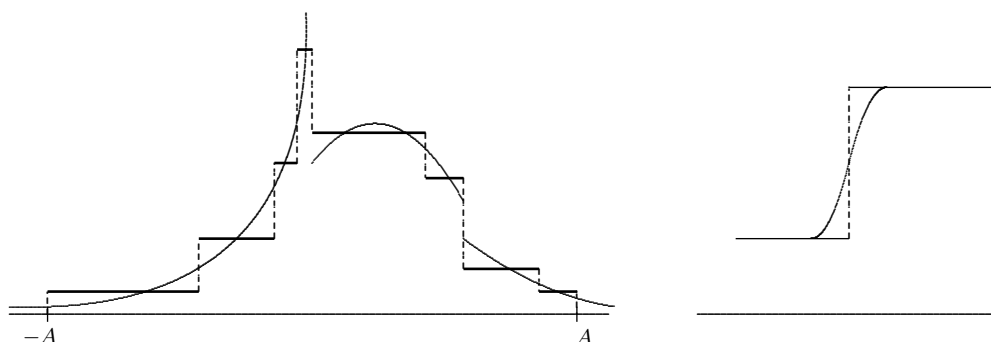
Se figur 2.1. Utvidga definitionsområdet för h till hela \mathbf{R} genom att sätta $h(t) = 0$ utanför intervallet $[-A, A]$; då är

$$\|f - h\|_1 = \int_{-A}^A |f(t) - h(t)| dt + \int_{|t|>A} |f(t)| dt < 2\epsilon/3.$$

Det sista steget består i att approximera trappstegsfunktionen h med en kontinuerligt deriverbar funktion g genom att runda av hörnen på trappstegsfunktionen såsom i figuren. Man ser lätt att detta kan göras på ett sådant sätt att $\|h - g\|_1 < \epsilon/3$. Triangelolikheten ger nu

$$\|f - g\|_1 = \|(f - h) + (h - g)\|_1 \leq \|f - h\|_1 + \|h - g\|_1 \leq 2\epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon.$$

□



Figur 2.1. Först approximeras L^1 -funktionen med en trappstegsfunktion. Sedan approximeras denna med en kontinuerligt deriverbar funktion.

Sats 2.2.2 (Riemann-Lebesgues lemma) Låt I vara ett godtyckligt intervall och antag att $f \in L^1(I)$. Då är

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \int_I f(t) e^{-i\lambda t} dt = 0.$$

Bevis. Vi kan utan inskränkning antaga att $I = \mathbf{R}$. (Om $I \neq \mathbf{R}$ utvidgar vi definitionsområdet till hela \mathbf{R} genom att sätta $f(t) = 0$ utanför intervallet I .)

Antag nu först att funktionen f är kontinuerligt deriverbar och lika med noll utanför något begränsat intervall $[A, B]$. Genom partiell integration får vi då

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\lambda t} dt &= \int_A^B f(t) e^{-i\lambda t} dt = \left[f(t) \frac{e^{-i\lambda t}}{-i\lambda} \right]_A^B + \frac{1}{i\lambda} \int_A^B f'(t) e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{i\lambda} \int_A^B f'(t) e^{-i\lambda t} dt, \end{aligned}$$

eftersom $f(A) = f(B) = 0$. Genom att utnyttja triangelolikheten för integraler får vi därför

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right| &\leq \frac{1}{|\lambda|} \int_A^B |f'(t) e^{-i\lambda t}| dt = \frac{1}{|\lambda|} \int_A^B |f'(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|} (B - A) \|f'\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Högerledet i ovanstående olikhet går mot 0 då $\lambda \rightarrow \pm\infty$.

Antag härnäst att f är en godtycklig L^1 -funktion. Givet $\epsilon > 0$ har vi att visa att det finns ett reellt tal ω så att $\left| \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right| < \epsilon$ gäller för $|\lambda| > \omega$. För att uppnå detta väljer vi först en kontinuerligt deriverbar funktion g som är noll utanför något begränsat intervall och som uppfyller olikheten $\|f - g\|_1 < \epsilon/2$. Med hjälp av triangelolikheten får vi sedan

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right| &= \left| \int_{\mathbf{R}} (f(t) - g(t)) e^{-i\lambda t} dt + \int_{\mathbf{R}} g(t) e^{-i\lambda t} dt \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbf{R}} (f(t) - g(t)) e^{-i\lambda t} dt \right| + \left| \int_{\mathbf{R}} g(t) e^{-i\lambda t} dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbf{R}} |f(t) - g(t)| dt + \left| \int_{\mathbf{R}} g(t) e^{-i\lambda t} dt \right| \\ &= \int_{\mathbf{R}} |f(t) - g(t)| dt + \left| \int_{\mathbf{R}} g(t) e^{-i\lambda t} dt \right| \\ &= \|f - g\|_1 + \left| \int_{\mathbf{R}} g(t) e^{-i\lambda t} dt \right| < \epsilon/2 + \left| \int_{\mathbf{R}} g(t) e^{-i\lambda t} dt \right|. \end{aligned}$$

Enligt bevisets första del går den sista integralen mot noll då $\lambda \rightarrow \pm\infty$. Vi kan därför hitta ett ω så att

$$\left| \int_{\mathbf{R}} g(t) e^{-i\lambda t} dt \right| < \epsilon/2$$

för $|\lambda| > \omega$. Av olikheterna ovan följer därför att $\left| \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right| < \epsilon$ gäller för alla $|\lambda| > \omega$. \square

Anmärkning. Eftersom $\sin \lambda t = \frac{1}{2i}(e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t})$, följer det med en gång ur Riemann-Lebesgues lemma att

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I f(t) \sin \lambda t dt = 0.$$

Motsvarande gäller förstås också när sinus ersätts med cosinus.

2.3 Serier

Definition En följd $(c_n)_1^\infty$ av komplexa tal kallas *konvergent* om det finns ett komplext tal c så att $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n - c| = 0$. Talet c kallas i så fall för följdens *gränsvärde* och betecknas $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.

Gränsvärdesdefinitionen för komplexa följder är därmed reducerad till definitionen av gränsvärdet av en (icke-negativ) reell följd.

Genom att utnyttja de olikheter som råder mellan ett komplext tals real- resp imaginärdel och belopp erhåller man vidare lätt följande resultat:

Om $c_n = a_n + ib_n$, så konvergerar den komplexa följden mot gränsvärdet $c = a + ib$ om och endast om de båda reella följderna $(a_n)_1^\infty$ och $(b_n)_1^\infty$ konvergerar mot a och b , respektive.

Därigenom har vi fullständigt reducerat problemet att bestämma gränsvärdet av komplexa följder till motsvarande problem för reella följder.

En nackdel med gränsvärdesdefinitionen är att vi för att avgöra om en följd är konvergent behöver referera till det eventuella gränsvärdet. Följande sats visar att man kan avgöra följdens konvergens genom att enbart studera följdens termer.

Sats 2.3.1 (Cauchys konvergensprincip) En komplex talföljd $(c_n)_{n=1}^\infty$ är konvergent om och endast om följande villkor är uppfyllt:

(*) För varje $\epsilon > 0$ finns det ett tal N så att olikheten $|c_m - c_n| < \epsilon$ gäller för alla $n \geq m \geq N$.

En följd som uppfyller villkoret (*) kallas en *Cauchyföljd*.

Bevis. Beviset för den ena riktningen, nämligen att villkoret (*) är uppfyllt om följderna är konvergent, är enkelt. Antag nämligen att följderna har ett gränsvärde c . Då är per definition $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n - c| = 0$, dvs. givet ϵ finns det ett tal N så att $|c_n - c| < \epsilon/2$ gäller för alla $n \geq N$. Om både $m \geq N$ och $n \geq N$, så gäller därför på grund av triangelolikheten att

$$|c_m - c_n| = |(c_m - c) + (c - c_n)| \leq |c_m - c| + |c - c_n| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Beviset för omvändningen, dvs. att varje Cauchyföljd är konvergent, är mer komplicerat, och vi delar upp det i ett antal steg.

1. Först noterar vi att det räcker att visa omvändningen för **reella** följder, ty realdelen av en Cauchyföljd $(c_n)_1^\infty$, där $c_n = a_n + ib_n$, är också en Cauchyföljd på grund av olikheten $|a_m - a_n| \leq |c_m - c_n|$, och motsvarande gäller förstås också för imaginärdelen, och följderna $(c_n)_1^\infty$ konvergerar om de båda följderna $(a_n)_1^\infty$ och $(b_n)_1^\infty$ konvergerar.

2. Härnäst konstaterar vi att varje Cauchyföljd är begränsad. Välj nämligen det tal N i (*) som svarar mot $\epsilon = 1$; då är speciellt $|c_n - c_N| < 1$ för alla $n \geq N$, så det följer av triangelolikheten att $|c_n| = |c_n - c_N + c_N| \leq |c_n - c_N| + |c_N| < 1 + |c_N|$ för $n \geq N$. Därför gäller att $|c_n| \leq C$ för alla n , om vi som C väljer det största av talen $|c_1|, \dots, |c_{N-1}|$ och $1 + |c_N|$.

3. Vi behöver vidare följande hjälpsats, som har ett visst egenintresse:

Lemma Varje reell talföljd $(a_n)_1^\infty$ innehåller en monoton delföljd, dvs. det finns en strikt växande följd $(n_k)_{k=1}^\infty$ av positiva heltal så att följderna $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ antingen är växande eller avtagande.

(Lemmat har följande pittoreska tolkning: Ställ upp ett oändligt antal soldater på led. Då är det alltid möjligt att genom att låta ett lämpligt antal soldater stiga åt sidan erhålla ett resterande oändligt led av soldater som är ordnade efter växande eller avtagande längd.)

Bevis för lemmat. Sätt $A_n = \{a_k : k \geq n\}$; vi har då två alternativ: Antingen innehåller mängden A_n för varje $n \geq 1$ ett största element, eller också finns det något n så att A_n inte innehåller ett största element.

I det förstnämnda fallet låter vi n_1 vara det index för vilket a_{n_1} är det största elementet i A_1 . (Om det finns flera element som är lika stora låter vi n_1 vara det minsta indexet för sådana element för att få ett entydigt val.) Alla element a_n i mängden A_{n_1+1} , dvs. alla a_n med $n > n_1$ är nu $\leq a_{n_1}$. Vi väljer nu $n_2 > n_1$ så att elementet a_{n_2} är störst i A_{n_1+1} , och konstaterar att $a_{n_1} \geq a_{n_2}$. Elementet a_{n_2} är större än eller lika med alla element i A_{n_2+1} , och vi kan fortsätta med att hitta ett $n_3 > n_2$ så att a_{n_3} är störst bland alla element i A_{n_2+1} . På grund av vårt antagande tar processen aldrig slut, så

med hjälp av induktion får vi en följd $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ med egenskapen att $a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq a_{n_3} \geq \dots$, dvs. den givna följdens innehåller en avtagande delföljd.

I det andra fallet låter vi n_1 vara det första talet n för vilket A_n inte innehåller något största element. Speciellt är alltså inte a_{n_1} störst i mängden A_{n_1} så därför finns det ett första index $n_2 > n_1$ så att $a_{n_2} > a_{n_1}$. Eftersom inte heller talet a_{n_2} är störst finns det ett första index $n_3 > n_2$ så att $a_{n_3} > a_{n_2}$, osv. Resultatet blir denna gång en (strängt) växande delföljd $a_{n_1} < a_{n_2} < a_{n_3} < \dots$. Därmed är lemmat bevisat.

4. Låt nu $(a_n)_1^\infty$ vara en reell Cauchyföljd och välj med hjälp av steg 3 ut en monoton delföljd $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$. På grund av steg 2 är delföljden säkert begränsad, så det följer att gränsvärdet $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ existerar. (Varje monoton begränsad talföljd har ett gränsvärde!)

Vi ska nu med hjälp av gränsvärdesdefinitionen visa att a också är gränsvärde till den ursprungliga följdens. Antag därför att $\epsilon > 0$, och utnyttja först definitionen av Cauchyföljd för att hitta N så att $|a_n - a_m| < \epsilon/2$ för alla $m, n \geq N$. Av gränsvärdesdefinitionen följer speciellt att det finns ett index k så att $n_k \geq N$ och $|a_{n_k} - a| < \epsilon/2$. För alla $n \geq N$ får vi nu på grund av triangelolikheten:

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

vilket visar att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. \square

EXEMPEL 2.3.1 För komplexa tal z är $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$ om $|z| < 1$, medan gränsvärdet inte existerar om $|z| \geq 1$ och $z \neq 1$.

För $|z| < 1$ gäller nämligen att $|z^n - 0| = |z|^n \rightarrow 0$, eftersom vi vet att $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ gäller för reella tal r med $0 \leq r < 1$.

Om däremot $|z| \geq 1$, så är $|z^n - z^{n+1}| = |z|^n |1 - z| \geq |1 - z|$. Villkoret (*) i Cauchys konvergensprincip kan därför inte vara uppfyllt för något N om $\epsilon < |1 - z|$, och det följer därför av Cauchys konvergensprincip att följdens $(z^n)_{n=1}^\infty$ inte har något gränsvärde, såvida inte $z = 1$. \square

Definition Låt $(c_n)_{n=1}^\infty$ vara en följd av komplexa tal. Med *serien*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

menas följdens $(S_n)_{n=1}^\infty$ bestående av de ändliga *partialsummorna*

$$S_n = \sum_{k=1}^n c_k.$$

Serien S säges *konvergera* eller vara *konvergent* om följderna av partialsummor är konvergent. Om så är fallet kallas gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ för seriens *summa*, och summan betecknas också den med S . En icke-konvergent serie kallas *divergent*.

Observera alltså att symbolen $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ används i två betydelser – dels för att beteckna en följd (följden av partialsummor), dels för att beteckna ett gränsvärde (gränsvärdet av partialsummorna). Detta kan vara förvirrande i början men är praktiskt.

EXEMPEL 2.3.2 Serien $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, där z är ett komplext tal, kallas en *geometrisk serie*. Den geometriska serien är konvergent om och endast om $|z| < 1$, i vilket fall

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Vi kan nämligen beräkna partialsummorna exakt och får för $z \neq 1$ att

$$S_n = \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Slutsatsen om konvergens och summa följer nu direkt av exempel 2.3.1. (Fallet $z = 1$ är förstås trivialt.) \square

Genom att dela upp termerna c_n i en komplex serie i sina real- och imaginärdelar, $c_n = a_n + ib_n$, får vi en motsvarande uppdelning av serien i två reella serier:

$$(2.3.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Här är den komplexa serien $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent om och endast om de båda reella serierna $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergenta, i vilket fall (2.3.1) också gäller för seriernas summor. Att så är fallet följer omedelbart av motsvarande resultat för följder.

Därigenom har vi förstås i princip reducerat alla problem för komplexa serier till problem för reella serier. Emellertid är det oftast enklast att gå direkt på den komplexa serien. Vi fortsätter därför med att formulera ett antal definitioner och resultat för komplexa serier. Följande konvergensprincip följer direkt ur Cauchys konvergensprincip för följder.

Sats 2.3.2 (Cauchys konvergensprincip för serier) *Serien $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ är konvergent om och endast om följande villkor är uppfyllt:*

- (*) *För varje $\epsilon > 0$ finns det ett tal N så att $|\sum_{k=m}^n c_k| < \epsilon$ gäller för alla $n \geq m \geq N$.*

Bevis. Detta är ingenting annat än Cauchys konvergensprincip för följder (sats 2.3.1) tillämpad på följden $(S_n)_{n=1}^\infty$ av partialsummor $S_n = \sum_{k=1}^n c_k$. För denna följd är nämligen $|S_n - S_{m-1}| = |\sum_{k=m}^n c_k|$. \square

Korollarium 2.3.3 Om serien $\sum_{n=1}^\infty c_n$ konvergerar, så är $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$.

Bevis. Detta följer omedelbart av den lätta riktningen av Cauchys konvergensprincip, ty genom att speciellt välja $n = m$ i villkoret (*) ser vi att det givet $\epsilon > 0$ finns ett N så att $n \geq N$ medför att $|c_n| = |\sum_{k=n}^n c_k| < \epsilon$. \square

Definition En komplex serie $\sum_{n=1}^\infty c_n$ kallas *absolutkonvergent* om den positiva reella serien $\sum_{n=1}^\infty |c_n|$ är konvergent.

Sats 2.3.4 Varje absolutkonvergent serie är konvergent.

Bevis. Antag att serien $\sum_{n=1}^\infty c_n$ är absolutkonvergent. Vi ska visa att villkoret (*) i Cauchys konvergensprincip är uppfyllt. Låt därför $\epsilon > 0$ vara givet; Cauchys konvergensprincip tillämpad på den konvergenta serien $\sum_{n=1}^\infty |c_n|$ ger oss ett N så att olikheten $\sum_{k=m}^n |c_k| < \epsilon$ gäller för alla $n \geq m \geq N$. På grund av triangelolikheten

$$|\sum_{k=m}^n c_k| \leq \sum_{k=m}^n |c_k|$$

gäller därför också $|\sum_{k=m}^n c_k| < \epsilon$ för alla $n \geq m \geq N$. Men detta innebär enligt Cauchys konvergensprincip att serien $\sum_{n=1}^\infty c_n$ är konvergent. \square

EXEMPEL 2.3.3 Om $\sum_{n=1}^\infty r_n$ är en konvergent serie med positiva termer r_n , så är serien $\sum_{n=1}^\infty r_n e^{int}$ absolutkonvergent för alla t , eftersom $|r_n e^{int}| = r_n$. \square

För att framgångsrikt kunna tillämpa sats 2.3.4 behöver man veta när en positiv serie är konvergent. Vi övergår därför nu till att repetera ett antal resultat för positiva serier.

Definition Med en *positiv serie* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ menas en serie vars alla termer a_n är icke-negativa reella tal.

I en positiv serie bildar partialsummorna $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ en växande följd beroende på att $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0$. För en växande följd finns bara två alternativ; antingen är den uppåt begränsad och då är följden konvergent, eller också är den inte uppåt begränsad och då har följden det oegentliga gränsvärdet $+\infty$. Vi har med andra ord följande resultat:

Sats 2.3.5 En positiv serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent om och endast om det finns en konstant M så att $\sum_{k=1}^n a_k \leq M$ gäller för alla n .

Detta leder omedelbart till följande kriterium för konvergens.

Sats 2.3.6 (Jämförelsekriteriet) Låt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vara två positiva serier och antag att det finns en positiv konstant M så att $a_n \leq Mb_n$ för alla n . Då är serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ifall den ”större” serien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergent.

Bevis. Antag att serien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergent och beteckna summan med B . Då är

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq M \sum_{k=1}^n b_k \leq M \sum_{k=1}^{\infty} b_k = MB$$

för alla n , dvs. partialsummorna till serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är uppåt begränsade (av talet MB). Serien är därför konvergent. \square

Låt r vara ett positivt tal < 1 . Eftersom den geometriska serien $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ är konvergent, är varje positiv serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, vars termer för någon konstant M uppfyller olikheten $a_n \leq Mr^n$ för alla n , också konvergent enligt jämförelsekriteriet. Denna observation leder till följande två användbara konvergenskriterier.

Sats 2.3.7 Låt $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ vara en godtycklig komplex serie, och antag att

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad \text{eller} \quad K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$$

existerar. Då är serien

- (a) absolutkonvergent om $R < 1$ och divergent om $R > 1$ (rotkriteriet);
- (b) absolutkonvergent om $K < 1$ och divergent om $K > 1$ (kvotkriteriet).

Anmärkning. Man kan visa att gränsvärdet R säkert existerar om gränsvärdet K existerar och att då $R = K$, medan R kan existera även om K inte gör det. Rotkriteriet är därför ett starkare kriterium än kvotkriteriet.

Bevis. Antag att gränsvärdet R existerar och att $R < 1$. Välj ett tal r så att $R < r < 1$. På grund av gränsvärdesdefinitionen finns det då ett tal N så att $\sqrt[n]{|c_n|} < r$ gäller för alla $n \geq N$. För sådana n är därför $|c_n| < r^n$. Naturligtvis kan vi nu välja konstanten $M \geq 1$ så att olikheterna $|c_n| < Mr^n$ gäller för de ändligt många talen $n = 1, 2, \dots, N-1$. För alla n blir då $|c_n| < Mr^n$. På grund av jämförelsekriteriet är därför serien $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ konvergent, dvs. serien $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ är absolutkonvergent.

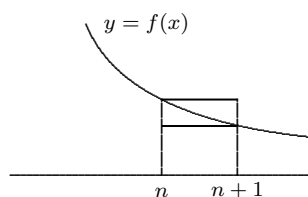
Om däremot $R > 1$, så är $\sqrt[n]{|c_n|} > 1$ för alla tillräckligt stora n , dvs. $|c_n| > 1$ för alla tillräckligt stora n . Serien $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ kan därför inte vara konvergent eftersom termerna inte går mot 0.

Beviset för kvotkriteriet är analogt och lämnas som övning till läsaren. \square

Sats 2.3.8 (Integralkriteriet) Låt f vara en positiv, avtagande funktion definierad på intervallet $[1, \infty[$. Då är serien $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent om och endast om den generaliserade integralen $\int_1^{\infty} f(x) dx$ är konvergent.

Bevis. Genom att jämföra integralen av funktionen över intervallet $[n, n+1]$ med en rektangel med $[n, n+1]$ som bas och $f(n)$ resp. $f(n+1)$ som höjd (se figur 2.2) får man olikheterna

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n).$$



Figur 2.2.

Eftersom

$$\sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} f(x) dx = \int_1^{N+1} f(x) dx,$$

blir $\sum_{n=1}^{\infty} (\int_n^{n+1} f(x) dx)$ lika med värdet av den generaliserade integralen $\int_1^{\infty} f(x) dx$. Jämförelsekriteriet och den vänstra olikheten ovan visar därför att serien $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ (som är lika med $f(1) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n+1)$) är konvergent ifall den generaliserade integralen är konvergent, och den högra olikheten ger att den generaliserade integralen är konvergent ifall serien $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergerar. \square

Integralkriteriet tillämpat på funktionen $x^{-\alpha}$ ger nästa sats.

Sats 2.3.9 Serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ är konvergent om och endast om $\alpha > 1$.

EXEMPEL 2.3.4 Som ett specialfall av exempel 2.3.3 får vi alltså att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{int}$$

är absolutkonvergent för alla t . □

Däremot kan vi inte dra någon sådan omedelbar slutsats om konvergensen för serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{int}$; den är inte absolutkonvergent eftersom serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent, men är den konvergent för något värde på t ? För att kunna avgöra frågan behöver vi ett nytt resultat.

Sats 2.3.10 Låt $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av komplexa tal och låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en avtagande följd av positiva tal. Då är serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ konvergent om ettdera av följande två villkor är uppfyllt:

- (a) Dirichlets kriterium: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ och det finns en konstant M så att $|\sum_{k=1}^n c_k| \leq M$ för alla n .
 (b) Abels kriterium: Serien $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ är konvergent.

Bevis. Vi börjar med att skriva om summan $\sum_{k=m}^n a_k c_k$ på ett sätt som är en direkt motsvarighet till partiell integration för integraler. Sätt

$$S_{k,m} = \begin{cases} \sum_{j=m}^k c_j & \text{för } k \geq m \\ 0 & \text{för } k = m-1. \end{cases}$$

Då blir $c_k = S_{k,m} - S_{k-1,m}$ för alla $k \geq m$, och vi kan därför göra omskrivningen

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n a_k c_k &= \sum_{k=m}^n a_k (S_{k,m} - S_{k-1,m}) = \sum_{k=m}^n a_k S_{k,m} - \sum_{k=m}^n a_k S_{k-1,m} \\ &= \sum_{k=m}^n a_k S_{k,m} - \sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1} S_{k,m} \\ &= a_n S_{n,m} + \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_{k,m}. \end{aligned}$$

Antag nu att $|S_{k,m}| \leq C$ för $k \geq m$ och applicera triangelolikheten på sum-

man ovan vilket ger olikheten

$$\begin{aligned}
 (2.3.2) \quad \left| \sum_{k=m}^n a_k c_k \right| &\leq |a_n S_{n,m}| + \sum_{k=m}^{n-1} |(a_k - a_{k+1}) S_{k,m}| \\
 &= a_n |S_{n,m}| + \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) |S_{k,m}| \\
 &\leq a_n C + \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) C = a_m C.
 \end{aligned}$$

I fallet (a) är $|S_{k,m}| = \left| \sum_{j=1}^k c_j - \sum_{j=1}^{m-1} c_j \right| \leq \left| \sum_{j=1}^k c_j \right| + \left| \sum_{j=1}^{m-1} c_j \right| \leq M + M = 2M$, så olikheten (2.3.2) gäller med $C = 2M$. Eftersom vidare $a_m \rightarrow 0$ då $m \rightarrow \infty$, finns det givet $\epsilon > 0$ ett N så att olikheten $2a_m M < \epsilon$ gäller för alla $m \geq N$. För $n \geq m \geq N$ är därför

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k c_k \right| < \epsilon,$$

så serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ konvergerar på grund av Cauchys konvergensprincip.

I fallet (b) finns det istället på grund av Cauchys konvergensprincip tillämpad på serien $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ett tal N med egenskapen att $|S_{n,m}| < \epsilon$ för alla $n \geq m \geq N$, dvs. olikheten (2.3.2) gäller nu med $C = \epsilon$. Eftersom följderna $(a_n)_1^{\infty}$ är avtagande, följer det att

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k c_k \right| \leq a_m \epsilon \leq a_1 \epsilon.$$

Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ konvergerar därför också i detta fall enligt Cauchys konvergensprincip. \square

EXEMPEL 2.3.5 Vi ska använda sats 2.3.10 för att visa att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{int}$$

är konvergent för $0 < t < 2\pi$.

Följden $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ är uppenbarligen avtagande med gränsvärde 0, och för summorna

$$S_n = \sum_{k=1}^n e^{ikt} = e^{it} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{it})^k = e^{it} \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}}$$

gäller uppskattningen

$$|S_n| = \left| \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{it}|}.$$

Dirichlets kriterium är således uppfyllt med $M = 2(|1 - e^{it}|)^{-1}$. \square

I fortsättningen kommer vi huvudsakligen att betrakta serier av typen

$$(2.3.3) \quad \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int},$$

och med detta menar vi serien

$$(2.3.4) \quad c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_{-n} e^{-int} + c_n e^{int}).$$

Eftersom skrivsättet (2.3.3) ser snyggare ut än (2.3.4) kommer vi i allmänhet att föredra formen (2.3.3). Med konvergens hos serien (2.3.3) menar vi emellertid per definition att serien (2.3.4) är konvergent.

Genom att kombinera termerna

$$c_{-n} e^{-int} + c_n e^{int} = (c_n + c_{-n}) \cos nt + i(c_n - c_{-n}) \sin nt$$

ser vi att serien (2.3.3) ekvivalent kan skrivas som

$$(2.3.5) \quad a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

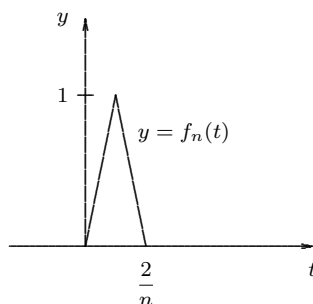
där $a_0 = c_0$, $a_n = c_n + c_{-n}$ och $b_n = i(c_n - c_{-n})$ för $n \geq 1$. Omvänt kan varje trigonometrisk serie (2.3.5) skrivas på formen (2.3.3) med $c_0 = a_0$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ och $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ för $n \geq 1$.

2.4 Likformig konvergens

EXEMPEL 2.4.1 Definiera två funktionsföljder $(f_n(t))_1^\infty$ och $(g_n(t))_1^\infty$ på följande sätt:

$$f_n(t) = \begin{cases} nt, & 0 \leq t \leq 1/n \\ 2 - nt, & 1/n \leq t \leq 2/n, \\ 0, & \text{annars} \end{cases} \quad g_n(t) = \begin{cases} n^2 t, & 0 \leq t \leq 1/n \\ 2n - n^2 t, & 1/n \leq t \leq 2/n \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Grafen till funktionen f_n är en triangel med intervallet $[0, 2/n]$ som bas och höjd 1 (se figur 2.3), medan grafen till funktionen g_n är en triangel med samma bas men höjd n .



Figur 2.3.

Observera att $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = 0$ för alla $t \in \mathbf{R}$ (ty om $t > 0$ så gäller $f_n(t) = g_n(t) = 0$ så snart $n > 2/t$, och om $t \leq 0$ så är $f_n(t) = g_n(t) = 0$ för alla n).

Betyder detta att funktionerna f_n och g_n ligger nära den konstanta funktionen $f(t) \equiv 0$ när n är stort? Svaret på denna fråga beror förstås på hur vi mäter närhet. Vi kan använda L^1 -normen, som infördes i avsnitt 1.4. Eftersom $\|f_n - f\|_1 = \|f_n\|_1 = 1/n$, och $\|g_n - f\|_1 = \|g_n\|_1 = 1$, ligger funktionerna f_n nära f i L^1 -norm för stora n , medan g_n inte är nära f för något n . \square

Anmärkning. Våra funktioner g_n visar att likheten $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$ kan gälla för alla $t \in \mathbf{R}$ utan att för den skull $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0$.

Omvänt medför inte $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ att följderna $f_n(t)$ konvergerar mot $f(t)$ för något t . Ett exempel på detta ges av funktionerna h_m , som vi definierar för $m = 1, 2, \dots$ på följande vis:

Skriv talet m på formen $m = 2^n + k$, där $n \geq 0$ och $0 \leq k \leq 2^n - 1$, och sätt sedan

$$h_m(t) = \begin{cases} 1, & \text{om } k/2^n \leq t \leq (k+1)/2^n \\ 0, & \text{för alla andra } t. \end{cases}$$

För $2^n \leq m < 2^{n+1}$ är således $h_m(t)$ lika med 1 på ett delintervall I_m av $[0, 1]$ vars längd är lika med 2^{-n} , och lika med 0 för övrigt. (Rita en figur!) Det följer omedelbart att $\|h_m\|_1 \rightarrow 0$ då $m \rightarrow \infty$. Å andra sidan vandrar delintervallen I_m fram och tillbaka på intervallet $[0, 1]$ när m går mot ∞ . Gränsvärdet $\lim_{m \rightarrow \infty} h_m(t)$ kan därför inte existera för något $0 \leq t \leq 1$, eftersom $h_m(t)$ antar både värdena 0 och 1 för oändligt många m .

Ett annat kanske mer naturligt sätt att mäta närhet mellan två funktioner f och g än att använda L^1 -normen, är att mäta den maximala absoluta differensen $|f(t) - g(t)|$ mellan funktionsvärdena, där maximum tas över alla t som tillhör funktionernas definitionsområde, dvs. att använda oändlighetsnormen $\|\cdot\|_\infty$.

För funktionerna f_n , g_n och f i exempel 2.4.1 gäller $\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \sup |f_n(t)| = f_n(1/n) = 1$ och $\|g_n - f\|_\infty = \|g_n\|_\infty = \sup |g_n(t)| = g_n(1/n) = 1/n$, så varken g_n eller f_n ligger nära f .

I resten av det här avsnittet ska vi använda oss av just oändlighetsnormen för att mäta avståndet mellan funktioner. Detta leder till begreppet *likformig konvergens*, som definieras på följande sätt.

Definition En följd $(f_n)_1^\infty$ av funktioner, som är definierade på någon mängd I , säges *konvergera likformigt mot funktionen f på I* om

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)| = 0.$$

Anmärkning. Vi kommer huvudsakligen att studera likformig konvergens då I är ett intervall eller hela \mathbf{R} , men definitionen och följande satser fungerar lika bra för delmängder I av det komplexa talplanet.

Observera att om en funktionsföljd konvergerar likformigt på mängden I , så konvergerar följden också likformigt på varje delmängd J till I .

EXEMPEL 2.4.2 Sätt $f_n(t) = \cos \frac{t}{n}$ och $I = [0, 10]$. Eftersom det för varje t gäller att $\cos \frac{t}{n} \rightarrow 1$ då $n \rightarrow \infty$, sätter vi $f(t) \equiv 1$. Om n är så stort att $10/n < \pi$, så är funktionen $1 - \cos \frac{t}{n}$ växande på intervallet $[0, 10]$, och härav följer förstås att

$$|f_n(t) - f(t)| = 1 - \cos \frac{t}{n} \leq 1 - \cos \frac{10}{n}$$

för alla $t \in [0, 10]$. Följaktligen gäller det att

$$\|f_n - f\|_\infty = 1 - \cos \frac{10}{n} \rightarrow 0, \quad \text{då } n \rightarrow \infty,$$

dvs. f_n konvergerar likformigt mot f på intervallet $[0, 10]$. □

EXEMPEL 2.4.3 Betrakta samma funktioner $f_n(t) = \cos \frac{t}{n}$ som i föregående exempel men välj nu intervallet I som hela \mathbf{R} . Eftersom $f_n(n\pi) = \cos \pi = -1$, är

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbf{R}} |1 - \cos \frac{t}{n}| = 2.$$

Följden $(f_n)_1^\infty$ konvergerar således **inte** likformigt på \mathbf{R} . □

EXEMPEL 2.4.4 Sätt $f_n(t) = t^n$ och $I = [0, 1]$. Definiera funktionen f genom att sätta $f(t) = 0$ för $0 \leq t < 1$ och $f(1) = 1$. Då är $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$ för alla $t \in I$, dvs. funktionsföljden $(f_n)_1^\infty$ konvergeras punktvis mot f på intervallet I , men

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f_n(t) - f(t)| = \sup_{0 \leq t < 1} t^n = 1,$$

så funktionsföljden konvergerar inte likformigt på I . □

Definition En serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)$ konvergerar likformigt på mängden I om följden

$$s_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k(t)$$

av partialsummor konvergerar likformigt mot summan $s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)$ på mängden I .

EXEMPEL 2.4.5 Antag att $0 < a < 1$. Då konvergerar den geometriska serien $s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ likformigt på intervallet $I = [-a, a]$.

För den geometriska serien är nämligen $s_n(t) = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}$ och $s(t) = \frac{1}{1 - t}$. För $|t| \leq a$ fås därför

$$|s_n(t) - s(t)| = \left| \frac{t^{n+1}}{1 - t} \right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{1 - |t|} \leq \frac{a^{n+1}}{1 - a}.$$

Följaktligen gäller att $\|s_n - s\|_{\infty} \leq \frac{a^{n+1}}{1 - a} \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$. Serien är med andra ord likformigt konvergent på I . \square

Vi ska nu beskriva ett enkelt men viktigt tillräckligt villkor för likformig konvergens hos serier.

Sats 2.4.1 (Weierstrass majorantsats) Betrakta serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)$, där termerna är definierade på någon mängd I . Antag att det finns en följd $(M_n)_1^{\infty}$ av icke-negativa tal med följande två egenskaper:

- (i) $|a_n(t)| \leq M_n$ för $n = 1, 2, \dots$ och alla $t \in I$.
- (ii) Den positiva serien $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ är konvergent.

Då konvergerar serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)$ likformigt på I .

Bevis. Med hjälp av triangelolikheten fås uppskattningen

$$\sup_{t \in I} |s_n(t) - s(t)| = \sup_{t \in I} \left| \sum_{n+1}^{\infty} a_k(t) \right| \leq \sup_{t \in I} \sum_{n+1}^{\infty} |a_k(t)| \leq \sum_{n+1}^{\infty} M_k,$$

och högerledet $\sum_{n+1}^{\infty} M_k$ konvergerar mot 0 då $n \rightarrow \infty$. \square

EXEMPEL 2.4.6 Serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n^2}$$

är likformigt konvergent på \mathbf{R} enligt Weierstrass majorantsats, eftersom vi kan välja $M_n = 1/n^2$. \square

EXEMPEL 2.4.7 Antag att serien $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n$ är absolutkonvergent. Då är serien $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n e^{int}$ likformigt konvergent på \mathbf{R} på grund av Weierstrass majorantsats, ty $|a_n e^{int}| \leq |a_n|$ för alla $t \in \mathbf{R}$ och alla $n \in \mathbf{Z}$. \square

EXEMPEL 2.4.8 Serien $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$ är konvergent om $x > 1$. Om $a > 1$ så är serien vidare likformigt konvergent på intervallet $[a, \infty[$, eftersom $|n^{-x}| = n^{-x} \leq n^{-a}$ för $x \geq a$ och den numeriska serien $\sum n^{-a}$ konvergerar. Funktionen $\zeta(x)$ kallas för *Riemanns zetafunktion*. \square

Kontinuitet bevaras under likformig konvergens.

Sats 2.4.2 Antag att funktionerna f_n konvergerar likformigt mot f på intervallet I och att alla funktionerna f_n är kontinuerliga i punkten $t_0 \in I$. Då är gränsv funktionen f också kontinuerlig i punkten t_0 .

Bevis. På grund av den likformiga konvergensen finns det för varje $\epsilon > 0$ ett tal N så att $\|f_N - f\|_{\infty} < \epsilon/3$. Eftersom funktionen f_N är kontinuerlig i punkten t_0 , finns det vidare ett δ (som beror av N) så att $|t - t_0| < \delta$ medför att $|f_N(t) - f_N(t_0)| < \epsilon/3$. Men

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t_0)| &\leq |f(t) - f_N(t)| + |f_N(t) - f_N(t_0)| + |f_N(t_0) - f(t_0)| \\ &\leq 2\|f - f_N\|_{\infty} + |f_N(t) - f_N(t_0)| < 2\epsilon/3 + |f_N(t) - f_N(t_0)|. \end{aligned}$$

Det följer att $|f(t) - f(t_0)| < 2\epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$ för alla t som uppfyller $|t - t_0| < \delta$. Detta visar att f är kontinuerlig i punkten t_0 . \square

Det finns också en serieversion av föregående sats och den lyder som följer.

Sats 2.4.3 Antag att $s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)$ likformigt på I . Om varje term a_n är kontinuerlig i punkten $t_0 \in I$, så är också summan s kontinuerlig i t_0 .

Bevis. Tillämpa föregående sats på följderna $s_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k(t)$, och observera att varje partialsumma s_n är kontinuerlig i t_0 . \square

EXEMPEL 2.4.9 Genom att tillämpa sats 2.4.3 på exemplen 2.4.6–2.4.8 ser vi att summan $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sin nt$ är en kontinuerlig funktion på \mathbf{R} (dvs. i varje punkt $t \in \mathbf{R}$), att summan $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n e^{int}$ är en kontinuerlig 2π -periodisk funktion om serien $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n$ är absolutkonvergent, och att Riemanns zetafunktion $\zeta(x)$ är kontinuerlig för $x > 1$. \square

Likformig konvergens på ett **begränsat** intervall I medför konvergens i L^1 -norm:

Sats 2.4.4 Antag att de Riemannintegrerbara funktionerna f_n konvergerar likformigt mot funktionen f på det begränsade intervallet $I = [a, b]$. Då är f

en Riemannintegrerbar funktion på I , och

$$\int_a^b f_n(t) dt \rightarrow \int_a^b f(t) dt \quad \text{och} \quad \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0, \quad \text{då } n \rightarrow \infty.$$

Bevis. Vi utelämnar beviset för att gränsfunktionen f är Riemannintegrerbar. Att integralen konvergerar och att funktionerna konvergerar i L^1 -norm följer av uppskattningen

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \leq (b-a) \cdot \|f_n - f\|_\infty.$$

□

Serieversionen av föregående sats lyder som följer:

Sats 2.4.5 Antag att serien $s(t) = \sum_{n=1}^\infty a_n(t)$ är likformigt konvergent på det begränsade intervallet $[a, b]$ och att funktionerna a_n är integrerbara. Då är

$$\int_a^b \sum_{n=1}^\infty a_n(t) dt = \sum_{n=1}^\infty \int_a^b a_n(t) dt.$$

Bevis. Tillämpa föregående sats på följderna av partialsummor. □

EXEMPEL 2.4.10 Serien i exempel 2.4.6 kan på grund av den likformiga konvergens integreras på följande vis.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sum_1^\infty \frac{\sin nt}{n^2} dt &= \sum_1^\infty \int_0^\pi \frac{\sin nt}{n^2} dt = \sum_1^\infty \frac{1 - (-1)^n}{n^3} = 2 \sum_{n \text{ udda}} \frac{1}{n^3} \\ &= 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} - 2 \sum_{n \text{ jämn}} \frac{1}{n^3} = 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} - 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)^3} \\ &= \frac{7}{4} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} = \frac{7}{4} \zeta(3). \end{aligned}$$

□

Sats 2.4.4 har ett enkelt bevis men resultatet är inte särskilt kraftfullt eftersom likformig konvergens inte är ett nödvändigt villkor för att integralerna $\int_I f_n(t) dt$ ska konvergera mot $\int_I f(t) dt$. Betrakta de båda "triangelföljderna" f_n och g_n i exempel 2.4.1; båda dessa följder konvergerar punktvis men inte likformigt på intervallet $[0, 1]$ mot nollfunktionen. Genom direkt uträkning får vi med en gång att $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t) dt = 0 = \int_0^1 0 dt$, medan

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(t) dt = 1 \neq \int_0^1 0 dt$. Sats 2.4.4 kan inte förklara skillnaden i resultat, eftersom ingen av de båda följderna är likformigt konvergent. Satsen är inte heller direkt tillämpbar i situationer då integrationsintervallet är obegränsat.

Ett mer användbart och kraftfullt resultat är följande sats, som vi formulerar utan bevis, eftersom ett bevis skulle kräva ganska djupa kunskaper i integrationsteori.

Sats 2.4.6 (Lebesgues sats om dominerad konvergens) *Antag att $(f_n)_1^\infty$ är en följd av komplexvärda (Lebesgue-mätbara) funktioner som alla är definierade på (det begränsade eller obegränsade) intervallet I , och att*

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$$

existerar för alla $t \in I$. Antag vidare att det finns en funktion $g \in L^1(I)$ så att

$$|f_n(t)| \leq g(t) \quad \text{för alla } n \text{ och alla } t \in I.$$

Då gäller att $f \in L^1(I)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ och $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I f(t) dt$.

Som tillämpning på sats 2.4.6 ger vi ett exempel som kommer att användas när vi studerar fouriertransformen.

EXEMPEL 2.4.11 Antag att $f \in L^1(\mathbf{R})$. Då är

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \left(1 - \frac{|t|}{n}\right) f(t) dt = \int_{\mathbf{R}} f(t) dt.$$

Bevis. Sätt

$$f_n(t) = \begin{cases} (1 - |t|/n)f(t), & \text{om } |t| \leq n \\ 0, & \text{om } |t| \geq n. \end{cases}$$

Vi vill visa att $\int_{\mathbf{R}} f_n(t) dt \rightarrow \int_{\mathbf{R}} f(t) dt$. Men detta följer av sats 2.4.6, ty $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$ för alla $t \in \mathbf{R}$, $|f_n(t)| \leq |f(t)|$ för alla n och alla $t \in \mathbf{R}$, och funktionen $|f(t)|$ tillhör $L^1(\mathbf{R})$. \square

Härnäst följer ett resultat om derivering och likformig konvergens. Observera att antagandet om likformig konvergens rör följderna av derivator och inte följderna av funktioner.

Sats 2.4.7 *Låt $(f_n)_1^\infty$ vara en följd av kontinuerligt deriverbara funktioner, som är definierade på något intervall I . Antag att det för åtminstone en punkt $t_0 \in I$ gäller att följderna $(f_n(t_0))_1^\infty$ konvergerar. Antag vidare att följderna $(f'_n)_1^\infty$ av derivator är likformigt konvergent på varje slutet begränsat delintervall av I och kalla gränsvärdet g . Då gäller:*

- (a) *Det finns en funktion f så att $f_n \rightarrow f$ likformigt på varje slutet begränsat delintervall av I .*
 (b) *För varje $t \in I$ existerar derivatan $f'(t)$ och $f'(t) = g(t)$.*

Bevis. Låt c beteckna gränsvärdet för följderna $(f_n(t_0))_1^\infty$. För varje $x \in I$ är

$$f_n(x) = f_n(t_0) + \int_{t_0}^x f'_n(t) dt,$$

och eftersom $f'_n \rightarrow g$ likformigt på intervallet $[t_0, x]$ följer det nu av sats 2.4.4 att

$$f_n(x) \rightarrow c + \int_{t_0}^x g(t) dt, \quad \text{då } n \rightarrow \infty.$$

Sätt $f(x) = c + \int_{t_0}^x g(t) dt$. Vi vet då att $f_n(x) \rightarrow f(x)$ punktvis för varje $x \in I$. Funktionen g är kontinuerlig på grund av sats 2.4.2, så funktionen f är differentierbar med derivata $f'(x) = g(x)$ enligt integralkalkylens fundamentalsats.

Det återstår att bevisa att konvergensen är likformig på varje delintervall av I , och det är då naturligtvis ingen inskränkning att bara betrakta delintervall som också innehåller punkten t_0 . Låt $[a, b]$ vara ett sådant intervall och låt $x \in [a, b]$. På grund av definitionen av f är

$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &= f_n(t_0) + \int_{t_0}^x f'_n(t) dt - c - \int_{t_0}^x g(t) dt \\ &= f_n(t_0) - c + \int_{t_0}^x (f'_n(t) - g(t)) dt. \end{aligned}$$

Triangelolikheten ger därför att

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(t_0) - c| + \int_{[t_0, x]} |f'_n(t) - g(t)| dt \\ &\leq |f_n(t_0) - c| + \int_a^b |f'_n(t) - g(t)| dt \\ &\leq |f_n(t_0) - c| + (b - a) \max_{a \leq t \leq b} |f'_n(t) - g(t)|. \end{aligned}$$

Ovanstående gäller för alla $x \in [a, b]$, och högerledet i olikheten är oberoende av x och går mot 0, då $n \rightarrow \infty$. Detta innebär att $f_n \rightarrow f$ likformigt på intervallet $[a, b]$. \square

Serieversionen av sats 2.4.7 lyder som följer:

Sats 2.4.8 *Betrakta serien*

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t),$$

där termerna $a_n(t)$ är kontinuerligt deriverbara funktioner på intervallet I . Antag att serien konvergerar för åtminstone någon punkt $t_0 \in I$ och att serien av derivator

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(t)$$

är likformigt konvergent på varje slutet begränsat delintervall av I . Då är serien $s(t)$ också likformigt konvergent på varje slutet begränsat delintervall av I , och summan $s(t)$ är en deriverbar funktion med derivata

$$s'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(t).$$

Bevis. Tillämpa föregående sats på följden $s_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k(t)$ av partialsummor. \square

EXEMPEL 2.4.12 I vår heuristiska härledning i kapitel 1 av en lösning till värmeledningsekvationen föreslog vi en lösning på följande form

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx.$$

Här är

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx,$$

där $f(x) = u(x, 0)$ beskriver temperaturen i staven vid tiden $t = 0$. Vi förutsätter att begynnelsefunktionen f ligger i L^1 . Då följer att koefficienterna b_n är begränsade, dvs. det finns en konstant M så att $|b_n| \leq M$ för alla n .

I kapitel 1 kunde vi inte ge ett rigoröst bevis för att summan $u(x, t)$ faktiskt satisfierar differentialekvationen $u_{xx} = u_t$; det kan vi göra nu med hjälp av sats 2.4.8.

Observera först att serien som definierar $u(x, t)$ är absolutkonvergent för varje $t > 0$ och $x \in \mathbf{R}$, eftersom $|b_n e^{-n^2 t} \sin nx| \leq M e^{-n^2 t}$ och serien $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}$ konvergerar.

Fixera först $t > 0$ och derivera sedan seriens termer två gånger med avseende på x ; detta resulterar i serierna

$$\sum_{n=1}^{\infty} n b_n e^{-n^2 t} \cos nx \quad \text{och} \quad - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n e^{-n^2 t} \sin nx,$$

vilka, betraktade som serier i x , båda konvergerar likformigt på hela \mathbf{R} . Detta följer förstås av Weierstrass majorantsats, ty

$$|n b_n e^{-n^2 t} \cos nx| \leq M n e^{-n^2 t} \quad \text{och} \quad |n^2 b_n e^{-n^2 t} \sin nx| \leq M n^2 e^{-n^2 t},$$

och de båda serierna $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2 t}$ och $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2 t}$ är konvergenta. Det följer därför av sats 2.4.8 att funktionen $u(x, t)$ är två gånger deriverbar med avseende på x för alla $x \in \mathbf{R}$ och alla $t > 0$, och att

$$u_x(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n e^{-n^2 t} \cos nx \quad \text{och} \quad u_{xx}(x, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n e^{-n^2 t} \sin nx.$$

Nu fixerar vi istället $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$, och deriverar termerna i summan $u(x, t)$ med avseende t . Vi erhåller serien

$$(2.4.1) \quad - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n e^{-n^2 t} \sin nx,$$

som (betraktad som serie i variabeln t) är likformigt konvergent på intervallet $[a, \infty[$, eftersom

$$\sup_{t \geq a} |n^2 b_n e^{-n^2 t} \sin nx| \leq M n^2 e^{-n^2 a}$$

och serien $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2 a}$ konvergerar. Genom att åter använda sats 2.4.8 drar vi slutsatsen att den partiella derivatan $u_t(x, t)$ existerar när $t > a$, och att $u_t(x, t)$ ges av serien (2.4.1). Talet a är emellertid ett godtyckligt positivt tal, så det följer att $u_t(x, t)$ existerar och ges av serien för alla $t > 0$. Genom att jämföra de två serierna för $u_t(x, t)$ och $u_{xx}(x, t)$ ser vi att $u_{xx}(x, t) = u_t(x, t)$. \square

Weierstrass majorantsats är enkel att tillämpa, men den kan bara användas om serien är absolutkonvergent. Betingat konvergenta funktionsserier kan ibland bevisas vara likformigt konvergenta med hjälp av följande sats, som är en direkt parallell till sats 2.3.10.

Sats 2.4.9 Låt $(a_n(t))_{n=1}^{\infty}$ och $(c_n(t))_{n=1}^{\infty}$ vara två följder av funktioner som är definierade på mängden I , och antag att funktionerna $a_n(t)$ är reellvärda, begränsade och icke-negativa och att $a_1(t) \geq a_2(t) \geq a_3(t) \geq \dots$ för alla $t \in I$. Då är funktionsserien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) c_n(t)$ likformigt konvergent på I om ettdera av följande två villkor är uppfyllt:

- (a) Dirichlets kriterium: $a_n(t) \rightarrow 0$ likformigt på I då $n \rightarrow \infty$, och det finns en konstant M så att $|\sum_{k=1}^n c_k(t)| \leq M$ för alla n och alla $t \in I$.
- (b) Abels kriterium: Serien $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)$ är likformigt konvergent på I .

Bevis. Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)c_n(t)$ konvergerar för alla $t \in I$ på grund av sats 2.3.10. Beviset för denna sats visar också att i fall (a) är

$$|\sum_{k=m}^n a_k(t)c_k(t)| \leq 2Ma_m(t)$$

för alla $t \in I$ om $n \geq m$. Vi kan låta $n \rightarrow \infty$ i olikheten ovan och får då

$$|\sum_{k=m}^{\infty} a_k(t)c_k(t)| \leq 2Ma_m(t)$$

för alla $t \in I$. Eftersom $a_m(t) \rightarrow 0$ likformigt på I då $m \rightarrow \infty$, finns det givet $\epsilon > 0$ ett tal N så att $2Ma_m(t) < \epsilon$ för alla $m \geq N$ och alla $t \in I$. Det följer att

$$(2.4.2) \quad |\sum_{k=m}^{\infty} a_k(t)c_k(t)| \leq \epsilon$$

för alla $t \in I$ så snart $m \geq N$. Detta visar att konvergensen är likformig på I .

I fall (b) innebär istället olikheten (2.3.2) i beviset för sats 2.3.10 att

$$|\sum_{k=m}^n a_k(t)c_k(t)| \leq a_m(t) \cdot \sup_{n \geq m} |\sum_{k=m}^n c_k(t)|.$$

Enligt förutsättningarna i satsen finns det en konstant K så att $a_m(t) \leq a_1(t) \leq K$ för alla $t \in I$, och eftersom serien $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)$ är likformigt konvergent på I , finns det till varje $\epsilon > 0$ ett tal N så att $|\sum_{k=m}^n c_k(t)| < \epsilon/K$ för alla $t \in I$ och alla $n \geq m \geq N$. Av olikheten ovan följer därför att

$$|\sum_{k=m}^n a_k(t)c_k(t)| \leq \epsilon$$

för alla $t \in I$ och alla $n \geq m \geq N$. Vi får nu olikheten (2.4.2) genom att låta $n \rightarrow \infty$, och därmed är den likformiga konvergensens visad även i fall (b). \square

EXEMPEL 2.4.13 Serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nt$$

konvergerar likformigt på intervallet $[\delta, 2\pi - \delta]$ om $\delta > 0$. Detta följer av Dirichlets kriterium i sats 2.4.9 med $a_n(t) = \frac{1}{n}$ och $c_n(t) = \sin nt$. Den konstanta följderna $a_n(t)$ uppfyller uppenbarligen förutsättningarna i (a), och delsummorna $S_n(t) = \sum_{k=1}^n \sin kt$ är likformigt begränsade på det givna intervallet, ty olikheten (jmf exempel 2.3.5)

$$\begin{aligned} |S_n(t)| &= |\operatorname{Im} \sum_{k=1}^n e^{ikt}| \leq |\sum_{k=1}^n e^{ikt}| \leq \frac{2}{|1 - e^{it}|} \\ &\leq \frac{2}{\operatorname{Re}(1 - e^{it})} = \frac{2}{1 - \cos t} \leq \frac{2}{1 - \cos \delta} \end{aligned}$$

gäller för $\delta \leq t \leq 2\pi - \delta$. \square

EXEMPEL 2.4.14 Antag att serien $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ är konvergent. Då är serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

likformigt konvergent på intervallet $[0, 1]$. Nu är nämligen förutsättningarna (b) i sats 2.4.9 uppfyllda med $a_n(t) = t^n$ och $c_n(t) = c_n$. \square

EXEMPEL 2.4.15 (Abels sats) Antag att serien $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ är konvergent. Då är

$$\lim_{t \rightarrow 1-} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Eftersom termerna $c_n t^n$ är kontinuerliga och serien är likformigt konvergent, är nämligen funktionen $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ kontinuerlig på intervallet $[0, 1]$ enligt sats 2.4.3. Speciellt är alltså

$$\lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = f(1).$$

\square

2.5 Potensserier

En serie av typen

$$(2.5.1) \quad s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

där $(a_n)_0^{\infty}$ är en given komplex talföljd och t är en reell eller komplex variabel, kallas en *potensserie*.

Potensserier konvergerar naturligtvis alltid för $t = 0$ men behöver inte vara konvergenta för några andra värden på t . Om potensserien (2.5.1) konvergerar för $t = t_0 \neq 0$, så går termerna $a_n t_0^n$ mot 0 då $n \rightarrow \infty$, och härav följer att det finns en konstant K så att $|a_n t_0^n| \leq K$ för alla n , vilket med $r = 1/|t_0|$ betyder att

$$(2.5.2) \quad |a_n| \leq K r^n \quad \text{för alla } n.$$

Omvänt, antag att det finns två positiva konstanter K och r så att följderna $(a_n)_0^{\infty}$ uppfyller villkoret (2.5.2). Då är potensserien (2.5.1) absolutkonvergent för $|t| < 1/r$. Detta följer av jämförelsekriteriet för positiva serier, ty

$$|a_n t^n| = |a_n| |t|^n \leq K (r|t|)^n$$

och den geometriska serien $\sum_{n=0}^{\infty} K (r|t|)^n$ är konvergent om $|t| < 1/r$.

Ovanstående enkla observation leder till följande resultat.

Sats 2.5.1 Till varje potensserie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ hör ett unikt icke-negativt tal R eller oändlighetssymbol $R = +\infty$ med följande egenskap: Potensserien är absolutkonvergent om $|t| < R$ och divergent om $|t| > R$.

Talet eller oändlighetssymbolen R kallas potensseriens *konvergensradie*. I fallet $R = 0$ är alltså serien divergent för alla t utom $t = 0$, och i fallet $R = +\infty$ konvergerar serien absolut för alla t .

Bevis. För potensserier vars koefficienter inte uppfyller (2.5.2), och som således bara konvergerar för $t = 0$, sätter vi $R = 0$. För potensserier med koefficienter som uppfyller villkoret (2.5.2), och som därför konvergerar för icke-triviala värden på t , betraktar vi mängden

$$A = \{r > 0 \mid \text{Serien } \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \text{ konvergerar}\}.$$

Diskussionen före satsen visar att mängden A inte är tom. Sätt $R = \sup A$ i det fall då mängden är uppåt begränsad, och $R = +\infty$ om den inte är uppåt begränsad. Vi ska visa att potensserien är absolutkonvergent om $|t| < R$ och divergent om $|t| > R$.

Antag för den skull att $|t_1| < R$; då finns det på grund av definitionen av supremum (resp. på grund av att mängden A inte är uppåt begränsad i fallet $R = +\infty$) ett tal t_0 så att $|t_1| < t_0 < R$ och så att serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t_0^n$ konvergerar. Men utredningen omedelbart före satsen visar att detta innebär att (2.5.2) gäller för $r = 1/t_0$ och att serien därför är absolutkonvergent om $|t| < 1/r = t_0$ och därmed speciellt i punkten t_1 .

Antag därefter att $|t_1| > R$, vilket förstås bara är möjligt då R är ett ändligt tal, och att potensserien är konvergent. Då är den enligt utredningen före satsen (absolut)konvergent för alla t med $|t| < |t_1|$, och därmed speciellt också för något reellt tal $r > R$, vilket strider mot definitionen av R som supremum. Denna motsägelse visar att potensserien divergerar om $|t| > R$. \square

En potensserie med positiv ändlig konvergensradie R är konvergent i cirkelskivan $|t| < R$ i komplexa talplanet, vilket förklarar namnet konvergensradie, och i hela planet om konvergensradien är $+\infty$. Sats 2.5.1 ger emellertid ingen information om vad som händer på själva randen $|t| = R$ av konvergenscirkeln.

EXEMPEL 2.5.1 De tre potensserierna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \quad \text{och} \quad \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

har alla konvergensradie 1. Den förstnämnda konvergerar för all t på randen $|t| = 1$, den andra konvergerar för alla t på randen utom $t = 1$, och den sistnämnda är divergent på hela randen. \square

EXEMPEL 2.5.2 Potensserierna

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \quad \text{och} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^n t^n$$

har konvergensradierna $+\infty$ resp. 0. \square

Sats 2.5.2 Låt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ vara en potensserie med positiv konvergensradie R och antag att $0 < r < R$. Då är potensserien likformigt konvergent i cirkelskivan $|t| \leq r$.

Bevis. Vi vet att serien är absolutkonvergent för $t = r$, dvs. att serien $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ konvergerar. Satsen följer därför av Weierstrass majorantsats, ty olikheterna $|a_n t^n| \leq |a_n| r^n$ gäller för alla t i cirkelskivan $|t| \leq r$. \square

Sats 2.5.3 En potensserie

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

med positiv konvergensradie R är deriverbar i området $|t| < R$ med derivata

$$s'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1},$$

och den deriverade serien har också konvergensradie R .

En potensserie kan således deriveras termvis, och eftersom derivatan är en ny potensserie med samma konvergensradie kan vi upprepa proceduren hur många gånger som helst. Potensserier har med andra ord derivator av godtycklig ordning.

Bevis. Vi börjar med att visa att den deriverade potensserien har samma konvergensradie R som den ursprungliga.

Antag att $y > x > 0$; för tillräckligt stora n är då $n x^{n-1} \leq y^n$ (eftersom $\lim_{n \rightarrow \infty} n x^{n-1} / y^n = 0$), och följaktligen är

$$|a_n| x^n \leq n |a_n| x^{n-1} \leq |a_n| y^n$$

bara n är tillräckligt stort. Av den högra olikheten följer, med hjälp av jämförelsekriteriet för positiva serier, att om den ursprungliga potensserien

är absolutkonvergent för $t = y$, så är den deriverade serien absolutkonvergent för alla t med $|t| = x < y$. Men som y kan vi välja ett godtyckligt tal $< R$; följaktligen är den deriverade serien absolutkonvergent för alla t med $|t| < R$, och detta visar att den deriverade seriens konvergensradie inte kan vara mindre än R .

Den vänstra olikheten ger på motsvarande sätt att konvergensradie inte kan vara större än R . De båda potensserierna har därför samma konvergensradie.

Av föregående sats följer därför att den deriverade potensserien är likformigt konvergent på varje cirkelskiva av typen $|t| \leq r$ om $0 < r < R$. Slutsatsen att $s'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ följer därför av sats 2.4.8. \square

EXEMPEL 2.5.3 Genom att derivera den geometriska serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

termvis erhåller vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

för $|t| < 1$. \square

EXEMPEL 2.5.4 Genom termvis derivering av potensserien

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$$

erhålls derivan

$$s'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} = \frac{1}{1-t},$$

och eftersom $s(0) = 0$ kan vi nu bestämma summan $s(t)$ genom integrering:

$$s(t) = s(t) - s(0) = \int_0^t s'(x) dx = \int_0^t \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-t).$$

Detta innebär att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t)$$

för $|t| < 1$. \square

Sats 2.5.4 *Låt*

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

vara en potensserie med positiv konvergensradie. Då är

$$a_n = \frac{s^{(n)}(0)}{n!}.$$

Bevis. Upprepad användning av föregående sats leder till följande formel för derivatan av ordning k :

$$\begin{aligned} s^{(k)}(t) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_n t^{n-k} \\ &= k! a_k + \text{termer med positiva potenser av } t, \end{aligned}$$

och resultatet i satsen följer nu genom insättning av $t = 0$, vilket ger $s^{(k)}(0) = k! a_k$. \square

Koefficienterna i en potensserie är på grund av föregående sats helt bestämda av funktionens och derivatornas värden i origo, och dessa är i sin tur helt bestämda av hur funktionen ser ut i en godtyckligt liten omgivning av origo. Detta ger oss följande entydighetssats.

Korollarium 2.5.5 (Entydighetssatsen) Om $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ för alla t i något (godtyckligt litet) intervall runt 0, så är $a_n = b_n$ för alla n .

Övningsuppgifter till kapitel 2

2.1 Avgör om följande serier konvergerar eller divergerar:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\frac{1+i}{2}\right)^k \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik^2 t}}{k^2 + 1}.$$

2.2 För vilka reella x existerar $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, och i vilka intervall är konvergensen likformig, om $f_n(x)$ ges av

$$\text{a) } x^n \quad \text{b) } (1-x^2)^n \quad \text{c) } nx^2 e^{-nx} \quad \text{d) } \arctan nx?$$

2.3 Sätt $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$.

a) Konvergerar funktionsföljden $(f_n)_1^\infty$ likformigt på intervallet $[0, 1]$?

b) Är samma funktionsföljd likformigt konvergent på intervallet $[1, \infty[$?

c) Är $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$?

2.4 Sätt $f_n(x) = ne^{-n^2x} \sin nx$.

a) Är funktionsföljden $(f_n)_1^\infty$ likformigt konvergent på intervallet $[0, 1]$?

b) Beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

2.5 Beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 \frac{\sin \frac{x}{n}}{x} dx$.

2.6 Sätt $f_n(x) = \frac{1}{2 + (\tan x)^n}$ för $0 \leq x < \frac{1}{2}\pi$. Beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x) dx$.

2.7 Beräkna summan $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{4k+1}$.

2.8 Visa att serien $s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1+k^2}$ är likformigt konvergent på hela reella axeln samt beräkna integralen $\int_0^\pi s(x) dx$.

2.9 Undersök om funktionsserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{1/2}}{x^2 + k^2}$$

är likformigt konvergent på \mathbf{R} .

2.10 Avgör om funktionsserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^2 e^{-kx}$$

är likformigt konvergent på intervallet $[0, +\infty[$.

2.11 Betrakta funktionsserien $\sum_{k=1}^{\infty} x e^{-kx^2}$.

a) För vilka x är serien konvergent?

b) Är serien likformigt konvergent på intervallet $[0, \infty[$?

c) Är serien likformigt konvergent på intervallet $[a, \infty[$ om $a > 0$?

2.12 Undersök följande funktionsserier med avseende på konvergens och likformig konvergens:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^3 + x^{2k}}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{k^2 + x^2}\right)$

2.13 Visa att om $\alpha > 1/2$, så är serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^{\alpha}(1+kx^2)}$ likformigt konvergent på hela \mathbf{R} .

2.14 Sätt $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$ för $x \geq 0$. Visa att funktionen f är kontinuerlig på intervallet $[0, \infty[$, samt beräkna integralen $\int_0^1 f(x) dx$.

2.15 Sätt $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx} \cos k\pi x$ för $x > 0$. Visa att funktionen f är deriverbar på intervallet $]0, \infty[$, samt beräkna $f'(1)$.

2.16 Visa att $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{t \sin xt}{1+x^2} dx = 1$.

2.17 Visa att $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = 2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

[Ledning: Utveckla nämnaren $\frac{1}{e^x - 1}$ efter potenser av e^{-x} .]

Kapitel 3

Z-transformen

3.1 Definition och egenskaper

Z-transformen används för att studera följder $(a_n)_0^\infty$ som inte blir alltför stora då n går mot oändligheten. Låt oss börja med att definiera detta villkor ordentligt.

Definition En följd $a = (a_n)_0^\infty$ av komplexa tal säges ha en tillväxt som är *högst exponentiell*, eller tillhöra klassen \mathcal{E} , om det finns två positiva konstanter K och r så att

$$(3.1.1) \quad |a_n| \leq Kr^n \quad \text{för alla } n.$$

Om $(a_n)_0^\infty$ och $(b_n)_0^\infty$ är två följder i \mathcal{E} och λ är ett godtyckligt komplext tal, så ligger summaföljden $(a_n + b_n)_0^\infty$ och produktföljden $(\lambda a_n)_0^\infty$ också i klassen \mathcal{E} . Detta betyder att klassen \mathcal{E} utgör ett vektorrum.

Definition För komplexa följder $a = (a_n)_0^\infty$ i klassen \mathcal{E} definieras *z-transformen* $\mathcal{Z}[a](z)$ som den oändliga serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n},$$

där z är en komplex variabel.

Villkoret att a tillhör \mathcal{E} garanterar att det finns ett icke-negativt tal σ_a så att z-transformen $\mathcal{Z}[a](z)$ är absolutkonvergent för $|z| > \sigma_a$ och divergent för $|z| < \sigma_a$.

Genom variabelbytet $t = 1/z$ överförs nämligen z-transformen $\mathcal{Z}[a](z)$ i potensserien

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

och enligt sats 2.5.1 (och diskussionen före densamma) har denna serie en positiv konvergensradie R om och endast om koefficienterna a_n uppfyller villkoret (3.1.1) för något K och $r > 0$, dvs. om och endast om följden a ligger i klassen \mathcal{E} . Översatt till z-transformen betyder detta att z-transformen konvergerar absolut om $|z| > 1/R$ och divergerar om $|z| < 1/R$.

Av resultaten för potensserier följer vidare att z-transformen definierar en funktion som är oändligt många gånger deriverbar utanför konvergenscirkeln och att derivatorna fås genom att derivera serien termvis.

Den genom variabelbytet $t = 1/z$ erhållna potensserien innehåller naturligtvis samma information som z-transformen. Man skulle därför lika gärna kunna arbeta med potensserier som med z-transformer, men analogin med Laplacetransformer blir bättre om man definierar z-transformen som vi gjort ovan.

EXEMPEL 3.1.1 Låt λ vara ett godtyckligt komplext tal. Följden $(\lambda^n)_0^\infty$ tillhör förstas klassen \mathcal{E} , och dess z-transform är

$$\mathcal{Z}[(\lambda^n)](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n z^{-n} = \frac{1}{1 - \lambda/z} = \frac{z}{z - \lambda}$$

för $|z| > \lambda$. □

Ett för alla tillämpningar väsentligt faktum är att z-transformen bestämmer talföljden entydigt. Detta är kontentan av följande sats.

Sats 3.1.1 (Entydighetssatsen) *Z-transformen är en injektiv avbildning på \mathcal{E} , dvs. om $a = (a_n)_0^\infty$ och $b = (b_n)_0^\infty$ är två följder i \mathcal{E} och $\mathcal{Z}[a](z) = \mathcal{Z}[b](z)$ för alla z utanför någon cirkel i komplexa talplanet, så är $a = b$.*

Anmärkning. Det räcker att veta att $\mathcal{Z}[a](z) = \mathcal{Z}[b](z)$ för alla reella tal z som är större än något tal, eller till och med bara att $\mathcal{Z}[a](z_n) = \mathcal{Z}[b](z_n)$ för någon följd $(z_n)_0^\infty$ av tal som går mot oändligheten då $n \rightarrow \infty$, för att dra slutsatsen att $a = b$. Detta följer av att z-transformen är en s. k. analytisk funktion.

Bevis. Om $\mathcal{Z}[a](z) = \mathcal{Z}[b](z)$ för alla z utanför någon cirkel så är motsvarande potensserier $\mathcal{Z}[a](1/t)$ och $\mathcal{Z}[b](1/t)$ lika för alla t i någon (punkterad) omgivning av $t = 0$, och härav följer på grund av entydighetssatsen för potensserier att $a_n = b_n$ för alla n . □

En annan enkel observation är att Z-transformen är linjär som avbildning från vektorrummet \mathcal{E} till rummet av funktioner definierade på delmängder av det komplexa talplanet.

Sats 3.1.2 *Z-transformen är linjär, dvs. för alla följder $a, b \in \mathcal{E}$ och alla komplexa tal λ, μ är*

$$\mathcal{Z}[\lambda a + \mu b](z) = \lambda \mathcal{Z}[a](z) + \mu \mathcal{Z}[b](z).$$

Bevis.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\lambda(a_n) + \mu(b_n)](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) z^{-n} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \\ &= \lambda \mathcal{Z}[a](z) + \mu \mathcal{Z}[b](z). \end{aligned}$$

□

Om $(a_n)_0^\infty$ är en följd som växer högst exponentiellt, så har förstås också följden $(\lambda^n a_n)_0^\infty$ samma egenskaper för varje komplext tal λ , och sambandet mellan dessa båda följders z-transformer ges av nästa sats.

Sats 3.1.3 *Om $(a_n)_0^\infty$ är en följd i \mathcal{E} med z-transform $A(z)$, så är*

$$\mathcal{Z}[(\lambda^n a_n)](z) = A(z/\lambda).$$

Bevis.

$$\mathcal{Z}[(\lambda^n a_n)](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z/\lambda)^{-n} = A(z/\lambda).$$

□

EXEMPEL 3.1.2 Bestäm en följd $(a_n)_0^\infty$ som har z-transformen

$$A(z) = \frac{z^3 - 4z^2 + 7z}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$

Lösning. Enligt entydighetssatsen finns det högst en sådan följd, och för att bestämma den börjar vi med att bryta ut faktorn z och partialbråksuppdelar sedan det resterande bråket:

$$A(z) = z \cdot \frac{z^2 - 4z + 7}{(z-1)(z-2)(z-3)} = z \cdot \left(\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-3} \right).$$

Man finner lätt att koefficienterna är $A = 2$, $B = -3$ och $C = 2$, varför

$$A(z) = 2 \cdot \frac{z}{z-1} - 3 \cdot \frac{z}{z-2} + 2 \cdot \frac{z}{z-3}.$$

Enligt exempel 3.1.1 har följden (λ^n) z-transform $z/(z - \lambda)$, och om vi kombinerar detta faktum med linearitet, drar vi slutsatsen att den sökta följden är

$$a_n = 2 - 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n. \quad \square$$

En naturlig generalisering av exempel 3.1.2 är att bestämma vilka rationella funktioner $P(z)/Q(z)$ som är z-transformer och att för dessa bestämma motsvarande följd. Ett nödvändigt villkor för att en rationell funktion ska vara z-transform är att täljarens gradtal inte är större än nämnarens; detta följer med en gång av följande sats.

Sats 3.1.4 För alla följder $a = (a_n)_0^\infty$ i \mathcal{E} är

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{Z}[a](z) = a_0.$$

Bevis. Variabelbytet $z = 1/t$ och det faktum att potensserier är kontinuerliga funktioner medför att

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0. \quad \square$$

Exempel 3.1.1 ger oss den inversa följden till transformen $z/(z - \lambda)$, men för att komma vidare behöver vi också identifiera den inversa följden till z-transformen $z/(z - \lambda)^k$ för heltal k som är större än 1. Följande sats hjälper oss med detta. Vi påminner om att binomialkoefficienterna $\binom{n}{k}$ ges av formeln

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Observera att denna formel är meningsfull även för naturliga tal n som är mindre än k och att $\binom{n}{k} = 0$ om $0 \leq n < k$.

Sats 3.1.5 Antag att $a = (a_n)_0^\infty$ är en följd i \mathcal{E} med z-transform $A(z)$ och sätt

$$b_n = \binom{n}{k} a_n,$$

där k är ett positivt heltal. Då ligger följden $b = (b_n)_0^\infty$ i \mathcal{E} och dess z-transform är

$$\mathcal{Z}[b](z) = \frac{(-1)^k z}{k!} \cdot \frac{d^k}{dz^k} (z^{k-1} A(z)).$$

Speciellt är alltså

$$\mathcal{Z}[(na_n)](z) = -zA'(z).$$

Bevis. För stora n är $\binom{n}{k} \leq 2^n$ (eftersom $\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} 2^{-n} = 0$), och därav följer direkt att följden $(b_n)_0^\infty$ tillhör \mathcal{E} .

För att bestämma z -transformen till följden b börjar vi med att derivera sambandet

$$z^{k-1}A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-(n-k+1)}$$

k gånger; detta resulterar i formeln

$$\frac{d^k}{dz^k}(z^{k-1}A(z)) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} (n-k+1)(n-k+2) \cdots n a_n z^{-(n+1)}$$

Genom att multiplicera båda sidorna i formeln ovan med $(-1)^k z$ och dividera med $k!$ erhålls den sökta formeln

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} a_n z^{-n} = \frac{(-1)^k z}{k!} \frac{d^k}{dz^k}(z^{k-1}A(z)).$$

□

Korollarium 3.1.6 $\mathcal{Z}[(\binom{n}{k} \lambda^{n-k})](z) = \frac{z}{(z - \lambda)^{k+1}}.$

Bevis. Vi använder föregående sats på följden $(1, 1, 1, \dots)$ bestående av idel ettor och som har z -transform $z/(z-1)^{-1}$. Detta ger att

$$\mathcal{Z}[(\binom{n}{k})](z) = \frac{(-1)^k z}{k!} \cdot \frac{d^k}{dz^k} \left(\frac{z^k}{z-1} \right) = \frac{(-1)^k z}{k!} \cdot \frac{d^k}{dz^k} \left(\frac{z^k - 1}{z-1} + \frac{1}{z-1} \right).$$

Nu är

$$\frac{z^k - 1}{z - 1} = z^{k-1} + z^{k-2} + \cdots + z + 1$$

ett polynom i z av grad $k-1$, så därför är k :te derivatan av denna del lika med noll. Det följer att

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[(\binom{n}{k})](z) &= \frac{(-1)^k z}{k!} \cdot \frac{d^k}{dz^k} \left(\frac{1}{z-1} \right) \\ &= \frac{(-1)^k z}{k!} \cdot \frac{(-1)^k k!}{(z-1)^{k+1}} = \frac{z}{(z-1)^{k+1}}. \end{aligned}$$

Detta visar korollariet i fallet $\lambda = 1$. Det allmänna fallet fås ur detta specialfall med hjälp av sats 3.1.3, som ger

$$\mathcal{Z}[(\binom{n}{k} \lambda^n)](z) = \frac{z/\lambda}{(z/\lambda - 1)^{k+1}} = \frac{\lambda^k z}{(z - \lambda)^{k+1}},$$

varur formeln i korollariet följer efter division med λ^k .

□

Vi kan nu avgöra vilka rationella funktioner som är z-transformer och i princip också bestämma motsvarande följder.

Sats 3.1.7 *En rationell funktion $R(z) = P(z)/Q(z)$ är z-transform till en följd i \mathcal{E} om och endast om polynomet $P(z)$ har ett gradtal som inte överstiger gradtalet hos polynomet $Q(z)$.*

Bevis. Vi vet redan att villkoret på gradtalen är nödvändigt – för att bevisa att det också är tillräckligt antar vi att $P(z)$ har ett gradtal som högst är lika med gradtalet hos $Q(z)$. Vi skriver den rationella funktionen $R(z)$ på formen

$$R(z) = z \cdot \frac{P(z)}{zQ(z)}$$

och faktorerar polynomet $zQ(z)$:

$$zQ(z) = z^{m_0}(z - \lambda_1)^{m_1} \cdots (z - \lambda_k)^{m_k}.$$

Här är $0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ de komplexa nollställena till polynomet $zQ(z)$, och m_0, m_1, \dots, m_k är nollställes multiplicitet.

Eftersom gradtalet hos nämnaren $zQ(z)$ är strikt större än gradtalet hos täljaren $P(z)$, kan den rationella funktionen $P(z)/zQ(z)$ skrivas som en summa av partialbråk av typen

$$\frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \cdots + \frac{A_{m_0}}{z^{m_0}}$$

och

$$\frac{B_1}{z - \lambda_i} + \frac{B_2}{(z - \lambda_i)^2} + \cdots + \frac{B_{m_i}}{(z - \lambda_i)^{m_i}},$$

där varje nollställe λ_i ger en summa av det sistnämnda slaget.

Genom att multiplicera tillbaka z ser vi att den rationella funktionen $R(z)$ är en summa av uttryck av följande slag:

$$A_1 + \frac{A_2}{z} + \cdots + \frac{A_{m_0}}{z^{m_0-1}}$$

och

$$\frac{B_1 z}{z - \lambda_i} + \frac{B_2 z}{(z - \lambda_i)^2} + \cdots + \frac{B_{m_i} z}{(z - \lambda_i)^{m_i}}.$$

Den förstnämnda summan är z-transform till följden

$$(3.1.2) \quad (A_1, A_2, \dots, A_{m_0}, 0, 0, \dots)$$

medan den andra summan är z -transform till en följd vars n -te term är

$$(3.1.3) \quad B_1 \lambda_i^n + B_2 \binom{n}{1} \lambda_i^{n-1} + \dots + B_{m_i} \binom{n}{m_i-1} \lambda_i^{n-(m_i-1)}.$$

På grund av linearitet är därför $R(z)$ z -transform till den följd som fås genom att lägga ihop följden (3.1.2) med alla följderna (3.1.3). \square

EXEMPEL 3.1.3 Bestäm följden $(a_n)_0^\infty$ om dess z -transform är

$$A(z) = \frac{z^2 + 4z}{(z-3)^4}.$$

Lösning. Vi börjar med att bryta ut z ur täljaren och partialbråksuppdelar sedan det resterande bråket:

$$A(z) = z \cdot \frac{z+4}{(z-3)^4} = z \cdot \left(\frac{7}{(z-3)^4} + \frac{1}{(z-3)^3} \right) = 7 \cdot \frac{z}{(z-3)^4} + \frac{z}{(z-3)^3}.$$

Det följer nu av korollarium 3.1.6 att

$$a_n = 7 \binom{n}{3} 3^{n-3} + \binom{n}{2} 3^{n-2},$$

vilket kan förenklas till

$$a_n = \frac{1}{2} (7n^3 - 12n^2 + 5n) 3^{n-4}. \quad \square$$

EXEMPEL 3.1.4 Bestäm följden $(a_n)_0^\infty$ om dess z -transform är

$$A(z) = \frac{z^2 + 1}{(z-2)(z^2 - 2z + 5)}.$$

Lösning. Eftersom det inte finns någon faktor z att bryta ut ur täljaren börjar vi med att förlänga bråket $A(z)$ med z och skriver det på formen

$$A(z) = z \cdot \frac{z^2 + 1}{z(z-2)(z^2 - 2z + 5)}$$

med avsikten att först partialbråksuppdelar den andra faktorn i ovanstående uttryck. Polynomet $z^2 - 2z + 5$ har komplexa nollställena $z = 1 \pm 2i$, så dess faktorisering är $(z-1-2i)(z-1+2i)$. Detta betyder att vi har en partialbråksuppdelning av följande slag

$$\frac{z^2 + 1}{z(z-2)(z^2 - 2z + 5)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-1-2i} + \frac{D}{z-1+2i},$$

och koefficientbestämning ger

$$A = -\frac{1}{10}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = -\frac{1}{10}(2 + i), \quad D = -\frac{1}{10}(2 - i) = \overline{C}.$$

Följaktligen är

$$A(z) = A + B \frac{z}{z-2} + C \frac{z}{z-1-2i} + D \frac{z}{z-1+2i},$$

och

$$a_n = A \delta_n + B 2^n + C (1 + 2i)^n + D (1 - 2i)^n,$$

där $\delta = (\delta_n)_0^\infty$ betecknar följden

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{om } n = 0 \\ 0 & \text{för övriga } n. \end{cases}$$

Följden $(a_n)_0^\infty$ är reell beroende på att $D(1 - 2i)^n = \overline{C}(1 - 2i)^n = \overline{C(1 + 2i)^n}$, vilket medför att $C(1 + 2i)^n + D(1 - 2i)^n = 2 \operatorname{Re}(C(1 + 2i)^n)$, och således

$$a_n = -\frac{1}{10} \delta_n + 2^{n-1} - \frac{1}{5} \operatorname{Re}((2 + i)(1 + 2i)^n).$$

Vi kommer fram till en alternativ form för a_n genom att först skriva de komplexa talen $1 + 2i$ och $2 + i$ på polär form:

$$\begin{aligned} 1 + 2i &= \sqrt{5} e^{i\alpha}, & \alpha &= \arg(1 + 2i) = \arctan 2 \\ 2 + i &= \sqrt{5} e^{i\beta}, & \beta &= \arg(2 + i) = \arctan \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Det följer att

$$(2 + i)(1 + 2i)^n = \sqrt{5} e^{i\beta} \cdot \sqrt{5}^n e^{in\alpha} = \sqrt{5}^{n+1} e^{i(n\alpha + \beta)}$$

och att följaktligen

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}((2 + i)(1 + 2i)^n) &= \sqrt{5}^{n+1} \cos(n\alpha + \beta) \\ &= \sqrt{5}^{n+1} (\cos n\alpha \cos \beta - \sin n\alpha \sin \beta) \\ &= \sqrt{5}^{n+1} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cos n\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}} \sin n\alpha \right) \\ &= \sqrt{5}^n (2 \cos n\alpha - \sin n\alpha). \end{aligned}$$

Således är

$$a_n = -\frac{1}{10} \delta_n + 2^{n-1} - \sqrt{5}^{n-2} (2 \cos n\alpha - \sin n\alpha).$$

□

3.2 Translation och differensekvationer

Två viktiga operationer på rummet av alla följder $(a_n)_0^\infty$ är *vänstertranslation* L och *högertranslation* R , som definieras på följande vis:

$$\begin{aligned} L(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) &= (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) \\ R(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) &= (0, a_0, a_1, a_2, \dots). \end{aligned}$$

Vänstertranslationen förskjuter följden ett steg åt vänster, varvid första elementet a_0 faller bort, medan högertranslationen förskjuter följden ett steg åt höger och introducerar en nolla på första platsen (dvs. platsen med index 0).

Tydligt är

$$L(a_n)_0^\infty = (a_{n+1})_0^\infty,$$

medan

$$R(a_n)_0^\infty = (a_{n-1})_0^\infty,$$

om vi inför konventionen att $a_{-1} = 0$. För att slippa detta och liknande påpekanden i fortsättningen inför vi nu följande konvention: *Följder $(a_n)_0^\infty$, som från början bara är definierade för icke-negativa index n , utvidgas till att vara definierade för alla heltalsindex genom att $a_n = 0$ för alla negativa index n .*

Vänster- och högertranslation är uppenbarligen linjära avbildningar på rummet av alla följder. Om a är en följd som växer högst exponentiellt, så har givetvis också de båda translaterade följderna La och Ra samma egenskap. (Om $(a_n)_0^\infty$ uppfyller tillväxtvillkoret (3.1.1), så uppfyller de båda följderna $(a_{n+1})_0^\infty$ och $(a_{n-1})_0^\infty$ villkoret med samma r men med K ersatt av Kr resp. K/r .) Detta innebär att vi kan uppfatta translationerna L och R som operatorer på vektorrummet \mathcal{E} .

Genom att upprepa avbildningarna L resp. R flera gånger kan vi translatera flera steg åt vänster resp. höger:

$$L^k(a_n)_0^\infty = (a_{n+k})_0^\infty \quad \text{och} \quad R^k(a_n)_0^\infty = (a_{n-k})_0^\infty.$$

Vår nästa sats beskriver hur z -transformationen förhåller sig till translation.

Sats 3.2.1 *För alla följder $a \in \mathcal{E}$ är*

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[R^k a](z) &= z^{-k} \mathcal{Z}[a](z) \quad \text{och} \\ \mathcal{Z}[L^k a](z) &= z^k \mathcal{Z}[a](z) - a_0 z^k - a_1 z^{k-1} - a_2 z^{k-2} - \dots - a_{k-1} z. \end{aligned}$$

Bevis.

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[R^k a](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k} z^{-n} = \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} z^{-n} = z^{-k} \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} z^{-(n-k)} \\ &= z^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^{-m} = z^{-k} \mathcal{Z}[a](z).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[L^k a](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} z^{-n} = z^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} z^{-(n+k)} = z^k \sum_{m=k}^{\infty} a_m z^{-m} \\ &= z^k \left(\mathcal{Z}[a](z) - \sum_{m=0}^{k-1} a_m z^{-m} \right).\end{aligned}$$

□

Som tillämpning på föregående sats visar vi nu hur man kan använda z-transformen för att lösa linjära differensekvationer.

EXEMPEL 3.2.1 Lös differensekvationen

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 4,$$

med begynnelsevillkoren $a_0 = 1$ och $a_1 = 2$.

Lösning. Med hjälp av de givna begynnelsevillkoren kan vi rekursivt bestämma a_2, a_3, a_4, \dots på ett entydigt sätt, så differensekvationen har en entydig lösning $a = (a_n)_0^\infty$. Låt $A(z)$ beteckna lösningsföljdens z-transform. De båda vänstertranslaterade följderna $(a_{n+1})_0^\infty$ och $(a_{n+2})_0^\infty$ har då z-transformerna $zA(z) - z$ resp. $z^2A(z) - z^2 - 2z$. Z-transformen till följden i differensekvationens vänsterled är därför på grund av linearitet lika med

$$z^2A(z) - z^2 - 2z - 5(zA(z) - z) + 6A(z) = (z^2 - 5z + 6)A(z) - z^2 + 3z$$

medan z-transformen till den konstanta följden 4 i högerledet ges av exempel 3.1.1 (med $\lambda = 1$) och är $4z/(z-1)$. Följaktligen är

$$(z^2 - 5z + 6)A(z) - z^2 + 3z = \frac{4z}{z-1},$$

vilket leder till att

$$\begin{aligned}(z^2 - 5z + 6)A(z) &= z^2 - 3z + \frac{4z}{z-1} = \frac{z^3 - 4z^2 + 7z}{z-1} \quad \text{och} \\ A(z) &= \frac{z^3 - 4z^2 + 7z}{(z-1)(z^2 - 5z + 6)} = \frac{z^3 - 4z^2 + 7z}{(z-1)(z-2)(z-3)}.\end{aligned}$$

I exempel 3.1.2 fann vi att $A(z)$ är z-transform till följden

$$a_n = 2 - 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n,$$

som därför också är differensekvationens lösning.

□

3.3 Faltning och svarta lådor

Faltning

När två potensserier

$$\begin{aligned} A(t) &= a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots & \text{och} \\ B(t) &= b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + \dots \end{aligned}$$

multiplieras med varandra blir resultatet en ny potensserie

$$C(t) = A(t)B(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 + \dots,$$

och koefficienterna i den nya serien ges av att

$$c_0 = a_0b_0, \quad c_1 = a_0b_1 + a_1b_0, \quad c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0,$$

och allmänt

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \dots + a_nb_0 = \sum_{k=0}^n a_kb_{n-k}.$$

Detta sätt att av två följder $a = (a_n)_0^\infty$ och $b = (b_n)_0^\infty$ bilda en ny följd $c = (c_n)_0^\infty$ kallas *faltning* och man skriver

$$c = a * b.$$

Man kan visa att om två potensserier $A(t)$ och $B(t)$ är konvergenta i en cirkelskiva $|t| < R$, så är säkert också potensserien för deras produkt $C(t) = A(t)B(t)$ konvergent i samma cirkelskiva. Detta innebär att följden $c = a * b$ växer högst exponentiellt om de båda följderna a och b växer högst exponentiellt. Eftersom vidare $C(1/z) = A(1/z) \cdot B(1/z)$ och $A(1/z)$, $B(1/z)$ och $C(1/z)$ är z -transformerna till de tre följderna a , b och $a*b$, har vi kommit fram till följande sats.

Sats 3.3.1 Om $a = (a_n)_0^\infty$ och $b = (b_n)_0^\infty$ är två följder i \mathcal{E} , så ligger faltningen $a*b$ också i \mathcal{E} och för de tre följdernas z -transformer gäller sambandet

$$\mathcal{Z}[a * b](z) = \mathcal{Z}[a](z) \cdot \mathcal{Z}[b](z).$$

Med hjälp av högertranslationsoperatören R kan vi uttrycka b_{n-k} som $(R^k b)_n$ och följaktligen skriva om formeln för c_n som

$$(a * b)_n = c_n = \sum_{k=0}^n a_k (R^k b)_n.$$

Med vår konvention att $(R^k b)_n = b_{n-k} = 0$ om $k > n$ kan vi vidare skriva summan ovan som

$$(a * b)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (R^k b)_n$$

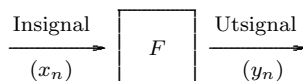
för alla index n . Detta betyder att

$$a * b = \sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k b,$$

dvs. faltningen $a * b$ kan uppfattas som en oändlig linjärkombination av högertranslat till följderna b , där koefficienterna ges av följderna a . Observera att vi inte har några konvergensproblem eftersom summan i realiteten är ändlig för varje fixt koordinatindex n .

Svarta lådor

Vi övergår nu till att beskriva och karakterisera diskreta "svarta lådor". Med en sådan låda menas en apparat som tar emot diskreta insignaler, processar dem på något sett och levererar diskreta utsignaler. Sådana lådor används för att styra och reglera processer och förekommer i många sammanhang.



Figur 3.1. Svart låda

Ur matematisk synvinkel är en diskret svart låda ingenting annat än en funktion F som till varje följd (insignal) $x = (x_n)_0^\infty$ associerar en följd (utsignal) $F(x) = y = (y_n)_0^\infty$.

Låt oss nu definiera tre egenskaper som en svart låda F kan ha.

- (i) *Linearitet:* $F(\alpha x + \beta z) = \alpha F(x) + \beta F(z)$
för alla insignaler x och z och alla reella tal α och β .
- (ii) *Tidsinvarians:* $F(R^k x) = R^k F(x)$
för alla insignaler x och alla naturliga tal k . Detta betyder att om en insignal $x = (x_n)$ resulterar i utsignalen $y = (y_n)$, så resulterar den högertranslaterade insignalen $R^k x$ i utsignalen $R^k y$. Lådan ska med andra ord fungera likadant i framtiden som den gör idag.
- (iii) *Kausalitet:* Om x och z är två följder med $x_k = z_k$ för $0 \leq k \leq n$, så är $F(x)_n = F(z)_n$.

För två insignaler som är lika fram till och med en viss tidpunkt n är med andra ord utsignalerna också lika fram till och med tidpunkten n . Ett annat sätt att uttrycka detta är att säga att utsignalens utseende vid en viss tidpunkt inte beror av insignalens framtida utseende.

Många fysikaliska svarta lådor är linjära (inom rimliga gränser för insignalerna) och fungerar alltid på ett liknande sätt, dvs. är tidsinvarianta. Det är vidare svårt att tänka sig en svart låda som inte är kausal. Det är därför intressant att notera att linjära, tidsinvarianta, kausala svarta lådor har en mycket enkel matematisk beskrivning.

Sats 3.3.2 *För varje linjär, tidsinvariant, kausal diskret svart låda F finns det en följd a så att*

$$F(x) = x * a.$$

Omvänt är varje låda som ges av en faltning av ovanstående slag linjär, tidsinvariant och kausal.

Bevis. Låt δ beteckna följden $(1, 0, 0, \dots)$, och sätt $a = F(\delta)$. I signalteorisammanhang kallas δ en *impuls* och a är *impulssvaret*. Vi ska visa att $F(x) = x * a$ för varje insignal $x = (x_n)_0^\infty$.

Vi vill beräkna $F(x)_n$ och utnyttjar för den skull kausaliteten och beräknar istället $F(z)_n$, där z är följden

$$z = (x_0, x_1, \dots, x_n, 0, 0, 0, \dots).$$

Eftersom

$$R\delta = (0, 1, 0, 0, \dots), \quad R^2\delta = (0, 0, 1, 0, \dots), \quad \text{osv.}$$

kan vi skriva följden z som följande summa

$$z = x_0\delta + x_1R\delta + x_2R^2\delta + \dots + x_nR^n\delta.$$

Linearitet och tidsinvarians medför nu att

$$\begin{aligned} F(z) &= x_0F(\delta) + x_1F(R\delta) + x_2F(R^2\delta) + \dots + x_nF(R^n\delta) \\ &= x_0F(\delta) + x_1RF(\delta) + x_2R^2F(\delta) + \dots + x_nR^n(F\delta) \\ &= \sum_{k=0}^n x_k R^k a. \end{aligned}$$

Utsignalens n :te koordinat är således

$$F(x)_n = F(z)_n = \sum_{k=0}^n x_k (R^k a)_n = \sum_{k=0}^n x_k a_{n-k} = (x * a)_n,$$

och eftersom n var godtyckligt valt har vi därmed visat att $F(x) = x * a$.

Omvändningen, dvs. att faltning är en linjär, tidsinvariant och kausal operation lämnas som övning åt läsaren. \square

Övningsuppgifter till kapitel 3

3.1 Bestäm z-transformen till följande följder $(a_n)_0^\infty$:

a) $a_n = 2^{-n}$ b) $a_n = n \cdot 3^n$ c) $a_n = n^2 \cdot 2^n$

3.2 Bestäm följden $(a_n)_0^\infty$ om dess z-transform är

a) $\frac{z}{3z-2}$ b) $\frac{1}{z}$ c) $\frac{3z^3 - 8z^2 + 16z}{(z-2)^2(z+1)}$.

3.3 Bestäm följden $(a_n)_0^\infty$ om $a_0 = 2$, $a_1 = 0$ och $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = -1$ för $n = 0, 1, 2, \dots$

3.4 Bestäm följden $(a_n)_0^\infty$ om $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ och $a_{n+2} + a_n = 2n + 4$ för $n = 0, 1, 2, \dots$

3.5 Lös följande system av linjära differensekvationer

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - b_n \\ b_{n+1} = -6a_n + b_n \end{cases}$$

med begynnelsevärdena $a_0 = b_0 = 1$.

3.6 Bestäm följden $(x_n)_0^\infty$ om

a) $\sum_{k=0}^n 3^{-k} x_{n-k} = 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

b) $x_n + 2 \sum_{k=0}^n (n-k)x_k = 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Kapitel 4

Fourierserier

4.1 Periodiska funktioner och fourierkoefficienter

En funktion definierad på \mathbf{R} kallas *periodisk* med *perioden* 2π (eller 2π -*periodisk*) om

$$f(t + 2\pi) = f(t) \quad \text{för alla } t \in \mathbf{R}.$$

2π -periodiska funktioner är fullständigt bestämda av sina värden på ett godtyckligt halvöppet intervall av längd 2π , till exempel intervallet $] -\pi, \pi]$. Omvänt har varje funktion f som är definierad på ett halvöppet intervall I av längd 2π en entydig 2π -periodisk utvidgning \tilde{f} ; den utvidgade funktionen definieras av att $\tilde{f}(t + 2n\pi) = f(t)$ för $t \in I$, $n \in \mathbf{Z}$.

Funktionen $t \rightarrow e^{it}$ är 2π -periodisk och avbildar reella axeln \mathbf{R} på enhetscirkeln \mathbf{T} . Med hjälp av denna avbildning kan vi uppfatta en 2π -periodisk funktion f definierad på \mathbf{R} som en funktion F definierad på \mathbf{T} genom att sätta $F(e^{it}) = f(t)$, och vice versa. Vi kommer att identifiera de två funktionerna f och F . Detta innebär att vi omväxlande betraktar en 2π -periodisk funktion som en funktion definierad på \mathbf{T} , och omvänt.

Mängden av alla kontinuerliga 2π -periodiska funktioner betecknas $\mathcal{C}(\mathbf{T})$. Observera att en 2π -periodisk funktion f tillhör $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ om och endast om funktionen är kontinuerlig i alla punkter på det öppna intervallet $] -\pi, \pi[$ och dessutom uppfyller

$$\lim_{t \rightarrow -\pi+} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pi-} f(t) = f(\pi),$$

(dvs. är kontinuerlig från höger i punkten $-\pi$ och från vänster i punkten π).

På motsvarande sätt definierar vi $\mathcal{C}^k(\mathbf{T})$ som mängden av alla 2π -periodiska funktioner med kontinuerliga derivator av ordning k .

Om f är 2π -periodisk och om I är ett godtyckligt intervall av längd 2π , så är $\int_I f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$, förutsatt att den sista integralen existerar. Detta är geometriskt uppenbart – ett formellt bevis fås genom variabelbyte och lyder som följer. Låt $I = [a, a + 2\pi]$, och bestäm heltalet n så att talet $b = a - 2n\pi$ uppfyller $-\pi < b \leq \pi$. Då är

$$\begin{aligned} \int_I f(t) dt &= \int_a^{a+2\pi} f(t - 2n\pi) dt = \quad [\text{gör variabelbytet } u = t - 2n\pi] \\ &= \int_b^{b+2\pi} f(u) du = \int_b^{\pi} f(u) du + \int_{\pi}^{b+2\pi} f(u) du \\ &= \int_b^{\pi} f(u) du + \int_{\pi}^{b+2\pi} f(u - 2\pi) du = \quad [\text{sätt } t = u - 2\pi] \\ &= \int_b^{\pi} f(t) dt + \int_{-\pi}^b f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt. \end{aligned}$$

I fortsättningen kommer vi ofta att skriva integralen av en 2π -periodisk funktion f över ett (godtyckligt) intervall av längd 2π som $\int_{\mathbf{T}} f(t) dt$. Vi använder vidare beteckningen $L^1(\mathbf{T})$ för mängden av alla (Lebesgue-mätbara) 2π -periodiska funktioner f som uppfyller villkoret $\int_{\mathbf{T}} |f(t)| dt < \infty$. Jämfört med definitionen i avsnitt 2.2 definierar vi om L^1 -normen en smula genom att sätta

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |f(t)| dt.$$

Skälet för den extra faktorn $1/2\pi$ är att vi vill att den konstanta funktionen 1 ska ha norm 1, något som kommer att förenkla en rad framtida formler.

Mot bakgrund av vår diskussion i kapitel 1 kring värmeledningsekvationen är vi intresserade av att representera funktioner som oändliga summor av sinus- och cosinusfunktioner, eller ekvivalent som oändliga summor av exponentialfunktioner e^{int} . Om

$$(4.1.1) \quad f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{int}$$

så måste f vara en periodisk funktion med perioden 2π , ty varje exponentialfunktion e^{int} är 2π -periodisk. Följaktligen kan bara 2π -periodiska funktioner ha en representation på formen (4.1.1).

Antag nu att likheten (4.1.1) gäller och att vi kan manipulera fritt med integration och summation. Genom att multiplicera båda leden i (4.1.1) med e^{-ikt} , sedan integrera över \mathbf{T} och slutligen kasta om ordningen mellan summation och integration får vi

$$\int_{\mathbf{T}} f(t) e^{-ikt} dt = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n \int_{\mathbf{T}} e^{int} e^{-ikt} dt = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n \int_{\mathbf{T}} e^{i(n-k)t} dt = 2\pi c_k.$$

Här har vi utnyttjat oss av att

$$\int_{\mathbf{T}} e^{imt} dt = \begin{cases} 2\pi, & \text{om } m = 0 \\ 0, & \text{om } m \neq 0 \end{cases}$$

vilket medför att $\int_{\mathbf{T}} e^{i(n-k)t} dt = 0$ för alla värden på n utom $n = k$, då integralen istället är lika med 2π . Slutsatsen blir alltså att

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Vi har kommit fram till denna formel under antagandet att funktionen f kan skrivas som en konvergent summa och att vi får behandla oändliga summor som ändliga med avseende på integration. Högerledet i formeln är emellertid väldefinierat för **alla** $L^1(\mathbf{T})$ -funktioner f , eftersom funktionen $f(t) e^{-int}$ tillhör $L^1(\mathbf{T})$ om f gör det. Formeln får därför bli utgångspunkt för följande generella definition.

Definition För $f \in L^1(\mathbf{T})$ och $n \in \mathbf{Z}$ sätter vi

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t) e^{-int} dt$$

och kallar talen $\hat{f}(n)$ för f :s *fourierkoefficienter*. Serien

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$$

kallas funktionens *fourierserie*.

Vi kommer att skriva

$$f(t) \sim \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$$

för att ange att serien ifråga är fourierserie till funktionen f . Observera att vi därmed inte påstår att fourierserien konvergerar – konvergensen är ett delikat problem som vi kommer att behandla i senare avsnitt.

Notera också att koefficienten $\hat{f}(0)$ är lika med medelvärdet av funktionen f över en period.

Trigonometrisk form

Det finns flera alternativa sätt att skriva en funktions fourierserie på – formen

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$$

är enklast och bäst när man ska analysera serien, men den känns inte lika naturlig i många tillämpningssammanhang, speciellt inte om funktionen f är reell. Genom att utnyttja oss av att

$$\hat{f}(n)e^{int} + \hat{f}(-n)e^{-int} = (\hat{f}(n) + \hat{f}(-n))\cos nt + i(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n))\sin nt$$

och sätta

$$a_n = \hat{f}(n) + \hat{f}(-n) \quad \text{och} \quad b_n = i(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)),$$

samt observera att detta speciellt innebär att $\hat{f}(0) = a_0/2$, ser vi att

$$(4.1.2) \quad \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n)e^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Serien i högerledet av (4.1.2) kallas fouriersseriens *trigonometriska form*. Eftersom

$$\hat{f}(n) + \hat{f}(-n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(e^{-int} + e^{int}) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt$$

och

$$i(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(e^{-int} - e^{int}) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt$$

ges den trigonometriska formens koefficienter a_n och b_n av följande integraler:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt.$$

Om funktionen f är *udda*, så är också $f(t) \cos nt$ udda, medan $f(t) \sin nt$ är jämn, och för alla n är därför

$$a_n = 0 \quad \text{och} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt dt.$$

Helt analogt gäller för *jämna* funktioner f att

$$b_n = 0 \quad \text{och} \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt dt$$

för alla n .

Amplitud-fasvinkelform

Antag att den 2π -periodiska funktionen f periodisk är *reell*. Då är

$$f(t)e^{int} = \overline{f(t)e^{-int}}$$

för alla t , varför

$$\hat{f}(-n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t)e^{int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} \overline{f(t)e^{-int}} dt = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t)e^{-int} dt} = \overline{\hat{f}(n)}.$$

För $n \geq 1$ är följaktligen

$$\begin{aligned} \hat{f}(-n)e^{-int} + \hat{f}(n)e^{int} &= \overline{\hat{f}(n)e^{-int}} + \hat{f}(n)e^{int} = \overline{\hat{f}(n)e^{int}} + \hat{f}(n)e^{int} \\ &= \operatorname{Re}(2\hat{f}(n)e^{int}). \end{aligned}$$

Vi skriver nu det komplexa talet $2\hat{f}(n)$ på polär form genom att för $n \geq 1$ sätta

$$A_n = 2|\hat{f}(n)| \quad \text{och} \quad \phi_n = \arg \hat{f}(n),$$

vilket innebär att $2\hat{f}(n) = A_n e^{i\phi_n}$ och att följaktligen

$$\hat{f}(-n)e^{-int} + \hat{f}(n)e^{int} = \operatorname{Re}(A_n e^{i\phi_n} e^{int}) = \operatorname{Re}(A_n e^{i(nt+\phi_n)}) = A_n \cos(nt + \phi_n).$$

Med $A_0 = \hat{f}(0)$ kan vi därför skriva den reella funktionen f 's fourierserie på formen

$$(4.1.3) \quad f(t) \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt + \phi_n).$$

I fysiken kallas förlopp som beskrivs av funktioner av typen $A \cos(\omega t + \phi)$ för *harmonisk svängningar* med *amplitud* A , *vinkelfrekvens* ω och *fasvinkel* ϕ . I formel (4.1.3) framställer därför högerledet funktionen f som en oändlig summa av harmoniska svängningar med vinkelfrekvenser n , amplituder A_n och fasvinklar ϕ_n kring funktionens medelvärde A_0 , och formeln kallas av den anledningen för fourierseriens *amplitud-fasvinkelform*. Denna form används flitigt i fysikaliska sammanhang, men eftersom den inte är så lämplig för teoretisk analys kommer vi inte att använda oss av den i fortsättningen.

EXEMPEL 4.1.1 Låt oss bestämma fourierserien till den 2π -periodiska funktion f , som bestäms av att $f(t) = t$ för $|t| < \pi$. (Notera att vi inte specificerat något funktionsvärde i punkten π , och därmed inte heller i någon av punkterna $n\pi$ för udda heltal n . Funktionsvärdet $f(\pi)$ är irrelevant, eftersom integralen som definierar fourierkoefficienterna inte bryr sig om funktionsvärdet i en enstaka punkt.)

Fourierkoefficienten $\hat{f}(0)$ fås direkt som

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt = 0,$$

medan övriga fourierkoefficienter $\hat{f}(n)$, $n \neq 0$, beräknas med hjälp av en partiell integration:

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-int} \, dt = \frac{1}{2\pi} \left[t \frac{e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi ni} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \, dt \\ &= \frac{1}{-2\pi ni} (\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi}) + 0 = \frac{i}{n} (-1)^n. \end{aligned}$$

Således gäller att

$$f(t) \sim i \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n}{n} e^{int}.$$

Notera att vi på detta stadium inte vet om fourierserien konvergerar mot $f(t)$; vi får ge oss till tåls till avsnitt 4.7 innan vi kan avgöra detta. (Att serien ovan är konvergent för varje t följer emellertid av av sats 2.3.10; jämför med exempel 2.3.5.)

Vi skriver nu fourierserien på trigonometrisk form genom att kombinera termer som svarar mot $-n$ och n :

$$\frac{(-1)^{-n}}{-n} e^{-int} + \frac{(-1)^n}{n} e^{int} = \frac{2i(-1)^n}{n} \sin nt.$$

Vi har alltså

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^n}{n} \sin nt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nt.$$

Att det blev en ren sinusserie beror naturligtvis på att funktionen f är udda.

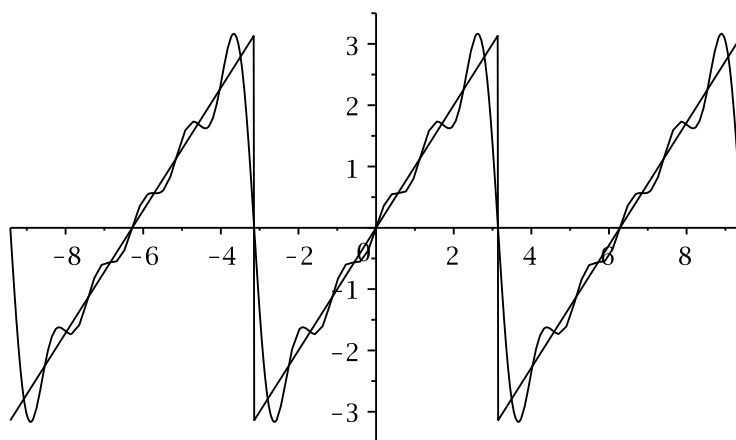
Låt oss slutligen plocka fram amplitud-fasvinkelformen. Vi har $A_0 = \hat{f}(0) = 0$, och för $n \geq 1$ är $A_n = 2|\hat{f}(n)| = 2/n$ och

$$\phi_n = \arg \hat{f}(n) = \arg(-1)^n i = \begin{cases} -\pi/2 & \text{om } n \text{ är udda} \\ \pi/2 & \text{om } n \text{ är jämnt.} \end{cases}$$

Detta innebär att

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2k-1} \cos((2k-1)t - \pi/2) + \frac{2}{2k} \cos(2kt + \pi/2) \right).$$

□



Figur 4.1. Funktionen f i exempel 4.1.1 och delsumman $\sum_{n=1}^5 \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nt$ till funktionens fourierserie.

Sinus- och cosinusserier

Som vi redan noterat innehåller den trigonometriska versionen av en udda funktions fourierserie enbart sinustermer, medan en jämn funktions fourierserie bara har cosinustermer (och konstantterm). Vi kan utnyttja detta för att utveckla godtyckliga L^1 -funktioner på intervallet $[0, \pi]$ i rena sinusserier eller rena cosinusserier.

Antag $f \in L^1([0, \pi])$, och utvidga f till en jämn 2π -periodisk funktion \tilde{f} genom att definiera $\tilde{f}(-t) = \tilde{f}(t) = f(t)$ för $0 \leq t \leq \pi$. Då är alla sinuskoefficienter i fourierserieutvecklingen av \tilde{f} lika med noll. Det följer att vi kan representera $f(t)$ som

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$$

i alla punkter $t \in [0, \pi]$ där serien konvergerar mot $f(t)$.

På liknande sätt erhåller vi, genom att utvidga f till en udda 2π -periodisk funktion \tilde{f} (vilket kan innebära att vi tvingas bortse från de ursprungliga funktionsvärdena i punkterna 0 och π), en representation av f i form av en ren sinusserie

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nt,$$

som konvergerar i alla punkter $t \in]0, \pi[$ där serien konvergerar mot $f(t)$.

EXEMPEL 4.1.2 Låt $f(t) = t$ för $0 \leq t \leq \pi$. Den jämna utvidgningen är $\tilde{f}(t) = |t|$ för $|t| \leq \pi$, och denna funktion har en cosinusserie som (vilket

vi kommer att kunna visa i avsnitt 4.7) konvergerar mot $\tilde{f}(t)$ för alla t . Koefficienterna är

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \, dt = \pi \quad \text{och} \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \cos nt \, dt = -\frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi n^2}, \quad n \geq 1.$$

Följaktligen är

$$t = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2} \quad \text{för } 0 \leq t \leq \pi.$$

Den udda utvidgningen \tilde{f} av f ges förstås av att $\tilde{f}(t) = t$ för $-\pi < t < \pi$. Vi beräknade fourierserien av den funktionen i exempel 4.1.1 och fann då att

$$\tilde{f}(t) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nt.$$

Serien konvergerar mot $\tilde{f}(t)$ för $-\pi < t < \pi$, varför

$$t = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nt \quad \text{om } 0 \leq t < \pi.$$

Annan period än 2π

Periodiska funktioner med annan period än 2π kan transformeras till 2π -periodiska funktioner med hjälp av linjära variabelbyten.

Formlerna förenklas något om vi inför en beteckning för *halva periodlängden*. Antag därför att funktionen f är periodisk med periodlängd $2P$, dvs. att

$$f(t + 2P) = f(t) \quad \text{för alla } t \in \mathbf{R},$$

och sätt $\Omega = \pi/P$; talet Ω kallas *grundvinkelfrekvensen*. Definiera funktionen g genom att sätta

$$g(u) = f(u/\Omega).$$

Då är $g(u + 2\pi) = f(u/\Omega + 2\pi/\Omega) = f(u/\Omega + 2P) = f(u/\Omega) = g(u)$, dvs. g är en 2π -periodisk funktion med en fourierserieutveckling på formen

$$f(u/\Omega) = g(u) \sim \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{inu},$$

där

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u) e^{-inu} \, du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u/\Omega) e^{-inu} \, du = \frac{1}{2P} \int_{-P}^P f(t) e^{-in\Omega t} \, dt,$$

och där vi förstås gjort variabelbytet $t = u/\Omega$ för att erhålla den sistnämnda integralen. Samma variabelbyte i serieutvecklingen av g ger

$$f(t) \sim \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{in\Omega t},$$

vilket är den sökta fourierserieutvecklingen av f .

Motsvarande kan förstås göras för den trigonometriska varianten av fourierserieutvecklingen, vilket resulterar i följande formler:

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t),$$

där

$$a_n = \frac{1}{P} \int_{-P}^P f(t) \cos n\Omega t \, dt \quad \text{och} \quad b_n = \frac{1}{P} \int_{-P}^P f(t) \sin n\Omega t \, dt.$$

Naturligtvis finns det för reella funktionen f också en generell amplitudfasvinkelvariant av typen

$$f \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \phi_n)$$

med $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

4.2 Fourierkoefficienternas storlek

För att fourierserien ska ha någon chans att konvergera måste termerna gå mot noll, och att detta nödvändiga (men inte tillräckliga) villkor alltid är uppfyllt är ena delen av följande sats.

Sats 4.2.1 Låt $f \in L^1(\mathbf{T})$. Då gäller

$$(a) \quad |\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1 \quad \text{och}$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(n) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Bevis. (a)} \quad |\hat{f}(n)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbf{T}} f(t) e^{-int} \, dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |f(t) e^{-int}| \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |f(t)| \, dt = \|f\|_1. \end{aligned}$$

(b) är ett specialfall av Riemann-Lebesgues lemma ($I =]-\pi, \pi]$). □

Om en periodisk funktion är kontinuerligt deriverbar, så har både funktionen och derivatan fourierserier. Nästa sats beskriver sambandet mellan dessa båda serier.

Sats 4.2.2 *Antag att $f \in \mathcal{C}^k(\mathbf{T})$. Då gäller*

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \hat{f}(n).$$

Bevis. Partiell integration ger

$$\begin{aligned} \hat{f}'(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[f(t) e^{-int} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = in \hat{f}(n). \end{aligned}$$

(Här har vi utnyttjat oss av att funktionen $f(t) e^{-int}$ är periodisk och därför har samma värde i ändpunkterna $-\pi$ och π .)

Genom iteration får vi nu $\widehat{f''}(n) = in \hat{f}'(n) = (in)^2 \hat{f}(n)$, etc. \square

Korollarium 4.2.3 *Om $f \in \mathcal{C}^k(\mathbf{T})$, så finns det en konstant M så att*

$$|\hat{f}(n)| \leq M/|n|^k$$

för alla $n \neq 0$.

Bevis. Genom att utnyttja de båda föregående satserna får man $|n^k \hat{f}(n)| = |(in)^k \hat{f}(n)| = |\widehat{f^{(k)}}(n)| \leq \|f^{(k)}\|_1$. Korollariet gäller därför med $M = \|f^{(k)}\|_1$. \square

Korollarium 4.2.4 *Antag $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{T})$. Då är fourierserien $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$*

- (i) *absolutkonvergent för varje t ;*
- (ii) *likformigt konvergent på \mathbf{T} .*

Bevis. Eftersom $|\hat{f}(n) e^{int}| = |\hat{f}(n)| \leq M/n^2$, följer det av jämförelsekriteriet att serien är absolutkonvergent och av Weierstrass majorantsats att den är likformigt konvergent på \mathbf{T} . \square

Anmärkning. Längre fram kommer vi att kunna visa mera; för varje t är seriens summa lika med $f(t)$.

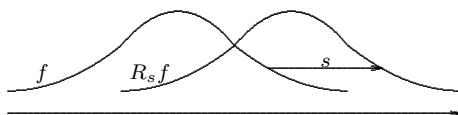
4.3 Faltning och Dirichletkärnan

Faltning

Låt f vara en funktion som är definierad på \mathbf{R} . För varje $s \in \mathbf{R}$ definierar vi en funktion $R_s f$ genom att sätta

$$R_s f(t) = f(t - s).$$

Grafen till funktionen $R_s f$ erhålls genom att translatera grafen till funktionen f s enheter åt höger. Funktionen $R_s f$ kallas därför för ett *translat* till funktionen f .



Figur 4.2. Translat

Om f är begränsad, så är självklart $R_s f$ begränsad för varje s , och $\|R_s f\|_\infty = \|f\|_\infty$. Om f tillhör L^1 , så tillhör $R_s f$ också L^1 med $\|R_s f\|_1 = \|f\|_1$.

För små värden på s ligger translatet $R_s f$ nära f i följande mening.

Sats 4.3.1 (a) Antag att funktionen f är likformigt kontinuerlig. (Så är exempelvis fallet om funktionen är kontinuerlig och periodisk, eller om den är kontinuerlig och lika med 0 utanför något begränsat intervall.) Då är

$$\lim_{s \rightarrow 0} \|R_s f - f\|_\infty = 0.$$

(b) Antag att $f \in L^1$. Då gäller att

$$\lim_{s \rightarrow 0} \|R_s f - f\|_1 = 0.$$

Bevis. (a) Att f är likformigt kontinuerlig betyder att det för varje $\epsilon > 0$ finns det ett tal $\delta > 0$ så att $|s| < \delta$ medför att $|f(t - s) - f(t)| < \epsilon$ för alla t . Detta är ekvivalent med att $|R_s f(t) - f(t)| < \epsilon$ för alla t , dvs. med att $\|R_s f - f\|_\infty < \epsilon$.

(b) Givet $f \in L^1$ och $\epsilon > 0$ börjar vi med att välja en kontinuerlig funktion g som är lika med 0 utanför något begränsat intervall $[-a, a]$ och

som uppfyller olikheten $\|f - g\|_1 < \epsilon/3$. (Här har vi använt oss av sats 2.2.1.) Om $|s| < 1$, så är $R_s g$ noll utanför intervallet $[-a-1, a+1]$, varför

$$\|R_s g - g\|_1 = \int_{-a-1}^{a+1} |R_s g(t) - g(t)| dt \leq (2a+2) \|R_s g - g\|_\infty.$$

Enligt (a) finns det ett positivt tal $\delta (< 1)$, så att $|s| < \delta$ medför att

$$(2a+2) \|R_s g - g\|_\infty < \epsilon/3.$$

Om $|s| < \delta$ så är således $\|R_s g - g\|_1 < \epsilon/3$.

Genom att utnyttja triangelolikheten för normer får vi nu följande olikhet för $|s| < \delta$:

$$\begin{aligned} \|R_s f - f\|_1 &\leq \|R_s f - R_s g\|_1 + \|R_s g - g\|_1 + \|g - f\|_1 \\ &= \|R_s(f - g)\|_1 + \|R_s g - g\|_1 + \|f - g\|_1 \\ &= 2\|f - g\|_1 + \|R_s g - g\|_1 < 2\epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon. \end{aligned}$$

Däriigenom är beviset komplett. □

Definition Låt f och g vara två funktioner i $L^1(\mathbf{T})$. Vi definierar en ny funktion $f * g$, som kallas *faltningen* av f och g , genom att sätta

$$f * g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t-s)g(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} R_s f(t)g(s) ds.$$

Det är lätt att se att funktionen $f * g$ är väldefinierad om f och g exempelvis är styckvis kontinuerliga funktioner, och att $f * g$ är 2π -periodisk. Man kan bevisa att $f * g$ alltid är väldefinierad som L^1 -funktion och att följande olikhet gäller:

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Beviset för olikheten går till på följande sätt, där det avgörande steget är att byta integrationsordning; detta steg kräver förstås någon form av motivering, men det skulle föra för långt att ge en sådan i det allmänna fallet, dvs. då f och g är godtyckliga L^1 -funktioner.

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |f * g(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t-s)g(s) ds \right| dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |f(t-s)g(s)| ds dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |f(t-s)| |g(s)| dt ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |g(s)| \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |f(t-s)| dt \right) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |g(s)| \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |f(t)| dt \right) ds \\
&= \|f\|_1 \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |g(s)| ds = \|f\|_1 \|g\|_1.
\end{aligned}$$

Sats 4.3.2 *Faltning är en kommutativ operation, dvs.*

$$f * g = g * f.$$

Bevis.

$$\begin{aligned}
f * g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)g(s) ds = \quad [\text{sätt } u = t-s] \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_{t+\pi}^{t-\pi} f(u)g(t-u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(u)g(t-u) du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t-u)f(u) du = g * f(t).
\end{aligned}$$

□

Sats 4.3.3 *Faltning är en linjär operation, dvs. om c_1 och c_2 är konstanter och f, g_1, g_2 är L^1 -funktioner, så är*

$$f * (c_1 g_1 + c_2 g_2) = c_1 (f * g_1) + c_2 (f * g_2).$$

Bevis. Uppenbart. □

EXEMPEL 4.3.1 Vi ska nu ge en mycket viktig tolkning av faltning. Definiera för $0 < \epsilon < \pi$ funktionen g_ϵ på \mathbf{T} genom att sätta

$$g_\epsilon(t) = \begin{cases} \pi/\epsilon & \text{för } |t| \leq \epsilon \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Då är $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} g_\epsilon(t) dt = 1$ och

$$f * g_\epsilon(t) = \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(t-s) ds = \frac{1}{2\epsilon} \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} f(u) du,$$

dvs. $f * g_\epsilon(t)$ är lika med medelvärdet av f över intervallet $[t-\epsilon, t+\epsilon]$. Om funktionen f är kontinuerlig i punkten t och intervallet är kort, så borde detta medelvärde ligga nära funktionsvärdet $f(t)$, dvs. vi kan förvänta oss att $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f * g_\epsilon(t) = f(t)$. Detta är också sant, och vi kommer att återkomma till denna och liknande konvergensfrågor i avsnitt 4.5 i samband med att vi studerar allmänna summationskärnor. \square

För godtyckliga icke-negativa funktioner g på \mathbf{T} med egenskapen att $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} g(t) dt = 1$, kan faltningen $f * g(t)$ uppfattas som ett viktat medelvärde av f :s funktionsvärden. Medelvärdesbildningar jämnar ut oregelbundenheter; man kan därför förvänta sig att faltningen $f * g$ ska vara mer reguljär än funktionen f . Exempelvis existerar i exemplet ovan derivatan $(f * g_\epsilon)'(t)$ i alla punkter där f är kontinuerlig; genom att derivera integralen fås $(f * g_\epsilon)'(t) = \frac{1}{2\epsilon}(f(t+\epsilon) - f(t-\epsilon))$.

En godtycklig fourierseries partialsommor kan skrivas som faltningar. För att se detta behöver vi följande enkla observation, där vi använder skrivsättet $e^{in\cdot}$ för att beteckna funktionen som i punkten t har funktionsvärdet e^{int} , dvs. $e^{in\cdot}(t) = e^{int}$.

Sats 4.3.4 Antag $f \in L^1(\mathbf{T})$. Då är $f * e^{in\cdot} = \hat{f}(n) e^{in\cdot}$.

Bevis.

$$\begin{aligned} f * e^{in\cdot}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(s) e^{in(t-s)} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(s) e^{int} e^{-ins} ds \\ &= e^{int} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(s) e^{-ins} ds = \hat{f}(n) e^{int}. \end{aligned}$$

\square

Dirichletkärnan

Definition Sätt

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{int}.$$

Funktionsföljden $(D_N)_{N=0}^\infty$ kallas *Dirichletkärnan*.

Nästa sats ger oss anledning att studera Dirichletkärnan närmare.

Sats 4.3.5 Låt för $f \in L^1(\mathbf{T})$

$$s_N(f; t) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int}$$

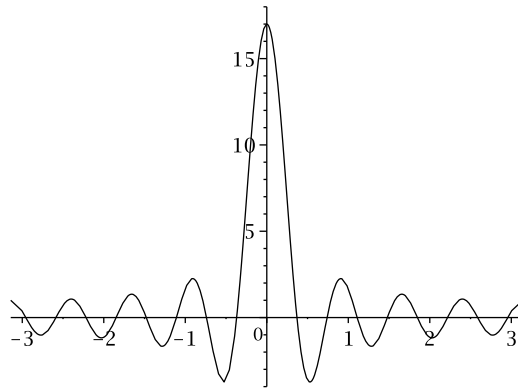
beteckna den N :te partialsumman till funktionen f :s fourierserie. Då gäller att

$$s_N(f; t) = f * D_N(t).$$

Bevis. Faltning är en linjär operation. Det följer därför omedelbart med hjälp av sats 4.3.4 att

$$f * D_N(t) = \sum_{n=-N}^N f * e^{in \cdot}(t) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int} = s_N(f; t).$$

□



Figur 4.3. Dirichletkärnan D_8 .

Sats 4.3.6 Dirichletkärnan har följande egenskaper:

- (i) $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} D_N(t) dt = 1$
- (ii) $D_N(t) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t}$
- (iii) $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\pi} D_N(t) dt = 0$, om $0 < \delta < \pi$.

Bevis. (i) Eftersom $\int_{\mathbf{T}} e^{int} dt = 0$ för $n \neq 0$, är

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} D_N(t) dt = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} e^{int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} 1 dt = 1.$$

(ii) Observera att $D_N(t)$ är en ändlig geometrisk summa med första term e^{-iNt} och kvot e^{it} . Summan kan därför lätt beräknas, och vi får

$$\begin{aligned} D_N(t) &= e^{-iNt} \frac{e^{i(2N+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{e^{i(N+1)t} - e^{-iNt}}{e^{it} - 1} \\ &= \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}} \cdot \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})t} - e^{-i(N+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}} = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t}. \end{aligned}$$

(iii) Gränsvärdet är ett specialfall av Riemann-Lebesgues lemma, ty funktionen $1/\sin \frac{1}{2}t$ tillhör $L^1([\delta, \pi])$. \square

4.4 Cesàrosummation och Fejérkärnan

Cesàrosummation

Vi ska börja med att beskriva en metod att summera serier som i många fall även tilldelar divergenta serier ändliga värden.

Låt $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ vara en godtycklig serie med partialsummor $s_n = \sum_{k=1}^n c_k$, och låt σ_n beteckna det aritmetiska medelvärde av de n första partialsummorna, dvs.

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) c_k.$$

Definition Om $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$ existerar, så säger man att serien $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ är Cesàrosummerbar eller $(C,1)$ -summerbar med $(C,1)$ -summa σ .

EXEMPEL 4.4.1 Den divergenta serien $\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - \cdots$ är Cesàrosummerbar med $(C,1)$ -summa $\frac{1}{2}$. Partialsummorna s_n är nämligen lika med 1 för udda n och lika med 0 för jämna n , varför

$$\sigma_{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \quad \text{och} \quad \sigma_{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1}.$$

Det följer att $\sigma_n \rightarrow \frac{1}{2}$ då $n \rightarrow \infty$. \square

Vad har då en konvergent serie för $(C,1)$ -summa? Svaret ges av

Sats 4.4.1 Antag att serien $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ är konvergent med summa s . Då är serien också Cesàrosummerbar med $(C,1)$ -summa s .

Bevis. Givet talet $\epsilon > 0$ måste vi visa att $|\sigma_n - s| < \epsilon$ för alla tillräckligt stora n . Vi börjar därför med att välja ett tal N med egenskapen att $|s_n - s| < \epsilon/2$ gäller för alla $n > N$, och sätter $A = |\sum_{k=1}^N (s_k - s)|$.

För $n > N$ får vi nu

$$\begin{aligned} |\sigma_n - s| &= \left| \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n - ns}{n} \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^N (s_k - s) + \sum_{k=N+1}^n (s_k - s) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^N (s_k - s) \right| + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n |s_k - s| \leq \frac{1}{n} A + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n \frac{\epsilon}{2} \\ &= \frac{1}{n} A + \frac{1}{n} (n - N) \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{A}{n} + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Om $n > 2A/\epsilon$, så är $A/n < \epsilon/2$. För $n > \max(N, 2A/\epsilon)$ får vi därför $|\sigma_n - s| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$, vilket är vad vi ville visa. \square

Anmärkning. Cesàrosummation är bara ett av många möjliga sätt som kan användas för att tilldela en oändlig serie en "summa". Följande metod kallas *Abelsummation*. Givet en serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ bildar vi funktionen

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n.$$

Om denna funktion är definierad för $0 \leq t < 1$ och $A = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t)$ existerar, så säges den ursprungliga serien vara *Abelsummerbar* med *Abelsumma* A .

Exempel 2.4.15 visar att varje konvergent serie också är Abelsummerbar och att Abelsumman är lika med seriens vanliga summa.

EXEMPEL 4.4.2 Den divergenta serien $\sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n$ är inte (C,1)-summerbar. Eftersom

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n t^n = -\frac{t}{(1+t)^2},$$

och $\lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = -\frac{1}{4}$, är serien dock Abelsummerbar med Abelsumma $-\frac{1}{4}$. \square

Fejérkärnan

Vi ska nu undersöka om fourierserier är (C,1)-summerbara. Låt

$$f(t) \sim \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int},$$

och sätt som i föregående avsnitt

$$s_n(f; t) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikt}.$$

Det aritmetiska medelvärdet $\sigma_N(f; t)$ av $s_0(f; t), s_1(f; t), \dots, s_N(f; t)$ erhålls genom att dividera summan av dessa tal med $N + 1$. Följaktligen är

$$\sigma_N(f; t) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N s_n(f; t) = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \hat{f}(n) e^{int}.$$

Enligt sats 4.3.5 är $s_n(f; t) = f * D_n(t)$, där D_n är Dirichletkärnan. Det följer att

$$(4.4.1) \quad \sigma_N(f; t) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N f * D_n(t) = f * \left(\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n\right)(t).$$

Uttrycket $\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(t)$, som är det aritmetiska medelvärdet av de $N + 1$ första Dirichletkärnorna, spelar en viktig roll i fortsättningen och förtjänar därför ett eget namn.

Definition Sätt

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(t).$$

Funktionsföljden $(F_N)_{N=0}^\infty$ kallas *Fejérkärnan*.

Fejérkärnans viktigaste egenskaper finns sammanfattade i nästa sats.

Sats 4.4.2 *Fejérkärnan (F_N) har följande egenskaper:*

- (i) $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} F_N(t) dt = 1.$
- (ii) $F_N(t) \geq 0$ för alla t .
- (iii) Antag att $0 < \delta < \pi$. Då gäller att $\sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_N(t) \rightarrow 0$, då $N \rightarrow \infty$.
- (iv) Funktionen F_N är jämn, dvs. $F_N(-t) = F_N(t)$.
- (v) $F_N(t) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin \frac{1}{2}(N+1)t}{\sin \frac{1}{2}t} \right)^2.$
- (vi) $\sigma_N(f; t) = f * F_N(t)$ för alla $f \in L^1(\pi)$.

Bevis. (i) Med hjälp av sats 4.3.6 (i) får vi

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} F_N(t) dt = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} D_n(t) dt = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N 1 = 1.$$

(v) Genom att använda oss av uttrycket för $D_n(t)$ i sats 4.3.6 kan vi

beräkna $F_N(t)$ som imaginärdelen av en geometrisk serie på följande vis:

$$\begin{aligned}
 (N+1)F_N(t) \sin \frac{1}{2}t &= \sum_{n=0}^N D_n(t) \sin \frac{1}{2}t = \sum_{n=0}^N \sin(n + \frac{1}{2})t \\
 &= \operatorname{Im} \sum_{n=0}^N e^{i(n+\frac{1}{2})t} = \operatorname{Im} e^{\frac{it}{2}} \cdot \frac{e^{i(N+1)t} - 1}{e^{it} - 1} \\
 &= \operatorname{Im} \frac{e^{i(N+1)t} - 1}{e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}}} = \operatorname{Im} \frac{\cos(N+1)t - 1 + i \sin(N+1)t}{2i \sin \frac{1}{2}t} \\
 &= \frac{1 - \cos(N+1)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(N+1)t}{\sin \frac{1}{2}t}.
 \end{aligned}$$

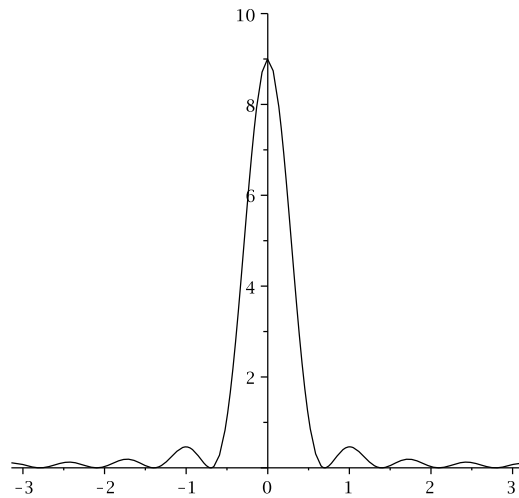
(ii) och (iv) följer förstås omedelbart från (v).

(iii) Identiteten (v) och det faktum att funktionen $\sin \frac{1}{2}t$ är växande på intervallet $[\delta, \pi]$, ger oss omedelbart följande olikhet för $\delta \leq |t| \leq \pi$:

$$F_N(t) \leq \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}t} \leq \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}\delta}.$$

Eftersom högerledet går mot 0, då $N \rightarrow \infty$, är saken klar.

(vi) är endast en omformulering av ekvation (4.4.1). □



Figur 4.4. Fejérkärnan F_8 .

4.5 Summationskärnor

Definition En *positiv summationskärna* på \mathbf{T} är en följd $(K_n)_1^\infty$ av integrerbara 2π -periodiska funktioner som uppfyller följande tre villkor:

- (i) $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} K_n(t) dt = 1$;
- (ii) $K_n(t) \geq 0$ för alla t ;
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} K_n(t) dt = 0$ för alla δ i intervallet $]0, \pi[$.

Anmärkning. Ibland kommer vi också att betrakta följande villkor:

- (iii') $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} K_n(t) = 0$ för alla δ i intervallet $]0, \pi[$.

Villkoret (iii') är uppenbarligen starkare än (iii), dvs. om (iii') är uppfyllt så är också (iii) uppfyllt.

EXEMPEL 4.5.1 Definera $K_n(t)$ på intervallet $]-\pi, \pi]$ genom att sätta

$$K_n(t) = \begin{cases} 2\pi n, & \text{om } |t| \leq 1/2n \\ 0, & \text{om } |t| \geq 1/2n. \end{cases}$$

Då är villkoren (i)–(iii) (och det starkare villkoret (iii')) uppfyllda. Följden $(K_n)_1^\infty$ är således en positiv summationskärna.

Vi stötte på kärnan (K_n) redan i exempel 4.3.1, där vi definierade funktionerna k_ϵ ; observera att $K_n = k_{1/n}$. Resonemanget i detta exempel antydde att $\lim_{n \rightarrow \infty} f * K_n(t) = f(t)$ för alla kontinuitetspunkter t till f . Vi kommer strax att bevisa att så också är fallet. \square

EXEMPEL 4.5.2 Det följer med en gång ur sats 4.4.2 att Fejérkärnan $(F_n)_0^\infty$ är en positiv summationskärna. \square

Sats 4.5.1 (a) Antag att $f \in L^1(\mathbf{T})$ och att $(K_n)_1^\infty$ är en positiv summationskärna. Då är

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f * K_n - f\|_1 = 0.$$

Om den positiva summationskärnan uppfyller villkoret (iii'), så gäller dessutom:

- (b) Om f är kontinuerlig i punkten t , så är $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n * f(t) = f(t)$.
- (c) Om f är kontinuerlig på ett slutet delintervall I av \mathbf{T} , så går faltningen $f * K_n(t)$ likformigt mot $f(t)$ på I då $n \rightarrow \infty$.

Bevis. (a) Genom att utnyttja villkoret (i) får man först

$$\begin{aligned} f * K_n(t) - f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t-s) K_n(s) ds - f(t) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} K_n(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} (f(t-s) - f(t)) K_n(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} (R_s f(t) - f(t)) K_n(s) ds. \end{aligned}$$

Genom att ta absolutbeloppet, använda triangelolikheten för integraler samt utnyttja att kärnan är icke-negativ, erhåller man sedan följande olikhet

$$(4.5.1) \quad |f * K_n(t) - f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |R_s f(t) - f(t)| K_n(s) ds$$

Låt nu $\epsilon > 0$ vara givet. Enligt sats 4.3.1 finns det ett positivt tal δ så att $\|R_s f - f\|_1 < \epsilon$ gäller för alla s som uppfyller $|s| < \delta$. Vidare gäller på grund av triangelolikheten för normen att $\|R_s f - f\|_1 \leq \|R_s f\|_1 + \|f\|_1 = 2\|f\|_1$ för alla s . Genom att integrera olikheten (4.5.1), kasta om integrationsordningen och sedan dela upp den erhållna integralen över \mathbf{T} i en summa av två integraler, den ena över intervallet $[-\delta, \delta]$ (där $\|R_s f - f\|_1$ är litet), och den andra över $\mathbf{T} \setminus [-\delta, \delta]$, erhålles följande kedja av likheter och olikheter:

$$\begin{aligned} \|f * K_n - f\|_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |f * K_n(t) - f(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |R_s f(t) - f(t)| K_n(s) ds dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |R_s f(t) - f(t)| K_n(s) dt ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} \|R_s f - f\|_1 K_n(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|s| \leq \delta} \|R_s f - f\|_1 K_n(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} \|R_s f - f\|_1 K_n(s) ds \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|s| \leq \delta} \epsilon K_n(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} 2\|f\|_1 K_n(s) ds \\ &\leq \epsilon \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} K_n(s) ds + \frac{\|f\|_1}{\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} K_n(s) ds \\ &= \epsilon + \frac{\|f\|_1}{\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} K_n(s) ds. \end{aligned}$$

Här går, på grund av villkoret (iii), den sista integralen mot 0, då $n \rightarrow \infty$. Följaktligen finns det ett tal N så att $\|f * K_n - f\|_1 < 2\epsilon$ för alla $n > N$. Detta bevisar påstående (a).

(b) Om f är kontinuerlig i punkten t , så finns det, givet $\epsilon > 0$, ett tal $\delta > 0$ så att $|R_s f(t) - f(t)| = |f(t-s) - f(t)| < \epsilon$ för alla s som uppfyller $|s| < \delta$. Med utgångspunkt från olikheten (4.5.1) får vi nu, genom att dela upp integralen i två delar som förut,

$$\begin{aligned}
 |f * K_n(t) - f(t)| &\leq \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|s| \leq \delta} |R_s f(t) - f(t)| K_n(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} |R_s f(t) - f(t)| K_n(s) ds \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|s| \leq \delta} \epsilon K_n(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} |R_s f(t)| K_n(s) ds \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} |f(t)| K_n(s) ds \\
 &\leq \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} K_n(s) ds + \sup_{\delta \leq |s| \leq \pi} K_n(s) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |f(t-s)| ds \\
 &\quad + \frac{|f(t)|}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} K_n(s) ds \\
 &= \epsilon + \|f\|_1 \cdot \sup_{\delta \leq |s| \leq \pi} K_n(s) + \frac{|f(t)|}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} K_n(s) ds.
 \end{aligned}$$

Enligt våra antaganden går $\sup_{\delta \leq |s| \leq \pi} K_n(s)$ och $\int_{\delta \leq |s| \leq \pi} K_n(s) ds$ mot 0 då $n \rightarrow \infty$. Det finns därför ett tal N så att $n > N$ medför att

$$|f * K_n(t) - f(t)| < 2\epsilon.$$

Därmed är påstående (b) bevisat.

(c) Om f är kontinuerlig på ett slutet delintervall I , så är f automatiskt likformigt kontinuerlig på I , dvs. vi kan i beviset för (b) välja ett tal δ som fungerar för varje $t \in I$. Eftersom $|f(t)|$ är begränsad på I , kan vidare talet N väljas oberoende av $t \in I$. Detta innebär att konvergensen är likformig. \square

Anmärkning 1. För jämna summationskärnor (K_n) kan påstående (b) i satsen skärpas på följande vis:

$$\begin{aligned}
 (b') \text{ Antag att } A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} \text{ existerar. Då är} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} f * K_n(t) = A.
 \end{aligned}$$

För att visa detta startar vi med likheten

$$f * K_n(t) - A = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} (f(t-s) - A) K_n(s) ds$$

och skriver integralen över \mathbf{T} som en summa av två integraler, den ena över $[-\pi, 0]$ och den andra över $[0, \pi]$. I integralen över $[-\pi, 0]$ gör vi variabelbytet $u = -s$, samt utnyttjar att K_n är jämn. En enkel räkning leder till resultatet

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 (f(t-s) - A) K_n(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(t+s) - A) K_n(s) ds.$$

Genom att addera de två delarna får man

$$f * K_n(t) - A = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(t+s) + f(t-s) - 2A) K_n(s) ds.$$

Resten av beviset fortgår nu på liknande sätt som beviset ovan av (b), ty

$$|f(t+s) + f(t-s) - 2A| < \epsilon$$

för $0 < s < \delta$, förutsatt att δ är tillräckligt litet.

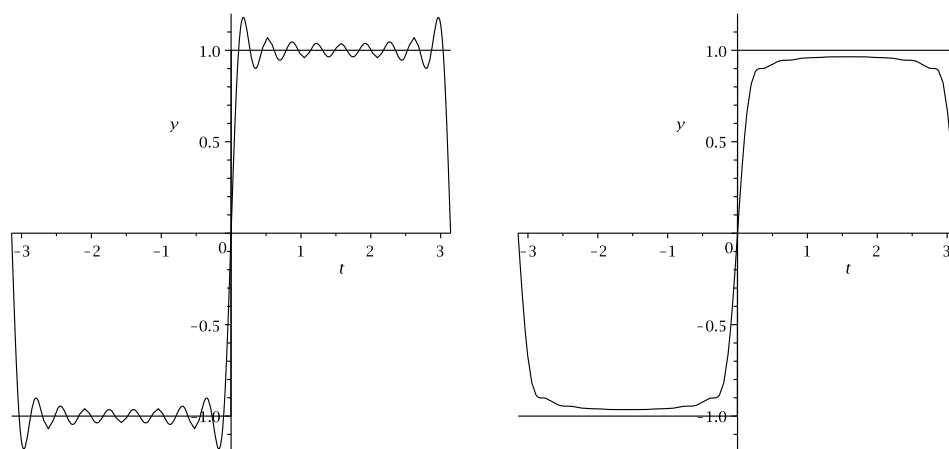
Anmärkning 2. Villkoret att kärnorna K_n skall vara icke-negativa är inte så väsentligt för giltigheten av sats 4.5.1. Satsen gäller i själva verket (med ytterst små modifikation av beviset) om vi ersätter villkoren (i)–(iii') i definitionen av summationskärnor med villkoren:

- (i) $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} K_n(t) dt = 1$;
- (ii) $\|K_n\|_1 \leq C$ för någon konstant C ;
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |K_n(t)| dt = 0$ för alla δ i intervallet $]0, \pi[$.
- (iii') $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} |K_n(t)| = 0$ för alla δ i intervallet $]0, \pi[$.

För positiva summationskärnor följer naturligtvis (ii) av (i).

4.6 Entydighet

Fejérkärnan $(F_N)_0^\infty$ är en jämn positiv summationskärna som uppfyller det starkare villkoret (iii'). Eftersom $\sigma_N(f; t) = f * F_N(t)$, följer därför följande resultat om Cesàrosummation av fourierserier direkt ur sats 4.5.1 och anmärkning 1 efter samma sats.



Figur 4.5. I den vänstra figuren partialsumman $s_8(f; t)$ och i den högra figuren Fejérsumman $\sigma_8(f; t)$ för funktionen $f(t) = \operatorname{sgn} t$, $|t| < \pi$.

Sats 4.6.1 Antag $f \in L^1(\mathbf{T})$.

(a) Fejér-medelvärdena $\sigma_N(f; t)$ konvergerar mot $f(t)$ i L^1 , dvs.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\sigma_N(f; \cdot) - f\|_1 = 0.$$

(b) Om t är en kontinuitetspunkt hos f , så är $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(f; t) = f(t)$.

(c) Mer allmänt gäller att om $\lim_{s \rightarrow 0} (f(t+s) + f(t-s))$ existerar, så är

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(f; t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2}.$$

(d) Om f är kontinuerlig på det slutna intervallet I , så konvergerar $\sigma_N(f; t)$ likformigt mot $f(t)$ på I , då $N \rightarrow \infty$.

Följande viktiga sats, som innebär att en kontinuerlig funktion är entydigt bestämd av sina fourierkoefficienter, följer nu lätt.

Sats 4.6.2 (Entydighetssatsen) (a) Antag att $f \in L^1(\mathbf{T})$ och att $\hat{f}(n) = 0$ för alla $n \in \mathbf{Z}$. Då är $\|f\|_1 = 0$, dvs. $f(t) = 0$ för alla t utanför någon nollmängd. Speciellt är alltså $f(t) = 0$ i alla kontinuitetspunkter t till funktionen.

(b) Låt $f, g \in L^1(\mathbf{T})$, och antag att $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ för alla $n \in \mathbf{Z}$. Då är $\|f - g\|_1 = 0$ (dvs. $f(t) = g(t)$ utom på en nollmängd). Speciellt är $f(t) = g(t)$ i alla punkter t där båda funktionerna är kontinuerliga.

Bevis. (a) Eftersom $\hat{f}(n) = 0$ för alla n , är $s_N(f; t) = 0$ och därmed också $\sigma_N(f; t) = 0$ för alla N och alla t . Följaktligen är $\|\sigma_N(f; \cdot) - f\|_1 = \|f\|_1$. Men enligt föregående sats går $\|\sigma_N(f; \cdot) - f\|_1$ mot noll då $N \rightarrow \infty$. Således är $\|f\|_1 = 0$.

(b) följer av (a) genom att man betraktar differensen $f - g$. □

Om en serie konvergerar i traditionell mening, så sammanfaller summan med seriens Cesàrosumma. Om vi av någon anledning råkar veta att fourierserien till en funktion f konvergerar i en punkt t , där funktionen är kontinuerlig, så vet vi därför också (på grund av sats 4.6.1 (b)) att fourierseriens summa är lika med $f(t)$.

Följande sats utgör ett specialfall av denna observation.

Sats 4.6.3 *Om $f \in \mathcal{C}(\mathbf{T})$ har fourierkoefficienter som uppfyller villkoret*

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty,$$

så är fourierserien konvergent och

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int} \quad \text{för alla } t \in \mathbf{T}.$$

Bevis. Fourierserien är absolutkonvergent för alla t , så resonemanget omedelbart före satsen är tillämpligt. □

4.7 Punktvis konvergens

Dirichletkärnan $(D_N)_0^\infty$ är olyckligtvis inte en positiv summationskärna och uppfyller heller inte de svagare villkor som beskrivs i anmärkning 2 i slutet av avsnitt 4.5 (se övning 4.19), så vi kan inte tillämpa sats 4.5.1 på $s_N(f; t) = f * D_N(t)$ för att erhålla resultat om punktvis konvergens (eller L^1 -konvergens) för fourierserier. För att fourierserien skall konvergera punktvis krävs det ytterligare villkor på funktionen f , och vi skall nu härleda ett tillräckligt sådant.

Antag som alltid att $f \in L^1(\mathbf{T})$, och låt till att börja med A vara ett godtyckligt tal. Genom att utnyttja att $D_N(t)$ är en jämn funktion och att $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} D_N(t) dt = 1$ ser vi att

$$\begin{aligned}
s_N(f; t) - A &= f * D_N(t) - A = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} (f(t-s) - A) D_N(s) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 (f(t-s) - A) D_N(s) ds \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(t-s) - A) D_N(s) ds.
\end{aligned}$$

Vi skriver om integralen över $[-\pi, 0]$ genom att göra variabelbytet $u = -s$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 (f(t-s) - A) D_N(s) ds &= -\frac{1}{2\pi} \int_\pi^0 (f(t+u) - A) D_N(-u) du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(t+s) - A) D_N(s) ds.
\end{aligned}$$

Genom att addera detta till den ursprungliga integralen över $[0, \pi]$ får vi

$$\begin{aligned}
s_N(f; t) - A &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(t+s) + f(t-s) - 2A) D_N(s) ds \\
&= I_1(N) + I_2(N),
\end{aligned}$$

där

$$\begin{aligned}
I_1(N) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta \frac{f(t+s) + f(t-s) - 2A}{\sin \frac{1}{2}s} \sin(N + \frac{1}{2})s ds, \\
I_2(N) &= \frac{1}{2\pi} \int_\delta^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s) - 2A}{\sin \frac{1}{2}s} \sin(N + \frac{1}{2})s ds
\end{aligned}$$

och $0 < \delta < \pi$.

Vi ska nu härleda ett villkor som medför att $\lim_{N \rightarrow \infty} (s_N(f; t) - A) = 0$, dvs. att $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(f; t) = A$.

Vi betraktar för den skull först integralen $I_2(N)$. Eftersom funktionen $\sin \frac{1}{2}s$ är nedåt begränsad av konstanten $c = \sin \frac{\delta}{2} > 0$ på intervallet $[\delta, \pi]$, är funktionen

$$g(s) = \frac{f(t+s) + f(t-s) - 2A}{\sin \frac{1}{2}s}$$

till sitt absolutbelopp begränsad av $c^{-1}(|f(t+s)| + |f(t-s)| + 2|A|)$ på samma intervall. Det följer därför att $g \in L^1([\delta, \pi])$, så Riemann-Lebesgues lemma ger att $I_2(N) \rightarrow 0$, då $N \rightarrow \infty$.

Det återstår att betrakta $I_1(N)$. Sätt

$$h(s) = \frac{f(t+s) + f(t-s) - 2A}{\sin \frac{1}{2}s}.$$

Om h tillhör $L^1([0, \delta])$, så kan vi igen använda Riemann-Lebesgues lemma för att dra slutsatsen att $\lim_{N \rightarrow \infty} I_1(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta h(s) \sin(N + \frac{1}{2})s \, ds = 0$.

Som en ytterligare förenkling sätter vi nu

$$h(s) = \frac{f(t+s) + f(t-s) - 2A}{s} \cdot \frac{s}{\sin \frac{1}{2}s} = k(s) \cdot \frac{s}{\sin \frac{1}{2}s}.$$

Faktorn $s/\sin \frac{1}{2}s$ är positiv och begränsad av någon konstant C på intervallet $]0, \pi]$, ty den är kontinuerlig på intervallet och har ett gränsvärde ($= 2$) då $s \rightarrow 0$. Det följer att $|h(s)| \leq C|k(s)|$ på $]0, \delta]$, så därför ligger h i $L^1([0, \delta])$ om (och faktiskt endast om) k tillhör $L^1([0, \delta])$.

Varje villkor som innebär att

$$(4.7.1) \quad \int_0^\delta |k(s)| \, ds = \int_0^\delta \left| \frac{f(t+s) + f(t-s) - 2A}{s} \right| \, ds < \infty$$

för något $\delta > 0$, medför således att $I_1(N) \rightarrow 0$ då $N \rightarrow \infty$. Ett enkelt sådant villkor är villkoret att gränsvärdet

$$(4.7.2) \quad \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{f(t+s) + f(t-s) - 2A}{s}$$

existerar, ty detta innebär att funktionen $k(s)$ är begränsad nära $s = 0$.

Sammanfattningsvis har vi alltså visat att $s_N(f; t) \rightarrow A$ då $N \rightarrow \infty$, om villkoret (4.7.2) är uppfyllt.

För att erhålla ett mer användbart villkor inför vi följande beteckningssätt för ensidiga gränsvärden till en funktion f i en punkt t_0 :

$$f(t_0-) = \lim_{s \rightarrow 0+} f(t_0 - s), \quad f(t_0+) = \lim_{s \rightarrow 0+} f(t_0 + s).$$

Med den "generaliserade högerderivatan" $f'_+(t_0)$ i en punkt t_0 , där $f(t_0+)$ existerar, menas gränsvärdet

$$f'_+(t_0) = \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{f(t_0 + s) - f(t_0+)}{s}.$$

På liknande sätt definieras den "generaliserade vänsterderivatan"

$$f'_-(t_0) = \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{f(t_0 - s) - f(t_0-)}{-s}.$$

Utrustade med dessa definitioner kan vi nu formulera följande sats.

Sats 4.7.1 Antag att $f \in L^1(\mathbf{T})$, och låt t vara en punkt där de båda ensidiga gränsvärdena $f(t-)$ och $f(t+)$ och de två generaliserade ensidiga derivatorna $f'_-(t)$ och $f'_+(t)$ existerar. Då konvergerar fourierserien till f i punkten t mot $\frac{1}{2}(f(t+) + f(t-))$.

Bevis. Sätt $A = \frac{1}{2}(f(t+) + f(t-))$. Våra antaganden medför att

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{f(t+s) + f(t-s) - 2A}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{f(t+s) - f(t+)}{s} \\ &\quad - \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{f(t-s) - f(t-)}{-s} = f'_+(t) - f'_-(t) \end{aligned}$$

existerar, dvs. villkoret (4.7.2) är uppfyllt. \square

EXEMPEL 4.7.1 Betrakta den 2π -periodiska funktionen f , som definieras av att

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t < 0 \\ t, & 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Funktionen f är kontinuerlig utom i punkten π , där vi har en språngdiskontinuitet eftersom $f(\pi-) = f(\pi) = \pi$, medan $f(\pi+) = \lim_{t \rightarrow -\pi-} f(t) = 0$. Funktionen är deriverbar utom i punkterna 0 och π , men de generaliserade ensidiga derivatorna existerar i dessa punkter. Dessa derivator är $f'_-(0) = 0$, $f'_+(0) = 1$, $f'_-(\pi) = 1$ och $f'_+(\pi) = 0$. Förutsättningarna i sats 4.7.1 är därför uppfyllda i varje punkt, så funktionens fourierserie konvergerar mot $f(t)$ för $-\pi < t < \pi$, och mot $\pi/2$ för $t = \pi$.

Genom att utnyttja sinus/cosinus-versionen erhåller vi följande fourierkoefficienter till f :

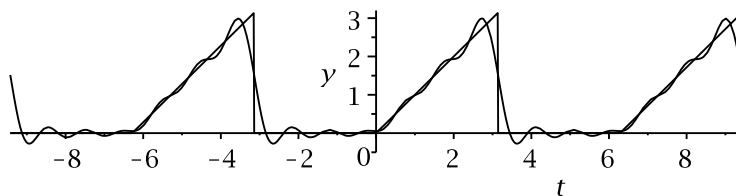
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t \cos t \, dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n = 0 \\ \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} & n \geq 1 \end{cases} \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t \sin t \, dt = \frac{(-1)^{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

Följaktligen är

$$f(t) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n \text{ udda}} \frac{\cos nt}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nt.$$

Konvergens i punkten $t = 0$ innebär att

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n \text{ udda}} \frac{1}{n^2},$$



Figur 4.6. Funktionen f i exempel 4.7.1 och partialsumman $s_6(f, t)$.

dvs.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{n \text{ udda}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Med hjälp av detta kan vi också beräkna summan $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ på följande sätt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \text{ udda}} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \text{ jämn}} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \text{ udda}} \frac{1}{n^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Det följer att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Genom att sätta $t = \pi/2$ erhåller vi istället följande intressanta summa:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}. \quad \square$$

Huruvida en fouriersserie konvergerar i en punkt beror enbart på funktionens uppförande i en godtyckligt liten omgivning av punkten. Detta är innebörden av följande sats.

Sats 4.7.2 (Lokaliseringsprincipen)

(a) Låt $f \in L^1(\mathbf{T})$ och antag att $f(t) = 0$ för $|t - t_0| < \delta$, där δ är ett godtyckligt litet positivt tal. Då konvergerar fouriersserien till f mot 0 i punkten t_0 .

(b) Låt $f, g \in L^1(\mathbf{T})$ och antag att $f(t) = g(t)$ för alla t i någon öppen omgivning av t_0 . Då är antingen fouriersserierna till f och g båda konvergenta i punkten t_0 med samma gränsvärde, eller också är båda serierna divergenta.

Bevis. (a) är en omedelbar konsekvens av sats 4.7.1, och (b) följer genom att tillämpa (a) på differensen $f - g$, eftersom $s_n(f; t) = s_n(f - g; t) + s_n(g; t)$. \square

Lokaliseringsprincipen är onekligen överraskande, ty genom att ändra en funktion utanför en godtyckligt liten omgivning av en punkt kan vi förändra samtliga koefficienter i fourierserien, men detta påverkar alltså inte fourierseriens summa i punkten.

Vi avslutar det här avsnittet med några konvergensresultat, vars bevis är alltför komplicerade för att ges här.

Den svenske matematikern Lennart Carleson visade 1966 följande sats.

Sats (Carleson) *Den mängd av punkter där Fourierserien till en $L^2(\mathbf{T})$ -funktion **inte** konvergerar är en nollmängd.*

Rummet $L^2(\mathbf{T})$ förklaras i nästa kapitel. Eftersom alla kontinuerliga funktioner på \mathbf{T} ligger i $L^2(\mathbf{T})$ följer speciellt:

Sats *Den mängd av punkter där Fourierserien till en kontinuerlig funktion på \mathbf{T} **inte** konvergerar är en nollmängd.*

Resultatet i satsen ovan är det bästa man kan hoppas på på grund av nästa sats.

Sats (Kahane–Katznelson) *För varje nollmängd E på \mathbf{T} finns det en kontinuerlig funktion vars fourierserie divergerar för alla punkter i E .*

Och för allmänna L^1 -funktioner har vi följande negativa resultat.

Sats (Kolmogorov) *Det finns en $L^1(\mathbf{T})$ -funktion vars fourierserie divergerar punktvis överallt.*

Fejérmedelvärdena $\sigma_n(f; \cdot)$ till en L^1 -funktion f konvergerar ju mot funktionen i L^1 -norm enligt sats 4.6.1. Motsvarande gäller dock inte för fourierseriens partialsummor $s_n(f; \cdot)$.

Sats *Det finns en $L^1(\mathbf{T})$ -funktion vars fourierserie inte konvergerar mot funktionen i L^1 -mening.*

För bevisen av samtliga satser ovan, förutom Carlesons sats, hänvisas till Yitzhak Katznelson, *An introduction to Harmonic Analysis*, John Wiley, 1968.

4.8 Gibbs fenomen

Låt f vara den 2π -periodiska fyrkantsvågfunktionen, som definieras som $f(t) = 1$ för $0 < t < \pi$, $f(t) = -1$ för $-\pi < t < \pi$, och $f(0) = 0$. Ef-

tersom funktionen är udda, har den en sinusserie med koefficienter

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nt \, dt = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n),$$

som är noll för jämna n . Det följer av sats 4.7.1 att fourierserien är konvergent och att

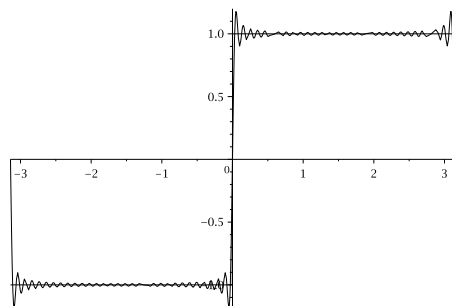
$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}$$

för alla t .

Betrakta nu seriens partialsummor

$$S_N(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^N \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}$$

på intervallet $]0, \pi[$. Vi vet att $S_N(t) \rightarrow 1$, då $N \rightarrow \infty$, men om vi ritar graferna till S_N kommer vi att upptäcka ett märkligt beteende. $S_N(t)$ har ett maximum i en punkt $t_N > 0$ nära 0, och t_N går mot 0 då N växer, men maximivärdet närmar sig inte 1 utan förblir istället större än 1.17.



Figur 4.7. Gibbs fenomen: Fyrkantsvågen $f(t)$ och partialsumman $S_{30}(t)$.

Låt oss analysera situationen i detalj. Derivatans till S_N kan lätt beräknas på följande sätt:

$$\begin{aligned} S'_N(t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^N \cos(2n+1)t = \frac{4}{\pi} \cdot \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^N e^{i(2n+1)t} \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \cdot \operatorname{Re} \left(e^{it} \frac{e^{i(2N+2)t} - 1}{e^{i2t} - 1} \right) = \frac{4}{\pi} \cdot \operatorname{Re} \frac{e^{i(2N+2)t} - 1}{e^{it} - e^{-it}} \\ &= \frac{4}{\pi} \cdot \operatorname{Re} \frac{i - ie^{i(2N+2)t}}{2 \sin t} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin(2N+2)t}{\sin t}. \end{aligned}$$

Det första nollstället i intervallet $]0, \pi[$ till derivatan S'_N ligger i punkten $t_N = \pi/(2N+2)$. Genom att betrakta derivatans tecken på ömse sidor om punkten drar vi slutsatsen att t_N är en maximipunkt. För att beräkna maximivärdet noterar vi först att $S_N(0) = 0$, varav följer att

$$(4.8.1) \quad S_N(t_N) = \int_0^{t_N} S'_N(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{t_N} \frac{\sin(2N+2)t}{\sin t} dt.$$

Vi vill undersöka gränsvärdet av $S_N(t_N)$ då $N \rightarrow \infty$. Eftersom integralen i (4.8.1) är en smula komplicerad på grund av nämnaren, approximerar vi den med den enklare integralen

$$\begin{aligned} I_N &= \frac{2}{\pi} \int_0^{t_N} \frac{\sin(2N+2)t}{t} dt = \quad [\text{sätt } u = (2N+2)t] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du = I. \end{aligned}$$

Integralerna I_N har med andra ord det konstanta värdet I , och en numerisk beräkning ger vid handen att $I \approx 1.179$.

Härnäst noterar vi att

$$S_N(t_N) - I = \frac{2}{\pi} \int_0^{t_N} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) \sin(2N+2)t dt.$$

Funktionen

$$g(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = \frac{t - \sin t}{t \sin t}$$

går mot 0 då $t \rightarrow 0$, så dess absoluta värde är därför säkert mindre än 1 på intervallet $[0, t_N]$, bara N är tillräckligt stort. Slutsatsen blir att

$$|S_N(t_N) - I| \leq \frac{2}{\pi} \cdot t_N = \frac{1}{N+1}.$$

Följaktligen konvergerar $S_N(t_N)$ mot I då $N \rightarrow \infty$.

Eftersom funktionen S_N är udda, har den ett minimum i punkten $-t_N$, och minimivärdet är approximativt lika med -1.179 för stora N .

Fastän funktionen f har ett språng i origo som är lika med 2 enheter, kommer således partialsummorna S_N i en omgivning av origo att approximera ett vertikalt segment av ungefärlig längd 2.358, då N går mot oändligheten. Detta kallas *Gibbs fenomen*.

Samma fenomen inträffar vid varje språngdiskontinuitet. Genom en translation kan vi förstås flytta språngdiskontinuiteten till origo. Låt därför g vara en godtycklig funktion som är kontinuerlig i en omgivning av 0 bortsett från

en språngdiskontinuitet i 0, och antag att g uppfyller villkoren i sats 4.7.1 i omgivningen. Låt δ vara storleken av språnget, dvs. $\delta = g(0+) - g(0-)$, och bilda funktionen $h(t) = g(t) - \delta f(t)$, där f är fyrkantsvågfunktionen som vi just har undersökt. Då är förstås $h(0+) = h(0-)$, så funktionen h är kontinuerlig i 0 om vi definierar funktionsvärdet $h(0)$ på rätt sätt. Dessutom har h vänster- och högerderivator i 0. Fourierserien till h konvergerar därför likformigt mot h på något intervall kring 0. Eftersom $s_N(g; t) = s_N(h; t) + \delta s_N(f, t)$, och partialsummorna $s_N(h, t)$ konvergerar på ett snällt sätt, kommer partialsummorna till g att uppföra sig som partialsummorna för fyrkantsvågfunktionen δf .

4.9 Weierstrass approximationssats

Polynom är enkla funktioner eftersom deras värden kan beräknas exakt med enbart elementära aritmetiska räkneoperationer. Det är därför av stor betydelse att varje kontinuerlig funktion kan approximeras likformigt med polynom med godtycklig noggrannhet på slutna begränsade intervall $[a, b]$. Man uttrycker vanligtvis detta genom att säga att polynomen är *täta* i $\mathcal{C}([a, b])$. Med avseende på approximation uppför sig således polynomen i $\mathcal{C}([a, b])$ på ett liknande sätt som de rationella talen i \mathbf{R} .

Sats 4.9.1 (Weierstrass approximationssats) *Låt $I = [a, b]$ vara ett slutet, begränsat intervall. För varje $f \in \mathcal{C}(I)$ finns det en följd $(p_n)_1^\infty$ av polynom, som konvergerar likformigt mot f på I , då $n \rightarrow \infty$.*

Bevis. Det räcker att visa satsen för intervallet $I = [0, \pi]$, ty det allmänna fallet kan återföras på detta med hjälp av variabelbytet $s = \pi(t - a)/(b - a)$.

Vi börjar med att visa att vi kan approximera funktionerna $\cos kt$, där k är ett positivt heltal, likformigt på I med hjälp av polynom. Detta följer med en gång av Taylors formel med restterm, som har formen

$$\cos kt = P_{2n}(t) + R_{2n}(t),$$

där $P_{2n}(t)$ är Taylorpolynomet av grad $2n$ och resttermen har utseendet

$$R_{2n}(t) = \pm \frac{k^{2n+2} \cos k\xi}{(2n+2)!} t^{2n+2}$$

för något ξ som förstås beror av t . Resttermen uppfyller för $0 \leq t \leq \pi$ olikheten

$$|R_{2n}(t)| \leq \frac{k^{2n+2}}{(2n+2)!} |t|^{2n+2} \leq \frac{(k\pi)^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Högerledet går mot 0 då $n \rightarrow \infty$, så det följer att Taylorpolynomen $P_{2n}(t)$ konvergerar likformigt mot $\cos kt$ på I .

Låt nu f vara en godtycklig kontinuerlig funktion på intervallet $I = [0, \pi]$. Utvidga först f till en jämn funktion på $[-\pi, \pi]$; den jämna utvidgningen är förstas kontinuerlig med $f(-\pi) = f(\pi)$, så den 2π -periodiska utvidgningen är också kontinuerlig, dvs. den tillhör $\mathcal{C}(\mathbf{T})$. Eftersom funktionen är jämn, innehåller fourierseriens partialsummor $s_n(f; t)$ bara cosinustermer. Fejérsummorna $\sigma_n(f; t)$ innehåller därför också bara cosinustermer.

Enligt Fejérs sats finns det för varje $\epsilon > 0$ ett tal N så att

$$|\sigma_N(f; t) - f(t)| < \epsilon/2 \quad \text{för alla } t \in I.$$

Skriv nu $\sigma_N(f; t)$ som en summa av cosinustermer, säg

$$\sigma_N(f; t) = \sum_{k=0}^N a_k \cos kt,$$

och välj slutligen ett positivt tal η så att $\eta \sum_{k=0}^N |a_k| < \epsilon/2$.

Enligt den första delen av beviset kan varje cosinusfunktion $\cos kt$ approximeras likformigt på I med hjälp av något polynom $q_k(t)$ så att olikheten $|\cos kt - q_k(t)| < \eta$ gäller på I . Sätt $p(t) = \sum_{k=0}^N a_k q_k(t)$; då är $p(t)$ ett polynom som uppfyller olikheten

$$\begin{aligned} |f(t) - p(t)| &\leq |f(t) - \sigma_N(f; t)| + |\sigma_N(f; t) - p(t)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \sum_{k=0}^N |a_k| |\cos kt - q_k(t)| < \frac{\epsilon}{2} + \eta \sum_{k=0}^N |a_k| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

för alla $t \in I$. Därmed är beviset klart. \square

Övningsuppgifter till kapitel 4

- 4.1 Funktionen f är periodisk med period 2π . Man definierar funktionen g genom att sätta

$$g(t) = e^{2it} f(t - 3).$$

Bestäm sambandet mellan de båda funktionernas komplexa fourierkoefficienter $\hat{f}(n)$ och $\hat{g}(n)$.

- 4.2 Funktionen f är kontinuerligt deriverbar och periodisk med period 2π . Vidare är $f'(t) = 2if(t + \pi)$ för alla t . Bestäm f .

- 4.3 Funktionen f är 2π -periodisk, $f(t) = 0$ för $-\pi < t < 0$ och $f(t) = t$ för $0 \leq t \leq \pi$. Bestäm faltningen $f * \cos t$.

4.4 Undersök om följande serier har någon (C,1)-summa och bestäm densamma i förekommande fall:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} i^{k-1} \qquad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k.$$

4.5 Antag att serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ har en ändlig (C,1)-summa. Visa att i så fall är

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = 0.$$

4.6 Funktionen f är 2π -periodisk och $f(t) = e^t$ för $-\pi < t \leq \pi$.

a) Bestäm funktionens fourierserie.

b) Använd fourierserien för att beräkna summan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.

4.7 Funktionen f är 2π -periodisk, $f(t) = 0$ för $-\pi < t < 0$ och $f(t) = \sin t$ för $0 \leq t \leq \pi$.

a) Bestäm funktionens fourierserie.

b) För vilka t är fourierserien konvergent och vad är summan?

c) Beräkna summan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

4.8 Funktionen f är 2π -periodisk och $f(t) = t^2$ för $-\pi \leq t \leq \pi$.

a) Bestäm funktionens fourierserie.

b) Konvergerar fourierserien likformigt mot f på \mathbf{R} ? Motivera!

c) Beräkna summan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

4.9 Sätt $f(t) = \frac{\pi}{4}$ för $0 < t < \pi$.

a) Utveckla funktionen f i sinusserie.

b) För vilka t i intervallet $0 < t < \pi$ är sinussserien konvergent och vad är summan?

c) Beräkna summan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

4.10 Sätt $f(t) = 1 + t$ för $0 \leq t \leq \pi$.

a) Utveckla funktionen i cosinusserie.

b) För vilka t konvergerar serien mot $f(t)$.

c) Beräkna summan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

- 4.11 Bestäm fourierserien till funktionen f om funktionen är periodisk med period 2π och

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{för } |t| \leq \frac{\pi}{2} \\ |t| - \frac{\pi}{2} & \text{för } \frac{\pi}{2} < |t| \leq \pi, \end{cases}$$

samt skissera seriens summa på intervallet $[-3\pi, 3\pi]$.

- 4.12 α är ett reellt tal som inte är ett heltal. Sätt $f(t) = e^{i\alpha t}$ för $-\pi < t \leq \pi$ och utvidga f till en 2π -periodisk funktion. Visa följande två formler genom att studera funktionens fourierserie för $t = 0$ och $t = \pi$:

$$\frac{\pi}{\sin \alpha\pi} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \alpha}{\alpha^2 - n^2} \quad \text{och} \quad \pi \cot \alpha\pi = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}.$$

Om man sätter $x = \alpha\pi$, så kan formlerna också skrivas på formen

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n x}{x^2 - n^2\pi^2} \quad \text{och} \quad \cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

Jämför detta med partialbråksutveckling för rationella funktioner!

- 4.13 Bestäm en lösning till värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & (0 < x < \pi, \ t > 0) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & (t > 0) \\ u(x, 0) = 1 + \sin x & (0 < x < \pi). \end{cases}$$

- 4.14 Bestäm en lösning till värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & (0 < x < \pi, \ t > 0) \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 & (t > 0) \\ u(x, 0) = 1 + 3 \cos 4x & (0 < x < \pi). \end{cases}$$

- 4.15 Bestäm på serieform en lösning till problemet

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & (0 < x < \pi, \ t > 0) \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 & (t > 0) \\ u(x, 0) = 1 + x & (0 < x < \pi). \end{cases}$$

4.16 Lös värmeledningsekvationerna

a)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & (0 < x < \pi, \ t > 0) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & (t > 0) \\ u(x, 0) = \pi x - x^2 & (0 < x < \pi). \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u & (0 < x < \pi, \ t > 0) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & (t > 0) \\ u(x, 0) = \pi x - x^2 & (0 < x < \pi). \end{cases}$$

4.17 Bestäm en lösning till värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \sin x & (0 < x < \pi, \ t > 0) \\ u(0, t) = 0, \ u(\pi, t) = 1 & (t > 0) \\ u(x, 0) = 0 & (0 < x < \pi). \end{cases}$$

4.18 a) Visa att σ_N är en positiv operator, dvs. att om $f(t) \geq 0$ för alla t så är $\sigma_N(f; t) \geq 0$ för alla t .

b) Visa att $\|\sigma_N(f; \cdot)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ för alla begränsade funktioner f .

4.19 Visa följande normresultat för Dirichletkärnan.

$$\text{a) } \|D_N\|_\infty = 2N + 1 \qquad \text{b) } \|D_N\|_1 = \frac{4}{\pi^2} \log N + O(1).$$

Det följer att $\|D_N\|_1 \rightarrow \infty$ då $N \rightarrow \infty$, och det är detta faktum som gör att det exempelvis finns kontinuerliga funktioner med fourierserier som divergerar i vissa punkter.

4.20 För $0 \leq r < 1$ definieras den s. k. *Poissonkärnan* $P_r(t)$ genom att

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}.$$

$$\text{a) Visa att för alla } f \in L^1(\mathbf{T}) \text{ är } (P_r * f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \hat{f}(n) e^{int}.$$

$$\text{b) Visa att } P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}.$$

c) Bevisa att familjen $(P_r(t))_{0 \leq r < 1}$ är en jämn, positiv summationskärna i följande bemärkelse:

$$\text{(i) } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = 1.$$

$$\text{(ii) } P_r(t) \geq 0 \text{ för alla } t.$$

$$\text{(iii) } P_r(-t) = P_r(t).$$

$$\text{(iv) För alla } \delta > 0 \text{ gäller att } \max_{\delta \leq t \leq \pi} P_r(t) \rightarrow 0 \text{ då } r \rightarrow 1.$$

Av allmänna resultat för positiva summationskärnor följer därför följande sats:

I varje punkt t där funktionen f är kontinuerlig är

$$\lim_{r \rightarrow 1-} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \hat{f}(n) e^{int} = f(t).$$

- 4.21 Själva beteckningen (C,1)-summa antyder att det finns ett generellere begrepp, nämligen (C,k) -summan till en serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, där k är ett godtyckligt icke-negativt heltal. Här följer den rekursiva definition av detta begrepp.

Sätt $S_n(-1) = a_n$ och definiera $S_n(k)$ för $k = 0, 1, 2, \dots$ och $n = 1, 2, 3, \dots$ genom att sätta

$$S_n(k) = \sum_{j=1}^n S_j(k-1).$$

Detta innebär att $S_n(0) = \sum_{j=1}^n a_j = s_n$ är den vanliga n :te partialsumman till den givna serien, och att $S_n(1) = \sum_{j=1}^n s_j$.

För en oändlig serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gäller därför att dess summa är $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(0)$ om den är konvergent, och att dess Cesaro-summa eller (C,1)-summa är lika med $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(1)/n$ om detta gränsvärde existerar. För godtyckliga icke-negativa heltal k definieras nu generellt seriens (C,k) -summa som gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(k)}{\binom{n+k-1}{k}}$$

förutsatt att detta gränsvärde existerar. (Detta innebär speciellt att (C,0)-summan är den vanliga summan!)

Förklaringen till nämnaren i definitionen av (C,k) -summa är att för den speciella serien $1 + 0 + 0 + 0 + \dots$ är $S_n(k) = \binom{n+k-1}{k}$.

Beräkna (C,2)-summan till serien $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k$.

Kapitel 5

L^2 -teori

5.1 Inre produktrum

I det här avsnittet kommer vi att arbeta med komplexa vektorrum. Vi utgår ifrån att läsaren är bekant med reella vektorrum; i ett reellt vektorrum kan man addera vektorerna och multiplicera dem med reella tal, och för de två räkneoperationerna gäller ett antal naturliga räkneregler. Ett *komplext* vektorrum består av element som kan adderas och multipliceras med *komplexa* tal. Eftersom räknereglerna är desamma som för ett reellt vektorrum bryr vi oss inte om att skriva upp dem här.

Alla reella vektorrumsbegrepp kan också definieras för komplexa vektorrum; i deras definitioner ersätter man bara orden "reell skalär" överallt med "komplex skalär". Begreppen linjärkombination, linjärt delrum, linjärt hölje, linjärt oberoende, bas och dimension är således väldefinierade för komplexa rum.

EXEMPEL 5.1.1 Det komplexa vektorrummet \mathbf{C}^n består av alla n -tupler $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ av komplexa tal. Addition i \mathbf{C}^n är förstås definierad som vanlig addition av n -tupler, och multiplikation med ett komplext tal består i att multiplicera varje tal i n -tipeln med ifrågavarande komplexa tal. \square

Vektorrummet \mathbf{C}^n är ändligtdimensionellt. I den här kursen kommer vi emellertid huvudsakligen att studera vektorrum som består av funktioner eller följder, och dessa vektorrum är oändligtdimensionella.

EXEMPEL 5.1.2 Låt I vara ett delintervall av \mathbf{R} . Mängden $\mathcal{F}(I)$ av alla funktioner $f : I \rightarrow \mathbf{C}$, dvs. av alla komplexvärda funktioner som är definierade på I , utgör ett komplext vektorrum. I detta rum definieras addition av funktioner och multiplikation av en funktion med ett komplext tal på sedvanligt vis. Mängden $\mathcal{C}(I)$ av alla kontinuerliga komplexvärda funktioner på

I är också ett komplext vektorrum, och det är ett linjärt delrum av $\mathcal{F}(I)$. \square

För att kunna studera konvergens av följder av vektorer i ett vektorrum behöver man begreppet längd (eller norm). Detta begrepp kan inte definieras med hjälp av enbart vektorrumsaxiomen. Ett sätt att införa normer är att göra det via inre produkter.

Definition En *inre produkt* eller *skalärprodukt* på ett komplext vektorrum V är en komplexvärd funktion $\langle v, w \rangle$ av de två variablerna $v, w \in V$ med följande egenskaper:

- (i₁) $\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w \rangle = \alpha_1 \langle v_1, w \rangle + \alpha_2 \langle v_2, w \rangle$
- (i₂) $\langle v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \rangle = \overline{\alpha_1} \langle v, w_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle v, w_2 \rangle$
- (ii) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$
- (iii) $\langle v, v \rangle \geq 0$ med likhet om och endast om $v = 0$.

Egenskap (i₂) är naturligtvis en omedelbar konsekvens av de båda egenskaperna (i₁) och (ii). Egenskap (ii) medför att inre produkten $\langle v, v \rangle$ är reell för alla $v \in V$, något som är nödvändigt för att villkoret (iii) ska vara meningsfullt.

EXEMPEL 5.1.3 En naturlig inre produkt på vektorrummet \mathbf{C}^n definieras av

$$\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \overline{w_i}.$$

\square

EXEMPEL 5.1.4 Sätt för $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Detta gör $\langle \cdot, \cdot \rangle$ till en inre produkt på $\mathcal{C}([a, b])$. \square

Definition Med ett *inre produktrum* menas ett komplext vektorrum V försett med en inre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

I inre produktrum kan vi nu definiera en norm på följande sätt.

Definition Normen $\|v\|$ av ett element v i ett inre produktrum definieras som

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Definitionen är möjlig på grund av inre produkttegenskapen (iii), som garanterar att $\langle v, v \rangle \geq 0$.

EXEMPEL 5.1.5 De naturliga inre produkterna på \mathbf{C}^n and $\mathcal{C}[a, b]$ åtföljs av följande normer:

$$\|z\| = \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{och} \quad \|f\| = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad \square$$

Normen har några trevliga egenskaper; följande två följer direkt av definitionen av norm och definitionen av inre produkt.

Sats 5.1.1 (i) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
(ii) $\|v\| \geq 0$ med likhet om och endast om $v = 0$.

Bevis. (i) $\|\alpha v\|^2 = \langle \alpha v, \alpha v \rangle = \alpha \bar{\alpha} \langle v, v \rangle = |\alpha|^2 \|v\|^2$.

(ii) är bara en omformulering av inre produktens egenskaper (iii). \square

Normer i inre produktrum uppfyller också en motsvarighet till triangelolikheten. För att bevisa denna behöver man följande olikhet.

Sats 5.1.2 (Cauchy–Schwarz olikhet) $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$.

Bevis. Olikheten är trivialt sann om $v = 0$. Antag därför att $v \neq 0$ och sätt $f(\lambda) = \|\lambda v + w\|^2$. Då är $f(\lambda) \geq 0$ för alla $\lambda \in \mathbf{C}$. Med hjälp av normens definition och inre produktens egenskaper erhåller vi

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \langle \lambda v + w, \lambda v + w \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle + \lambda \langle v, w \rangle + \bar{\lambda} \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= |\lambda|^2 \|v\|^2 + \lambda \langle v, w \rangle + \bar{\lambda} \overline{\langle v, w \rangle} + \|w\|^2 \\ &= |\lambda|^2 \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle v, w \rangle) + \|w\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Välj nu speciellt $\lambda = \lambda_0 = -\overline{\langle v, w \rangle} / \|v\|^2$. Detta resulterar i olikheten $f(\lambda_0) = \|w\|^2 - |\langle v, w \rangle|^2 / \|v\|^2 \geq 0$, som efter förenkling ger oss Cauchy–Schwarz olikhet. \square

Sats 5.1.3 (Triangelolikheten) För alla vektorer v och w i ett inre produktrum gäller olikheten

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Bevis. Cauchy–Schwarz olikhet i kombination med den vanliga triangelolikheten för komplexa tal ger

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\ &\leq \|v\|^2 + |\langle v, w \rangle| + |\langle w, v \rangle| + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2\|v\| \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2. \end{aligned}$$

Om $\|v + w\| \neq 0$, så får man nu den sökta triangelolikheten genom att dividera båda sidor av olikheten ovan med $\|v + w\|$, och om $\|v + w\| = 0$ är triangelolikheten trivialt sann. \square

Normen är förstås per definition entydigt bestämd av den inre produkten. Omvänt är den inre produkten bestämd av normen, ty vi har följande resultat.

Sats 5.1.4 $\langle v, w \rangle = \frac{1}{4} (\|v + w\|^2 + i\|v + iw\|^2 - \|v - w\|^2 - i\|v - iw\|^2).$

Bevis. Utveckla högerledet genom att använda definitionen av norm och räkneregler för inre produkt. \square

Av föregående sats följer som korollarium att en normbevarande linjär avbildning också bevarar den inre produkten. Mer precist har vi

Sats 5.1.5 *Antag att $T: V \rightarrow X$ är en linjär avbildning mellan två inre produktrum V och X , och låt k vara ett positivt reellt tal. Då är följande två villkor ekvivalenta:*

- (i) $\|Tv\|^2 = k\|v\|^2$ för alla vektorer $v \in V$.
- (ii) $\langle Tv, Tw \rangle = k\langle v, w \rangle$ för alla vektorer $v, w \in V$.

Bevis. Genom att speciellt välja $w = v$ i (ii) ser vi att (ii) medför (i). Antag omvänt att (i) gäller för alla vektorer v . Med hjälp av sats 5.1.4 får vi då

$$\begin{aligned} \langle Tv, Tw \rangle &= \frac{1}{4} (\|Tv + Tw\|^2 + i\|Tv + iTw\|^2 - \|Tv - Tw\|^2 - i\|Tv - iTw\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|T(v + w)\|^2 + i\|T(v + iw)\|^2 - \|T(v - w)\|^2 - i\|T(v - iw)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (k\|v + w\|^2 + ik\|v + iw\|^2 - k\|v - w\|^2 - ik\|v - iw\|^2) \\ &= k\langle v, w \rangle, \end{aligned}$$

vilket visar att (ii) gäller. \square

5.2 ℓ^2 och L^2

I det här avsnittet ska vi presentera två viktiga oändligtdimensionella inre produktrum.

Definition Låt A vara en godtycklig delmängd av \mathbf{Z} . Mängden $\ell^2(A)$ (vilket uttalas *lilla l-två A*) består av alla funktioner $z: A \rightarrow \mathbf{C}$ som uppfyller

$$\sum_{n \in A} |z(n)|^2 < \infty.$$

Sats 5.2.1 *Med den vanliga definitionen för funktioner av addition och multiplikation med komplexa tal, dvs.*

$$(z + w)(n) = z(n) + w(n) \quad \text{och} \quad (\lambda z)(n) = \lambda z(n), \quad n \in A,$$

är $\ell^2(A)$ är ett komplext vektorrum. Rummet $\ell^2(A)$ är vidare ett inre produkttrum med följande inre produkt:

$$(5.2.1) \quad \langle z, w \rangle = \sum_{n \in A} z(n) \overline{w(n)}.$$

Motsvarande norm är

$$\|z\|_2 = \left(\sum_{n \in A} |z(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bevis. För att bevisa att $\ell^2(A)$ är ett vektorrum räcker det att visa att summan av två funktioner i $\ell^2(A)$ ligger i $\ell^2(A)$, och att produkten av en komplex skalär och en funktion i $\ell^2(A)$ ligger i $\ell^2(A)$, ty det är sedan mer eller mindre uppenbart att samtliga övriga vektorrumsaxiom (som vi ju inte specificerat ordentligt) är uppfyllda.

Låt därför z och w vara två funktioner i $\ell^2(A)$, dvs. antag att de två positiva serierna $\sum_{n \in A} |z(n)|^2$ och $\sum_{n \in A} |w(n)|^2$ konvergerar.

Uppenbarligen konvergerar då serien $\sum_{n \in A} |\lambda z(n)|^2$ för varje komplext tal λ , så funktionen λz tillhör också $\ell^2(A)$.

Genom att kombinera den elementära olikheten

$$(5.2.2) \quad 2ab \leq a^2 + b^2,$$

som gäller för alla reella tal, med triangelolikheten för komplexa tal erhåller vi olikheten

$$\begin{aligned} |z(n) + w(n)|^2 &\leq (|z(n)| + |w(n)|)^2 = |z(n)|^2 + 2|z(n)||w(n)| + |w(n)|^2 \\ &\leq 2(|z(n)|^2 + |w(n)|^2). \end{aligned}$$

Jämförelsekriteriet för positiva serier visar därför att serien

$$\sum_{n \in A} (|z(n) + w(n)|^2)$$

är konvergent. Detta innebär att funktionen $z + w$ tillhör $\ell^2(A)$.

För att se att (5.2.1) definierar en inre produkt behöver vi först visa att serien konvergerar. Men på grund av (5.2.2) gäller

$$|z(n) \overline{w(n)}| \leq \frac{1}{2} |z(n)|^2 + \frac{1}{2} |w(n)|^2,$$

och därför är serien absolutkonvergent enligt jämförelsekriteriet. Vi måste också visa att (5.2.1) uppfyller inre produktvillkoren (i)–(iii), men detta är en enkel verifikation. Exempelvis är $\langle z, z \rangle = \sum_{n \in A} |z(n)|^2 \geq 0$ med likhet om och endast om alla $z(n) = 0$, dvs. om och endast om $z = 0$. \square

Vi kommer i fortsättningen enbart att betrakta $\ell^2(A)$ för $A = \mathbf{Z}_+$ och $A = \mathbf{Z}$, och då skriver vi z_n istället för $z(n)$ och uppfattar funktionen z som en komplexvärd följd $(z_n)_{n=1}^\infty$ resp. $(z_n)_{n \in \mathbf{Z}}$. Rummet $\ell^2(\mathbf{Z})$ består med andra ord av alla komplexvärda följder $(z_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ som uppfyller $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |z_n|^2 < \infty$ och med inre produkten $\langle z, w \rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} z_n \bar{w}_n$.

Definition Rummet $L^2(\mathbf{T})$ består av alla (Lebesgue-mätbara) 2π -periodiska komplexvärda funktioner f med egenskapen

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Sats 5.2.2 $L^2(\mathbf{T})$ är ett inre produktrum med följande definition av den inre produkten:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Motsvarande norm är

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Bevis. Genom att utnyttja olikheten $|f(t) + g(t)|^2 \leq 2(|f(t)|^2 + |g(t)|^2)$ visar man lätt att $L^2(\mathbf{T})$ är slutet under addition. Eftersom slutenheten under multiplikation med skalärer är trivial, följer det att $L^2(\mathbf{T})$ är ett komplext vektorrum. Med hjälp av olikheten $|f(t)\overline{g(t)}| \leq \frac{1}{2}(|f(t)|^2 + |g(t)|^2)$ visar man sedan att integralen $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |f(t)\overline{g(t)}| dt$ är ändlig för alla L^2 -funktioner f och g , dvs. integralen som definierar den inre produkten $\langle f, g \rangle$ existerar.

Samtliga inre produkttegenskaper är trivialt uppfyllda utom en, som vi behöver kommenterar närmare. Om

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt = 0$$

så följer det inte att f är identiskt noll, ty integralen är noll så snart f är en funktion som är identiskt noll utanför en nollmängd. Om t. ex. $f(1/n) = 1$ för alla positiva heltal n och $f(t) = 0$ överallt annars på \mathbf{T} , så är $\langle f, f \rangle = 0$. Den enda utvägen ur detta dilemma är att anse att *alla sådana funktioner är lika med nollelementet i $L^2(\mathbf{T})$* . Detta innebär att vi måste definiera två funktioner f och g som *samma* element i $L^2(\mathbf{T})$ om de som funktioner bara skiljer sig åt på en nollmängd. (Det korrekta sättet att göra detta på, är att betrakta ekvivalensklasser av funktioner, men läsaren av denna kurs behöver inte bekymra sig om sådana detaljer.) \square

Sats 5.2.3 Rummet $L^2(\mathbf{T})$ är ett linjärt delrum till $L^1(\mathbf{T})$, och olikheten

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2$$

gäller för alla $f \in L^2(\mathbf{T})$.

Bevis. Antag att $f \in L^2(\mathbf{T})$, och tillämpa Cauchy–Schwarz olikhet på de båda funktionerna $|f|$ and 1; detta ger

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |f(t)| \cdot 1 \, dt = \langle |f|, 1 \rangle \leq \| |f| \|_2 \|1\|_2 = \|f\|_2 \cdot 1 = \|f\|_2 < \infty,$$

vilket bevisar den angivna olikheten och att $f \in L^1(\mathbf{T})$. \square

På grund av sats 5.2.3 har varje $L^2(\mathbf{T})$ -funktion f fourierkoefficienter. Fourierkoefficienten $\hat{f}(n)$ kan uppfattas som en inre produkt, ty

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t) e^{-int} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t) \overline{e^{int}} \, dt = \langle f, e^{in} \rangle.$$

Vi kommer att använda oss av detta viktiga faktum i kommande avsnitt.

5.3 Ortogonalitet

Definition Två vektorer v och w i ett inre produktrum kallas *ortogonal* om $\langle v, w \rangle = 0$. En vektor v kallas *normerad* om $\|v\| = 1$. En mängd eller följd av vektorer kallas *ortogonal* om vektorerna i mängden eller följden är parvis ortogonal, och mängden (eller följden) kallas *ortonormal* eller enklare ON om den är ortogonal och dessutom varje vektor i mängden (följden) är normerad.

EXEMPEL 5.3.1 Följden $(e^{int})_{n \in \mathbf{Z}}$ är en ortonormal följd i $L^2(\mathbf{T})$, ty

$$\langle e^{int}, e^{ikt} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} e^{int} e^{-ikt} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} e^{i(n-k)t} \, dt = \begin{cases} 0, & \text{om } k \neq n \\ 1, & \text{om } k = n. \end{cases}$$

\square

EXEMPEL 5.3.2 Vi överlåter åt läsaren att verifiera att mängden

$$\{\cos nt; n \geq 0\} \cup \{\sin nt; n \geq 1\}$$

är ett ortogonalt system i $L^2(\mathbf{T})$, och att $\|1\|_2 = 1$ medan $\|\cos nt\|_2 = \|\sin nt\|_2 = \sqrt{1/2}$. \square

Sats 5.3.1 (Pythagoras sats) Om $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ är en ortogonal mängd av vektorer, så är

$$\|v_1 + v_2 + \dots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \dots + \|v_n\|^2.$$

Bevis. Man visar satsen med induktion. I fallet $n = 2$ har vi på grund av ortogonalitet:

$$\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_1 \rangle + \|v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2.$$

Antag nu att vi har bevisat vårt påstående för $n - 1$ vektorer ($n \geq 3$), och betrakta mängden A av n parvis ortogonala vektorer. Eftersom

$$\langle v_1, v_2 + \dots + v_n \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle + \dots + \langle v_1, v_n \rangle = 0 + \dots + 0 = 0,$$

är vektorn v_1 ortogonal mot summan $v_2 + \dots + v_n$. På grund av induktionsantagandet är därför

$$\|v_1 + v_2 + \dots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2 + \dots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \dots + \|v_n\|^2.$$

□

Korollarium 5.3.2 Låt $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ vara en ON-mängd och antag att

$$v = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k.$$

Då är

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2.$$

Bevis. Eftersom vektorerna $\lambda_k e_k$ är parvis ortogonala, ger Pythagoras sats likheten

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^n \|\lambda_k e_k\|^2 = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2.$$

□

Låt W vara ett linjärt delrum av V . Vektorn $v \in V$ säges vara *ortogonal mot delrummet* W om $\langle v, w \rangle = 0$ för alla $w \in W$.

Om W spänns upp av vektorerna w_1, w_2, \dots, w_n , dvs. om W består av alla linjärkombinationer av elementen w_1, w_2, \dots, w_n , så är v ortogonal mot W om och endast om $\langle v, w_k \rangle = 0$ för $k = 1, 2, \dots, n$.

Sats 5.3.3 Låt W vara ett delrum av V och antag att W spänns upp av ON-mängden $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Definiera för varje $v \in V$ vektorn $P_W(v)$ i W genom att sätta

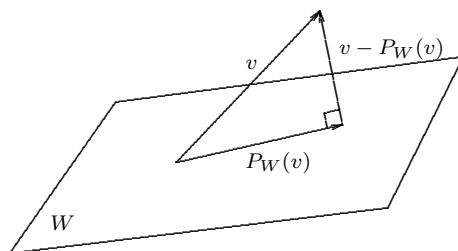
$$P_W(v) = \sum_{k=1}^n \langle v, e_k \rangle e_k.$$

Då är vektorn $v - P_W(v)$ ortogonal mot delrummet W .

Bevis. För att bevisa påståendet räcker det att visa att $\langle v - P_W(v), e_j \rangle = 0$ för $j = 1, 2, \dots, n$. Men

$$\langle P_W(v), e_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \langle v, e_k \rangle e_k, e_j \right\rangle = \sum_{k=1}^n \langle v, e_k \rangle \langle e_k, e_j \rangle = \langle v, e_j \rangle,$$

och detta innebär förstås att $\langle v - P_W(v), e_j \rangle = 0$. □



Figur 5.1.

Vi kan med andra ord skriva en godtycklig vektor $v = P_W(v) + (v - P_W(v))$ som en summa av en vektor i W och en vektor som är ortogonal mot W . Se figur 5.1. Detta är motiveringen för att kalla vektorn $P_W(v)$ *ortogonala projektionen* av v på delrummet W . Vi överläter åt läsaren att bevisa att denna uppdelning av v är unik, dvs. att om $v = v_1 + v_2$ är en annan sådan uppdelning av v som en summa av en vektor $v_1 \in W$ och en vektor v_2 som är ortogonal mot W , så är nödvändigtvis $v_1 = P_W(v)$.

Sats 5.3.3 ger upphov till en enkel algoritm, känd som *Gram-Schmidts metod*, för att erhålla en ON-följd av vektorer med utgångspunkt från en godtycklig följd av linjärt oberoende vektorer.

Sats 5.3.4 (Gram-Schmidts metod) Antag att $(v_k)_{k=1}^\infty$ är en följd av linjärt oberoende vektorer i ett inre produktrum V , och kalla för varje n det linjära delrum som spänns upp av vektorerna v_1, v_2, \dots, v_n för W_n . Definiera rekur-

sivt två nya vektorföljder $(f_n)_{n=1}^\infty$ och $(e_n)_{n=1}^\infty$ på följande sätt:

$$f_1 = v_1, \quad e_1 = f_1 / \|f_1\|$$

$$f_{n+1} = v_{n+1} - P_{W_n}(v_{n+1}) = v_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle v_{n+1}, e_k \rangle e_k, \quad e_{n+1} = f_{n+1} / \|f_{n+1}\|.$$

Då är $(e_n)_{n=1}^\infty$ en ON-följd, och det linjära höljet av vektorerna e_1, e_2, \dots, e_n är för varje n lika med W_n .

Bevis. Beviset utnyttjar induktion. Vi antar att vektorerna e_1, e_2, \dots, e_n är ortonormala och att de spänner upp W_n . Enligt sats 5.3.3 är vektorn $f_{n+1} = v_{n+1} - P_{W_n}(v_{n+1})$ ortogonal mot W_n , dvs. mot alla vektorerna e_1, e_2, \dots, e_n , och eftersom e_{n+1} erhålls ur f_{n+1} genom normalisering, drar vi slutsatsen att e_1, e_2, \dots, e_{n+1} utgör ett ON-system. Självklart kan varje linjärkombination av vektorn f_{n+1} och vektorerna i W_n skrivas som en linjärkombination av v_{n+1} och vektorerna i W_n , och omvänt. På grund av induktionsantagandet är därför det linjära höljet av vektorerna $e_1, e_2, \dots, e_n, f_{n+1}$ lika med W_{n+1} . Detta medför naturligtvis att e_1, e_2, \dots, e_{n+1} spänner upp W_{n+1} . Eftersom startsteget $n = 1$ är uppenbart, följer nu satsen med hjälp av induktion. \square

EXEMPEL 5.3.3 Betrakta inre produktrummet $\mathcal{C}([-1, 1])$ med inre produkten

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Låt oss använda Gram-Schmidts metod och explicit beräkna de tre första ortonormerade polynomen $e_0(t)$, $e_1(t)$ och $e_2(t)$, som fås genom att ortogonalisera polynomen $(t^k)_{k=0}^\infty$. Algoritmen ger

$$\begin{aligned} f_0(t) &= 1, \quad \|f_0\|^2 = \int_{-1}^1 1^2 dt = 2, \quad e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ f_1(t) &= t - \left(\int_{-1}^1 t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dt \right) \frac{1}{\sqrt{2}} = t, \quad \|f_1\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}, \quad e_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} t \\ f_2(t) &= t^2 - \left(\int_{-1}^1 t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dt \right) \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\int_{-1}^1 t^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} t dt \right) \sqrt{\frac{3}{2}} t = t^2 - \frac{1}{3}, \\ \|f_2\|^2 &= \int_{-1}^1 (t^2 - \frac{1}{3})^2 dt = \frac{8}{45}, \quad e_2(t) = \sqrt{\frac{45}{8}} (t^2 - \frac{1}{3}). \end{aligned} \quad \square$$

Sats 5.3.5 (Bessels olikhet) Låt $(e_k)_{k=1}^N$ vara en ändlig eller oändlig ON-mängd i V , och låt v vara en godtycklig vektor i V . Då är

$$\sum_{k=1}^N |\langle v, e_k \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Bevis. Om N är ett ändligt tal, sätter vi $n = N$, och om N är oändligt, låter vi n vara ett godtyckligt positivt heltal. Låt W beteckna det linjära delrum som spänns upp av ON-mängden $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, och betrakta den ortogonala projektionen $P_W(v)$ av v på W . Eftersom $v = P_W(v) + (v - P_W(v))$ är en uppdelning av v som ett par av ortogonala vektorer, följer det av Pythagoras sats att

$$\|v\|^2 = \|P_W(v)\|^2 + \|v - P_W(v)\|^2 \geq \|P_W(v)\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle v, e_k \rangle|^2.$$

I det ändliga fallet är vi klara, och i det oändliga fallet behöver vi nu bara låta $n \rightarrow \infty$ i olikheten ovan. \square

EXEMPEL 5.3.4 Genom att tillämpa Bessels olikhet på den oändliga ON-följden $(e^{int})_{n \in \mathbf{Z}}$ i $L^2(\mathbf{T})$ får vi följande resultat:

För alla $L^2(\mathbf{T})$ -funktioner f gäller olikheten

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

I nästa avsnitt kommer vi att visa att olikhetstecknet kan ersättas med likhetstecken. \square

Den ortogonala projektionen har följande intressanta approximations-egenskap.

Sats 5.3.6 Låt W vara ett linjärt delrum som spänns upp av ON-mängden $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, och låt $P_W(v)$ vara den ortogonala projektionen av v på W . Då är

$$\|v - P_W(v)\| = \min_{w \in W} \|v - w\|.$$

Bevis. Låt $w \in W$ vara en godtycklig vektor, och betrakta uppdelningen

$$v - w = (v - P_W(v)) + (P_W(v) - w).$$

Den första delen är ortogonal mot W , och den andra delen tillhör W . De är därför ortogonala mot varandra, så det följer av Pythagoras sats att

$$\|v - w\|^2 = \|v - P_W(v)\|^2 + \|P_W(v) - w\|^2 \geq \|v - P_W(v)\|^2$$

med likhet om och endast om $\|P_W(v) - w\|^2 = 0$, dvs. om och endast om $w = P_W(v)$. Därmed är satsen bevisad. \square

Följande korollarium är förstås ett specialfall av sats 5.3.6; det fås genom att välja $V = L^2(\mathbf{T})$ och låta W vara det delrum som spänns upp av exponentialfunktionerna $(e^{ikt})_{k=-n}^n$.

Korollarium 5.3.7 Låt $f \in L^2(\mathbf{T})$. Bland alla trigonometriska polynom av grad högst lika med n är fouriersumman $s_n(f; t) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikt}$ det trigonometriska polynom som bäst approximerar f i L^2 -mening, dvs.

$$\|f - s_n(f; t)\|_2 = \min_{\text{alla } c_k} \|f - \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}\|_2.$$

5.4 Fullständighet

Låt $A = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ vara en oändlig ON-mängd i ett inre produktrum V och sätt $A_n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. ON-delmängden A_n spänner upp ett linjärt delrum W_n , och vi låter som förut $P_{W_n}(v)$ beteckna den ortogonala projektionen av vektorn v på delrummet W_n . Vi har visat att bland alla vektorer i W_n är $P_{W_n}(v)$ den vektor som bäst approximerar v . Genom att utnyttja uppdelningen

$$v = P_{W_n}(v) + (v - P_{W_n}(v))$$

och Pythagoras sats får vi $\|v - P_{W_n}(v)\|^2 = \|v\|^2 - \|P_{W_n}(v)\|^2$, vilket också kan skrivas som

$$(5.4.1) \quad \|v - \sum_{k=1}^n \langle v, e_k \rangle e_k\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle v, e_k \rangle|^2.$$

Ju större talet n är, desto bättre approximerar $P_{W_n}(v)$ tydligen vektorn v , men det finns i allmänhet inga garantier för att $\|v - P_{W_n}(v)\| \rightarrow 0$, då $n \rightarrow \infty$. Detta motiverar följande definition.

Definition En ON-mängd $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ kallas *fullständig* om det för varje $v \in V$ gäller att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v - \sum_{k=1}^n \langle v, e_k \rangle e_k\| = 0.$$

I nästa sats ger vi en karakterisering av begreppet fullständighet.

Sats 5.4.1 Följande tre egenskaper är ekvivalenta för en oändlig ON-mängd $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ i ett inre produktrum V :

(a) Mängden är en fullständig ON-mängd.

$$(b) \quad \|v\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, e_k \rangle|^2 \quad \text{för alla } v \in V.$$

$$(c) \quad \langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle \overline{\langle w, e_k \rangle} \quad \text{för alla } v, w \in V.$$

Bevis. Att (a) och (b) är ekvivalenta följer omedelbart av ekvation (5.4.1). För att visa att (b) och (c) är ekvivalenta sätter vi

$$Tv = (\langle v, e_k \rangle)_{k=1}^{\infty}.$$

Bessels olikhet ger

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, e_k \rangle|^2 \leq \|v\|^2 < \infty,$$

dvs. följderna $(\langle v, e_k \rangle)_{k=1}^{\infty}$ ligger i $\ell^2(\mathbf{Z}_+)$. Avbildningen T är med andra ord en avbildning från V till $\ell^2(\mathbf{Z}_+)$, och den är uppenbarligen linjär. Enligt sats 5.1.5 är $\|Tv\|^2 = \|v\|^2$ för alla $v \in V$ om och endast om $\langle Tv, Tw \rangle = \langle v, w \rangle$ för alla $v, w \in V$, dvs. (b) gäller om och endast om (c) gäller. \square

Om ON-mängden $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ är fullständig och $\langle v, e_k \rangle = 0$ för alla k , så är $v = 0$. Detta följer omedelbart av egenskap (b) i satsen ovan. Det är alltså omöjligt att utvidga en fullständig ON-mängd till en större mängd genom att addera flera vektorer.

Sats 5.4.2 *ON-systemet $(e^{int})_{n \in \mathbf{Z}}$ är fullständigt i $L^2(\mathbf{T})$.*

Bevis. Låt först g vara en godtycklig kontinuerlig funktion i $L^2(\mathbf{T})$. På grund av Fejérs sats (sats 4.6.1) vet vi att Fejérmedelvärdena $\sigma_n(g; t)$ konvergerar likformigt mot $g(t)$ på \mathbf{T} , dvs. givet $\epsilon > 0$ finns det ett tal N så att

$$|\sigma_n(g; t) - g(t)| < \epsilon$$

för alla $n > N$ och alla $t \in \mathbf{T}$. Det följer att

$$\|g - \sigma_n(g; \cdot)\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |g(t) - \sigma_n(g; t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} \epsilon^2 dt \right)^{1/2} = \epsilon$$

för alla $n > N$.

Antag därefter att f är en godtycklig funktion i $L^2(\mathbf{T})$, och låt $\epsilon > 0$ vara givet. Genom att resonera som i beviset för sats 2.2.1 kan man visa att det är möjligt att approximera f med en kontinuerlig funktion g så att $\|f - g\|_2 < \epsilon$. På grund av den första delen av beviset är

$$\|f - \sigma_n(g; \cdot)\|_2 = \|f - g\|_2 + \|g - \sigma_n(g; \cdot)\|_2 < 2\epsilon,$$

om n är tillräckligt stort. Genom att kombinera detta med korollarium 5.3.7 får vi

$$\|f - s_n(f; \cdot)\|_2 \leq \|f - \sigma_n(g; \cdot)\|_2 < 2\epsilon,$$

vilket bevisar satsen. \square

Anmärkning. Genom att bilda real- och imaginärdelarna av e^{int} och sedan normalisera erhåller man ett reellt fulltständigt ON-system i $L^2(\mathbf{T})$, nämligen systemet bestående av funktionerna 1 , $\sqrt{2} \cos nt$ och $\sqrt{2} \sin nt$, $n = 1, 2, \dots$.

Satserna 5.4.1 och 5.4.2 har följande korollarium för L^2 -funktioner.

Sats 5.4.3 (Parsevals formler) Om $f, g \in L^2(\mathbf{T})$ så är

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt \quad \text{och}$$

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Om man istället skriver fourierserien på formen

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

så får Parsevals första formel utseendet

$$\frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt.$$

Sats 5.4.3 har en trevlig tolkning i termer av isometrier, dvs. normbevarande linjära avbildningar. Definiera för $f \in L^2(\mathbf{T})$ följden $\mathcal{F}(f)$ genom att sätta

$$\mathcal{F}(f) = (\hat{f}(n))_{n \in \mathbf{Z}}.$$

På grund av sats 5.4.3 ligger följden $\mathcal{F}(f)$ i rummet $\ell^2(\mathbf{Z})$ och

$$(5.4.2) \quad \|\mathcal{F}(f)\|_{\ell^2(\mathbf{Z})} = \|f\|_{L^2(\mathbf{T})}.$$

Vi har med andra ord definierat en avbildningen $\mathcal{F}: L^2(\mathbf{T}) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z})$, som uppenbarligen är linjär. Det följer av (5.4.2) att avbildningen är injektiv och normbevarande. Genom att utnyttja egenskaper hos $L^2(\mathbf{T})$, som vi inte kan förklara här, är det lätt att visa att avbildningen också är bijektiv, dvs. en isomorfism. Isomorfismer som bevarar normen kallas isometrier. Resultatet kan tolkas på följande sätt:

Som inre produktrum är det ingen skillnad på $L^2(\mathbf{T})$ och $\ell^2(\mathbf{Z})$, utan de kan betraktas som "samma" rum.

EXEMPEL 5.4.1 Låt $f \in L^2(\mathbf{T})$ vara funktionen som definieras som $f(t) = t$ för $|t| < \pi$. Funktionens fourierkoefficienter har vi beräknat i avsnitt 1.5, där vi fann att

$$f(t) \sim \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n i}{n} e^{int}.$$

Parsevals formel ger nu

$$\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3}.$$

Det följer att $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$, ett resultat som vi också har erhållit tidigare på annat sätt. \square

Med hjälp av Parsevals formel kan man visa följande resultat om integration av fourierserier.

Sats 5.4.4 Antag att $f \in L^1(\mathbf{T})$ och $\hat{f}(0) = 0$. Definiera

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Då är funktionen F kontinuerlig och 2π -periodisk med fourierkoefficienter

$$\hat{F}(n) = \frac{\hat{f}(n)}{in} \quad \text{för } n \neq 0, \quad \text{och} \quad \hat{F}(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t f(t) dt.$$

Om dessutom $f \in L^2(\mathbf{T})$, så är fourierserien till F absolutkonvergent, och

$$F(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{F}(n) e^{int}$$

för alla t .

Anmärkning. Antagandet $\hat{f}(0) = 0$ är ingen allvarlig inskränkning, ty om f är en godtycklig funktion kan vi först subtrahera $\hat{f}(0)$ och sedan tillämpa satsen på differensen $f - \hat{f}(0)$.

Bevis. F är uppenbarligen kontinuerlig, och eftersom $F(x + 2\pi) - F(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t) dt = 2\pi \hat{f}(0) = 0$, är F periodisk med perioden 2π . För att beräkna fourierkoefficienterna $\hat{F}(n)$ skriver vi först integralen $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} F(x) e^{-inx} dx$ som en dubbelintegral och byter sedan integrationsordning på följande vis:

$$\begin{aligned} \hat{F}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} F(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^x f(t) e^{-inx} dt \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left(\int_t^{2\pi} e^{-inx} dx \right) dt. \end{aligned}$$

Om $n \neq 0$ så är den inre integralen $\int_t^{2\pi} e^{-inx} dx = (e^{-int} - 1)/in$, varför

$$\hat{F}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{e^{-int} - 1}{in} dt = \frac{1}{in} (\hat{f}(n) - \hat{f}(0)) = \frac{\hat{f}(n)}{in}.$$

I fallet $n = 0$ får vi istället $\int_t^{2\pi} e^{-inx} dx = 2\pi - t$, och

$$\hat{F}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)(2\pi - t) dt = 2\pi \hat{f}(0) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t f(t) dt = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t f(t) dt.$$

Antag nu att $f \in L^2(\mathbf{T})$. Då är fourierserien till F absolutkonvergent, ty genom att tillämpa Cauchy–Schwarz olikhet (på rummet $\ell^2(\mathbf{Z})$) och Parsevals formel får vi olikheten

$$\sum_{n \neq 0} |\hat{F}(n)| = \sum_{n \neq 0} |\hat{f}(n)| \frac{1}{|n|} \leq \left(\sum_{n \neq 0} |\hat{f}(n)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} = \|f\|_2 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{3}} < \infty.$$

Det följer därför av sats 4.6.3 att fourierserien till F konvergerar punktvis mot $F(t)$ för alla $t \in \mathbf{T}$. \square

Korollarium 5.4.5 *Antag att $f \in L^2(\mathbf{T})$. Då är*

$$\int_a^b f(t) dt = \hat{f}(0)(b-a) + \sum_{n \neq 0} \frac{\hat{f}(n)}{in} (e^{inb} - e^{ina}).$$

För en $L^2(\mathbf{T})$ -funktion f kan vi således beräkna integralen $\int_a^b f(t) dt$ genom att integrera fourierserien $f \sim \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$ termvis.

Bevis. Om $\hat{f}(0) = 0$, så följer det av sats 5.4.4 att

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{F}(n) (e^{inb} - e^{ina}) = \sum_{n \neq 0} \frac{\hat{f}(n)}{in} (e^{inb} - e^{ina}),$$

vilket bevisar korollariet för sådana funktioner. Det allmänna fallet följer sedan genom att man betraktar funktionen $f - \hat{f}(0)$. \square

5.5 Ortogonala polynom

Låt I vara ett slutet intervall, begränsat eller obegränsat, och låt w vara en reellvärd, positiv, kontinuerlig funktion, som är definierad överallt på I utom

möjligen i intervallets eventuella ändpunkter. Med $L^2(I, w)$ menas mängden av alla komplexvärda (Lebesgue-mätbara) funktioner f på I som uppfyller

$$\int_I |f(t)|^2 w(t) dt < \infty.$$

$L^2(I, w)$ är ett vektorrum om addition och multiplikation med skalärer definieras på vanligt sätt; beviset för detta är analogt med beviset i avsnitt 2.2 för att $L^2(\mathbf{T})$ är ett vektorrum. Vektorrummet $L^2(I, w)$ kallas ett *viktat* L^2 -rum med *viktfunktion* w .

$L^2(I, w)$ är också ett inre produktrum med inre produkten

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(t) \overline{g(t)} w(t) dt,$$

och motsvarande norm är förstås

$$\|f\| = \left(\int_I |f(t)|^2 w(t) dt \right)^{1/2},$$

som vi betecknar $\|f\|_{L^2(I, w)}$ om vi behöver specificera intervallet och vikt-funktionen.

Om viktfunktionen w är identiskt lika med 1 på intervallet I , skriver man $L^2(I)$ istället för $L^2(I, w)$.

Som förut anses två funktioner f och $g \in L^2(I, w)$ vara lika om $f(t) = g(t)$ överallt på I utom på en nollmängd.

Polynomen tillhör i allmänhet inte rummet $L^2(I, w)$. För att detta ska gälla måste

$$(5.5.1) \quad \int_I |t|^n w(t) dt < \infty \quad \text{för alla } n \geq 0.$$

Detta villkor sätter restriktioner på hur stor viktfunktionens $w(t)$ kan vara då t närmar sig intervallets ändpunkter; $w(t)$ kan inte växa alltför fort mot ∞ vid en ändlig ändpunkt och måste avtaga tillräckligt snabbt mot 0 vid en oändlig ändpunkt.

Antag nu att vi har en viktfunktion som uppfyller villkoret (5.5.1) så att monomen $1, t, t^2, t^3, \dots$ tillhör $L^2(I, w)$. Genom att använda Gram-Schmidts algoritm på följderna av monom får man en ortogonal följd $(\phi_n(t))_{n=0}^\infty$ av polynom, där numreringen är sådan att n också är lika med gradtalet hos polynomet $\phi_n(t)$.

För speciella val av intervall I och viktfunktion $w(t)$ får man de klassiska ortogonala polynomen. Vi kommer att betrakta fyra exempel:

- (a) Legendrepolynomen $P_n(t)$, som svarar mot vikten $w(t) \equiv 1$ på intervallet $I = [-1, 1]$;
- (b) Tjebysjovpolynomen $T_n(t)$, som svarar mot vikten $w(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$ på intervallet $I = [-1, 1]$;
- (c) Laguerrepolynomen $L_n(t)$, som svarar mot vikten $w(t) = e^{-t}$ på intervallet $I = [0, \infty[$;
- (d) Hermitepolynomen $H_n(t)$, som svarar mot vikten $w(t) = e^{-t^2}$ på intervallet $I = \mathbf{R}$.

Beteckningarna ovan används av tradition för att beteckna ortogonala polynom med en standardnormalisering, som vanligtvis inte innebär att polynomen är ortonormerade. Samtliga ovannämnda polynomklasser har studerats utförligt därför att de spelar en viktig roll i approximationssammanhang och i teorin för differentialekvationer. Vi kommer att lista några av deras viktigaste egenskaper utan att ge några fullständiga bevis.

I approximationssammanhang är det viktigt att veta att en given ortogonal följd är fullständig. För ovannämnda klassiska ortogonala polynom har vi följande positiva resultat.

Sats 5.5.1 *Legendre-, Tjebysjov-, Laguerre- och Hermitepolynomen bildar fullständiga ortogonala system i sina respektive viktade L^2 -rum.*

Anmärkning. Man kan visa att om viktfunktionen w uppfyller villkoret

$$\int_I e^{r|t|} w(t) dt < \infty \quad \text{för något } r > 0,$$

och om $(\phi_n(t))_1^\infty$ är en ortogonal följd av polynom ϕ_n , så är systemet fullständigt i $L^2(I, w)$. Viktfunktionerna i våra fyra klassiska system uppfyller uppenbarligen villkoret.

Bevis. När I är ett kompakt intervall, vilket är fallet för Legendre- och Tjebysjovpolynomen, följer påståendet av Weierstrass approximationssats på följande vis.

Givet $f \in L^2(I, w)$ och $\epsilon > 0$ approximerar man först f med en kontinuerlig funktion g på I som uppfyller villkoret $\|f - g\|_{L^2(I, w)} < \epsilon/2$. Därefter väljer man $\eta > 0$ så att $\eta \left(\int_I w(t) dt \right)^{1/2} < \epsilon/2$, vilket man säkert kan göra eftersom integralen är ändlig (på grund av villkoret (5.5.1) med $n = 0$). Enligt Weierstrass approximationssats finns det ett polynom $p(t)$ så att $\sup_{t \in I} |g(t) - p(t)| < \eta$. Det följer att

$$\|g - p\|_{L^2(I, w)} = \left(\int_I |g(t) - p(t)|^2 w(t) dt \right)^{1/2} < \eta \left(\int_I w(t) dt \right)^{1/2} < \epsilon/2.$$

Triangelolikheten ger

$$\|f - p\|_{L^2(I,w)} \leq \|f - g\|_{L^2(I,w)} + \|g - p\|_{L^2(I,w)} < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Eftersom varje polynom p är en linjärkombination av de aktuella ortogonala polynomen, följer det nu av olikheten ovan att f kan approximeras godtyckligt väl av linjärkombinationer av sådana polynom. De bildar med andra ord ett fullständigt system.

För icke-kompakta intervall är beviset mer sofistikerat, så vi måste utelämnat det. \square

Inre produkten i $L^2(I, w)$ har uppenbarligen följande egenskap

$$(5.5.2) \quad \langle tf(t), g(t) \rangle = \langle f(t), tg(t) \rangle,$$

och detta har till följd att de ortogonala polynomen i $L^2(I, w)$ är bestämda av en enkel rekursiv trestegsformel.

Sats 5.5.2 *Låt $w(t)$ vara en viktfunction som uppfyller villkoret (5.5.1), och låt $(\varphi_n(t))_{n=0}^\infty$ vara en godtycklig ortogonal följd av polynom i $L^2(I, w)$, indexerad så att n är lika med gradtalet hos $\varphi_n(t)$. Då är*

$$(5.5.3) \quad \varphi_{n+1}(t) = a_n t \varphi_n(t) + b_n \varphi_n(t) + c_n \varphi_{n-1}(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

där $\varphi_{-1}(t) = 0$, a_n är kvoten mellan den ledande koefficienten i $\varphi_{n+1}(t)$ och den ledande koefficienten i $\varphi_n(t)$,

$$b_n = -\frac{a_n \langle t \varphi_n(t), \varphi_n(t) \rangle}{\|\varphi_n(t)\|^2}, \quad \text{för } n \geq 0, \quad c_0 = 0 \quad \text{och}$$

$$c_n = -\frac{a_n \|\varphi_n(t)\|^2}{a_{n-1} \|\varphi_{n-1}(t)\|^2} \quad \text{för } n \geq 1.$$

Bevis. Definitionen av koefficienten a_n medför att differensen

$$\psi(t) = \varphi_{n+1}(t) - a_n t \varphi_n(t)$$

är ett polynom med gradtal $\leq n$, och det kan därför skrivas som en linjärkombination av polynomen $\varphi_n(t)$, $\varphi_{n-1}(t)$ och något polynom $\chi(t)$ av grad $\leq n-2$. För lämpliga koefficienter b_n och c_n har vi alltså

$$\psi(t) = b_n \varphi_n(t) + c_n \varphi_{n-1}(t) + \chi(t).$$

(För $n = 0$ gäller ovanstående med $c_0 = 0$ och $\chi(t) \equiv 0$.)

Eftersom varje polynom $\varphi_k(t)$ har gradtal k , överensstämmer det linjära höljet av de n stycken polynomen $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, \dots , $\varphi_{n-1}(t)$ med delrummet

\mathcal{P}_{n-1} , som består av alla polynom av grad mindre än eller lika med $n-1$. Det följer att polynomet $\varphi_n(t)$ är ortogonalt mot \mathcal{P}_{n-1} . Identiteten (5.5.2) medför därför att

$$\langle t\varphi_n(t), \varphi_k(t) \rangle = \langle \varphi_n(t), t\varphi_k(t) \rangle = 0 \quad \text{för alla } k \leq n-2,$$

ty $t\varphi_k(t)$ är ett polynom av grad $k+1 \leq n-1$. Det följer att

$$\langle \chi(t), \varphi_k(t) \rangle = \langle \psi(t), \varphi_k(t) \rangle = \langle \varphi_{n+1}, \varphi_k(t) \rangle - a_n \langle t\varphi_n(t), \varphi_k(t) \rangle = 0 - 0 = 0$$

för alla $k \leq n-2$. Polynomet $\chi(t)$ måste därför vara ortogonalt mot sig självt, eftersom det är en linjärkombination av polynomen $\varphi_0(t), \dots, \varphi_{n-2}(t)$. Det följer att $\chi(t) \equiv 0$, vilket bevisar rekursionsformeln (5.5.3).

Genom att i (5.5.3) bilda inre produkten med $\varphi_n(t)$ erhåller man formeln för b_n . För att få formeln för c_n , $n \geq 1$, bildar man först inre produkten med φ_{n-1} och använder sedan (5.5.2) och rekursionsformeln med n ersatt av $n-1$. Detta resulterar i

$$\begin{aligned} c_n \|\varphi_{n-1}(t)\|^2 &= -a_n \langle t\varphi_n(t), \varphi_{n-1}(t) \rangle = -a_n \langle \varphi_n(t), t\varphi_{n-1}(t) \rangle \\ &= -a_n \langle \varphi_n(t), \frac{1}{a_{n-1}} (\varphi_n(t) - b_{n-1}\varphi_{n-1}(t) - c_{n-1}\varphi_{n-2}(t)) \rangle \\ &= -\frac{a_n}{a_{n-1}} \|\varphi_n(t)\|^2. \end{aligned} \quad \square$$

Legendrepolynomen

Legendrepolynomen $P_n(t)$ är normaliserade av villkoret $P_n(1) = 1$. De fyra första polynomen är

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \quad P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t).$$

Man kan visa att de satisfierar rekursionsformeln

$$(n+1)P_{n+1}(t) = (2n+1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t),$$

och att de ges som derivator av *Rodriguesformeln*¹

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n.$$

Legendrepolynomen är inte ortonormerade; istället gäller

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

¹En Rodriguesformel är en formel som producerar en serie av funktioner genom upprepade derivering av andra funktioner.

Tjebysjovpolynomen

Tjebysjovpolynomen $T_n(t)$ är normaliserade av villkoret $T_n(1) = 1$ och satisfierar rekursionsformeln

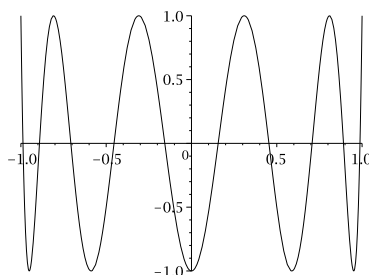
$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t) \quad \text{för } n \geq 1.$$

De första polynomen i följderna är $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$, $T_2(t) = 2t^2 - 1$.

Tjebysjovpolynomen ges explicit av formeln

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t).$$

Polynomen är inte ortonormerade, ty $\|T_0\|^2 = \pi$ och $\|T_n\|^2 = \pi/2$ för $n \geq 1$.



Figur 5.2. Tjebysjovpolynomet $T_{10}(t)$.

Laguerrepolynomen

Laguerrepolynomen $L_n(t)$ är normaliserade av villkoret $L_n(0) = 1$ och satisfierar rekursionsformeln

$$(n+1)L_{n+1}(t) = (2n+1-t)L_n(t) - nL_{n-1}(t).$$

De allra första är $L_0(t) = 1$, $L_1(t) = 1 - t$ och $L_2(t) = 1 - 2t + t^2/2$.

Laguerrepolynomen kan uttryckas som derivator med hjälp av Rodrigues-formeln

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}).$$

Laguerrepolynomen bildar ett ortonormalt system eftersom $\|L_n\|^2 = 1$ för alla n .

Hermitepolynomen

Hermitepolynomen $H_n(t)$ satisfierar rekursionsformeln

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t).$$

De första polynomen är $H_0(t) = 1$, $H_1(t) = 2t$, $H_2(t) = 4t^2 - 2$. Polynomen är inte ortonormerade utan

$$\|H_n\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Hermitepolynomen ges också av Rodriguesformeln

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2}).$$

Övningsuppgifter till kapitel 5

5.1 Utnyttja fourierserierna till funktionerna i övningarna 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 resp. 4.12 för att beräkna följande summor

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2} & \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} & \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\ \text{d) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} & \text{e) } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-\alpha)^2} & (\alpha \notin \mathbf{Z}). \end{array}$$

5.2 Bestäm fourierserien till funktionen

$$f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 < t < \pi \\ -\cos t, & -\pi < t < 0 \end{cases}$$

och beräkna summan $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2 - 1)^2}.$

5.3 Bestäm en ortogonal följd av polynom av grad ≤ 2 med avseende på vikten $|t|$ på intervallet $[-1, 1]$, dvs. med avseende på den inre produkten

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) \overline{g(t)} |t| dt,$$

samt bestäm därefter det polynom av grad högst lika med 2 som bäst approximerar funktionen $f(t) = |t|$ med avseende på motsvarande viktade L^2 -norm.

5.4 Bestäm det polynom $p(t)$ av grad ≤ 2 som minimerar integralen

$$\int_{-1}^1 |e^{-t} - p(t)|^2 dt.$$

5.5 Beräkna minimum av $\int_0^1 |e^t - p(t)|^2 dt$ taget över alla polynom $p(t)$ av grad ≤ 1 och bestäm också det minimerande polynomet.

- 5.6 Bestäm ortogonala polynom av grad 0, 1 och 2 med avseende på den inre produkten

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) \overline{g(t)} (1 - t^2) dt.$$

Bestäm också bland alla polynom $p(t)$ av högst grad 2 det polynom som minimerar uttrycket

$$\int_{-1}^1 (|t| - p(t))^2 (1 - t^2) dt.$$

- 5.7 Bestäm en ortogonal följd av polynom av grad ≤ 2 med avseende på vikten $\sqrt{|t|}$ på intervallet $[-1, 1]$, dvs. med avseende på inre produkten

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) \overline{g(t)} \sqrt{|t|} dt,$$

samt bestäm därefter det polynom av grad högst lika med 2 som bäst approximerar funktionen $f(t) = \sqrt{|t|}$ med avseende på motsvarande viktade L^2 -norm.

- 5.8 Bevisa att Legendrepolynomen $P_n(t)$ ges av formeln

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} D^n (t^2 - 1)^n$$

genom att visa att om polynomen P_n definieras på detta sätt, så är följden $(P_n(t))_0^\infty$ ortogonal med avseende på skalärprodukten $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) \overline{g(t)} dt$ och $P_n(1) = 1$. Bevisa vidare att $\|P_n(t)\|^2 = 2/(2n+1)$.

[Ledning: Beräkna $2^m m! 2^n n! \langle P_m(t), P_n(t) \rangle = \int_{-1}^1 D^m (t^2 - 1)^m D^n (t^2 - 1)^n dt$ genom att integrera partiellt m gånger och vid varje integration flytta en derivering från $P_m(t)$ till $P_n(t)$. Den utintegrerade delen är varje gång lika med 0 beroende på att ± 1 är nollställen av multiplicitet m till $(t^2 - 1)^m$. Man får därför $2^m m! 2^n n! \langle P_m(t), P_n(t) \rangle = \int_{-1}^1 (1 - t^2)^m D^{n+m} (t^2 - 1)^n dt$. Termen $D^{m+n} (t^2 - 1)^n$ är lika med 0 om $m > n$, och lika med $(2n)!$ om $m = n$.]

- 5.9 Visa att Legendrepolynomen satisfierar rekursionsformeln

$$(n+1)P_{n+1}(t) = (2n+1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t).$$

[Ledning: Använd sats 5.5.2 och bestäm koefficienterna a_n , b_n och c_n genom att betrakta koefficienterna för termerna av grad $n+1$, n och $n-1$ i polynomen P_{n+1} , P_n och P_{n-1} .]

- 5.10 Tjebysjovpolynomen $T_n(t)$ är ortogonala med avseende på vikten $(1-t^2)^{-1/2}$ på intervallet $[-1, 1]$ och normaliserade av villkoret att $T_n(1) = 1$.

a) Visa att $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$.

- b) Visa att $\|T_0\|^2 = \pi$ och att $\|T_n\|^2 = \pi/2$ för $n \geq 1$.
 c) Visa rekursionsformeln $T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t)$, $n \geq 1$.

[Ledning: Genom att utnyttja att $\cos nx = \operatorname{Re} e^{inx} = \operatorname{Re} (\cos x + i \sin x)^n$ och binomialsatsen ser man att $\cos nx$ kan skrivas som ett polynom i $\cos x$ av grad n , närmare bestämt som

$$\cos nx = \sum_{k=0}^{[n/2]} A_k \cos^{n-2k} x, \quad \text{där} \quad A_0 = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}.$$

Det följer att $\cos(n \arccos t)$ för $n \geq 1$ är ett polynom i t av grad n med ledande koefficient 2^{n-1} , och att polynomet är udda om n är udda och jämnt om n är jämnt. Att polynomen uppfyller de önskade ortogonalitetsrelationerna följer enkelt ur den inre produktens definition med hjälp av variabelsubstitutionen $t = \cos x$. Rekursionsformeln följer sedan med hjälp av sats 5.5.2.]

Kapitel 6

Diskreta fouriertransformen

6.1 Cykliska gruppen \mathbf{Z}_N

Vektorrummet \mathbf{C}^n av alla n -tupler (z_1, z_2, \dots, z_n) kan identifieras med vektorrummet av alla funktioner $z: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbf{C}$. Vilken indexmängd som används är förstås oväsentligt så länge som den innehåller n stycken element; vi kan ersätta $\{1, 2, \dots, n\}$ med vilken annan mängd som helst med n stycken element.

Genom att förse indexmängden med en s. k. gruppstruktur kan man konstruera baser för vektorrummet \mathbf{C}^n med speciella egenskaper. I det här kapitlet skall vi studera *fourierbasen* och den därmed associerade diskreta fouriertransformen. Andra exempel på sådana baser är de s. k. *waveletbaserna*, som numera utgör oumbärliga verktyg inom signal- och bildbehandling.

För att förenkla framtida beteckningar kommer vi från och med nu att byta index n mot N samt övergå till att använda $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ som indexmängd för \mathbf{C}^N . Vi indicerar med andra ord elementen i \mathbf{C}^N så här:

$$z = (z_0, z_1, \dots, z_{N-1}).$$

En gruppoperation är en slags addition och som gruppoperation på indexmängden kommer vi att använda *addition modulo N* .

Definition Med \mathbf{Z}_N menas mängden $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ försedd med följande addition $m + n$ för $m, n \in \mathbf{Z}_N$:

$$m + n = \begin{cases} m + n & \text{om } m + n \leq N-1 \\ m + n - N & \text{om } m + n \geq N. \end{cases}$$

Plustecknet $+$ förekommer här i två betydelser; i vänsterledet står det för den definierade additionen, och på alla ställen i högerledet efter klammern har

det sin vanliga betydelse av addition av naturliga tal. Jag hoppas att läsaren har överseende med detta missbruk av symboler, som även i fortsättningen kommer att återkomma då och då. Den precisa betydelsen framgår emellertid alltid av sammanhanget.

Den införda additionen brukar kallas *addition modulo N* . I \mathbf{Z}_3 är exempelvis $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 2 + 1 = 0$ och $2 + 2 = 1$.

Varje element n i \mathbf{Z}_N har en additiv invers $-n$; den definieras av att

$$-n = \begin{cases} 0 & \text{om } n = 0 \\ N - n & \text{om } 0 < n \leq N - 1. \end{cases}$$

(Också minustecknet används förstås här i två betydelser!)

Sats 6.1.1 \mathbf{Z}_N är en kommutativ grupp, dvs. för alla $k, m, n \in \mathbf{Z}_N$ är

$$\begin{aligned} m + n &= n + m \\ k + (m + n) &= (k + m) + n \\ n + 0 &= n \\ n + (-n) &= 0 \end{aligned}$$

Bevis. Enkel verifikation. □

Rummet $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$

Vektorrummet \mathbf{C}^N identifieras i fortsättningen med vektorrummet av alla funktioner $f: \mathbf{Z}_N \rightarrow \mathbf{C}$. Genom att förse \mathbf{C}^N med den vanliga inre produkten

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \overline{g(n)}$$

får vi ett inre produktrum, som betecknas $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$. Motsvarande norm betecknas $\|\cdot\|_2$, dvs.

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} |f(n)|^2.$$

Rummet $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ är N -dimensionellt. Funktionerna $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{N-1}$, som definieras av att

$$\mathbf{e}_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{om } n = k \\ 0 & \text{för övrigt,} \end{cases}$$

bildar en ON-bas, som vi kallar *standardbasen* i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$.

Det är lämpligt att uppfatta index k i \mathbf{e}_k som ett element i \mathbf{Z}_N . För $N = 5$ är exempelvis $\mathbf{e}_{2+3} = \mathbf{e}_0$ och $\mathbf{e}_{3+3} = \mathbf{e}_1$.

Rummet $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ kan också uppfattas som rummet av alla N -periodiska funktioner definierade på hela \mathbf{Z} . Varje funktion $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ kan nämligen på ett unikt sätt utvidgas till en N -periodisk funktion $F: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}$, så att $F(n) = f(n)$ för $n = 0, 1, \dots, N-1$. Det är bara att definiera

$$F(n + kN) = f(n) \quad \text{för } 0 \leq n \leq N-1 \text{ och } k \in \mathbf{Z}.$$

Translationsoperatorerna R_k

Definition För $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ och $k \in \mathbf{Z}_N$ definierar vi funktionen $R_k f$ genom att sätta

$$R_k f(n) = f(n - k).$$

Vi kallar $R_k f$ för ett *translat* av f och avbildningarna $R_k: \ell^2(\mathbf{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ för *translationer* eller *translationsoperatorer*.

Translationsoperatorerna är uppenbarligen *linjära* operatorer. Observera att $R_0 = I$, den identiska avbildningen, och att $R_k R_m = R_{k+m}$ för alla $k, m \in \mathbf{Z}_N$. Vidare gäller för potenser av R_1 att $R_1^k = R_k$ för $k = 0, 1, \dots, N-1$, medan $R_1^N = R_0 = I$.

Operatorerna R_k kallas translationer därför att de translaterar eller skjuter funktionsvärdena k steg åt höger cykliskt. Exempelvis är

$$\begin{aligned} (R_1 f(0), R_1 f(1), R_1 f(2), \dots, R_1 f(N-1)) \\ = (f(N-1), f(0), f(1), \dots, f(N-2)). \end{aligned}$$

EXEMPEL 6.1.1 För standardbasvektorerna i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ gäller att $R_k \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_k$, och mer generellt att $R_k \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_{n+k}$. \square

Summor

För funktioner $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ kommer vi ofta att ha anledning att betrakta summor av typen

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}_N} f(n),$$

där vi summerar över alla funktionsvärdena $f(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$.

Vi kan förstås uppfatta summationen $\sum_{\mathbf{Z}_N}$ som en avbildning, som till varje funktion $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ tillordnar ett komplext tal. Det som är väsentligt

för denna avbildning, och som vi kommer att utnyttja om och om igen, är att den är *linjär*, dvs.

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}_N} (\alpha f(n) + \beta g(n)) = \alpha \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} f(n) + \beta \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} g(n),$$

och *translationsinvariant*, dvs.

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}_N} R_k f(n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} f(n)$$

för alla $k \in \mathbf{Z}_N$. Den sista likheten är förstås bara ett sätt att uttrycka att

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(n-k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n),$$

något som är fullständigt självklart eftersom vi i båda fallen summerar samtliga N funktionsvärden $f(0), f(1), \dots, f(N-1)$.

6.2 Karaktärerna till gruppen \mathbf{Z}_N

Definition En funktion $\chi: \mathbf{Z}_N \rightarrow \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ kallas en *karaktär* till gruppen \mathbf{Z}_N om

$$(6.2.1) \quad \chi(m+n) = \chi(m) \cdot \chi(n)$$

för alla $m, n \in \mathbf{Z}_N$.

Egenskapen (6.2.1) kallas *multiplikativitet*.

Sats 6.2.1 *Karaktärerna är funktioner i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ med följande egenskaper:*

- (i) $\chi(0) = 1$
- (ii) $\chi(-n) = \overline{\chi(n)}$
- (iii) $\chi(n) = \chi(1)^n$
- (iv) $\chi(1)^N = 1$

Bevis. (i) Av likheten $\chi(0) = \chi(0+0) = \chi(0)^2$ följer att $\chi(0) = 1$, eftersom $\chi(0) \neq 0$.

(ii) På grund av (i) och multiplikativiteten är

$$1 = \chi(0) = \chi(n-n) = \chi(n) \cdot \chi(-n).$$

Eftersom $|\chi(n)| = 1$ följer det nu att

$$\chi(-n) = 1/\chi(n) = \overline{\chi(n)}/|\chi(n)|^2 = \overline{\chi(n)}.$$

(iii) bevisas med induktion, där induktionssteget är $\chi(m) = \chi(m-1) \cdot \chi(1)$.

(iv) På grund av (i), multiplikativitet och (iii) är

$$1 = \chi(0) = \chi(N-1)\chi(1) = \chi(1)^{N-1} \cdot \chi(1) = \chi(1)^N. \quad \square$$

Vi kan nu bestämma samtliga karaktärer till \mathbf{Z}_N .

Sats 6.2.2 *Det finns N karaktärer $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{N-1}$ till \mathbf{Z}_N och de har formen*

$$\chi_k(n) = e^{2\pi i k n / N}.$$

Det gäller vidare att

- (i) $\chi_0(n) = 1$ för alla $n \in \mathbf{Z}_N$,
- (ii) $\chi_k(n) \cdot \chi_m(n) = \chi_{k+m}(n)$ för alla $k, m, n \in \mathbf{Z}_N$
- (iii) $\chi_{-k}(n) = \overline{\chi_k(n)}$ för alla $k, n \in \mathbf{Z}_N$.

Bevis. Låt χ vara en karaktär och sätt $c = \chi(1)$. Enligt (iv) i sats 6.2.1 är $c^N = 1$, dvs. c är en rot till ekvationen $z^N = 1$. Det följer att $c = e^{2\pi i k / N}$ för något tal $k = 0, 1, \dots, N-1$. Enligt sats 6.2.1 (iii) är vidare $\chi(n) = c^n = e^{2\pi i k n / N}$.

Omvänt, för varje $k \in \mathbf{Z}_N$ får vi en karaktär χ_k genom att definiera

$$\chi_k(n) = e^{2\pi i k n / N}.$$

Det följer att karaktärerna är N till antalet, att de har den form som anges i satsen, och att (i), (ii) och (iii) gäller. \square

Anmärkning. Antag att χ och η är två karaktärer. Att produkten $\chi\eta$ och funktionen $\bar{\chi}$ ($= 1/\chi$) är karaktärer följer direkt ur karaktärsdefinitionen. Likaså är förstås den konstanta funktionen $1: n \mapsto 1$ en karaktär. Detta innebär att mängden av karaktärer bildar en kommutativ grupp under multiplikation. Sats 6.2.2 visar att vi kan uppfatta denna grupp av karaktärer som identisk (isomorf) med \mathbf{Z}_N via avbildningen $k \mapsto \chi_k$.

Egenskap (ii) i sats 6.2.2 innebär vidare att för varje fixt n är avbildningen

$$\mathbf{Z}_N \rightarrow \mathbf{C}, \quad k \mapsto \chi_k(n)$$

en karaktär på \mathbf{Z}_N , och det explicita uttryck för karaktären som vi härlett visar att

$$\chi_k(n) = \chi_n(k).$$

Lemma 6.2.3 För karaktärerna χ_k till \mathbf{Z}_N gäller att

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \chi_k(n) = \begin{cases} N & \text{om } k = 0, \\ 0 & \text{om } 1 \leq k \leq N-1. \end{cases}$$

Ett elegant sätt att uttrycka denna relation är att skriva

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \chi_k(n) = N \mathbf{e}_0(k).$$

Bevis. För fixt k bildar talen $\chi_k(n) = e^{2\pi i k n / N}$ en geometrisk följd, varför det är lätt att verifiera resultatet genom att använda formeln för summan av en geometrisk följd. Låt oss emellertid visa att resultatet är en konsekvens av karaktärsdefinitionen och av att operationen summation är translationsinvariant.

För $k = 0$ är $\chi_0(n) = 1$ för alla n , och det följer förstas att

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \chi_0(n) = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N.$$

Antag därför att $k \neq 0$. Vi har

$$R_1 \chi_k(n) = \chi_k(n-1) = \chi_k(n) \chi_k(-1) = \overline{\chi_k(1)} \chi_k(n),$$

eller kortare uttryck: $R_1 \chi_k = \overline{\chi_k(1)} \chi_k$. Genom att utnyttja translationsinvarians får vi därför

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \chi_k(n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} R_1 \chi_k(n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \overline{\chi_k(1)} \chi_k(n) = \overline{\chi_k(1)} \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \chi_k(n).$$

Av likheten mellan ytterleden följer det nu, eftersom $\overline{\chi_k(1)} = e^{-2\pi i k / N} \neq 1$, att summan $\sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \chi_k(n) = 0$. \square

Sats 6.2.4 Karaktärerna $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{N-1}$ bildar en ortogonal bas för rummet $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$. Mera precist är

$$\langle \chi_k, \chi_m \rangle = \begin{cases} N & \text{om } k = m, \\ 0 & \text{om } k \neq m. \end{cases}$$

Bevis. Definitionen av inre produkt ger

$$\langle \chi_k, \chi_m \rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \chi_k(n) \overline{\chi_m(n)} = \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \chi_k(n) \chi_{-m}(n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \chi_{k-m}(n).$$

Satsen följer därför av föregående lemma. \square

Av sats 6.2.4 följer speciellt att $\|\chi_k\|_2 = \sqrt{N}$ för alla k . Genom att dividera alla karaktärerna med \sqrt{N} får vi således en ON-bas.

6.3 Den diskreta fouriertransformen

Eftersom karaktärerna $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{N-1}$ bildar en ortogonal bas för $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ har varje funktion $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ en utveckling av typen

$$(6.3.1) \quad f = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \chi_n.$$

Koordinaterna a_n i denna utveckling kan uttryckas med hjälp av inre produkter; närmare bestämt är

$$\langle f, \chi_n \rangle = a_n \|\chi_n\|_2^2.$$

Eftersom $\|\chi_n\|_2^2 = N$, blir

$$a_n = \frac{1}{N} \langle f, \chi_n \rangle.$$

Detta är motivet bakom följande definition.

Definition För $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ och $n \in \mathbf{Z}_N$ sätter vi

$$(6.3.2) \quad \hat{f}(n) = \langle f, \chi_n \rangle = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) \overline{\chi_n(k)} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-2\pi i n k / N}.$$

Därigenom definieras en funktion \hat{f} på \mathbf{Z}_N , som kallas för *(den diskreta) fouriertransformen* av f . Vi använder också ordet fouriertransform som namn på den avbildning $\mathcal{F}: \ell^2(\mathbf{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ som definieras av att

$$\mathcal{F}f = \hat{f}.$$

Definitionen av $\hat{f}(n)$ innebär att ekvation (6.3.1) nu kan skrivas

$$(6.3.3) \quad f = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \hat{f}(n) \chi_n.$$

Eftersom $\chi_n(k) = \chi_k(n)$, kan vi vidare skriva definitionen av $\hat{f}(n)$ på formen

$$\hat{f}(n) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) \overline{\chi_k(n)} = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) \chi_{-k}(n),$$

vilket innebär att

$$(6.3.4) \quad \mathcal{F}f = \hat{f} = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) \chi_{-k}.$$

Detta uttrycker $\mathcal{F}f$ som en linjärkombination av karaktärerna, och följande sats är nu en omedelbar konsekvens av detta.

Sats 6.3.1 *Fouriertransformen $\mathcal{F}: \ell^2(\mathbf{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ är en linjär inverterbar operator.*

Bevis. Lineariteten, dvs.

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}f + \beta \mathcal{F}g$$

följer förstås av att summation är en linjär operation. Av formel (6.3.4) följer vidare att $\mathcal{F}(\mathbf{e}_k) = \chi_{-k}$, så fouriertransformering avbildar funktionerna i en bas, nämligen standardbasen, bijektivt på funktionerna i en annan bas, nämligen karaktärerna (i omvänd ordning), och en linjär operator med denna egenskap är inverterbar. \square

För att beskriva inversen till fouriertransformering inför vi nu följande följeslagare till \mathcal{F} .

Definition Den linjära operatoren $\check{\mathcal{F}}: \ell^2(\mathbf{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ definieras av att

$$\check{\mathcal{F}}f = \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) \chi_k.$$

Sats 6.3.2 (Inversionssatsen) *Operatoren $\check{\mathcal{F}}$ är invers till \mathcal{F} , dvs.*

$$\mathcal{F}^{-1} = \check{\mathcal{F}}.$$

Vi kallar därför $\check{\mathcal{F}}$ för den *inversa fouriertransformen* på $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$.

Bevis. Med hjälp av definitionen av $\check{\mathcal{F}}$ och formel (6.3.3) fås

$$\check{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f) = \check{\mathcal{F}}(\hat{f}) = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \hat{f}(n) \chi_n = f,$$

vilket innebär att $\check{\mathcal{F}}\mathcal{F} = I$, identitetsoperatoren. Operatoren $\check{\mathcal{F}}$ är således invers till fouriertransformen \mathcal{F} . \square

Här följer ytterligare notation som förenklar skrivandet av en del formler.

Definition För $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ definierar vi funktionerna \check{f} och \tilde{f} genom att sätta

$$\check{f}(n) = f(-n) \quad \text{och} \quad \tilde{f}(n) = \overline{f(-n)}$$

för alla $n \in \mathbf{Z}_N$.

Sats 6.3.3 $\check{\mathcal{F}}(f) = \frac{1}{N} \mathcal{F}(\check{f})$ och $\mathcal{F}(\tilde{f}) = \overline{\mathcal{F}(f)}$.

Bevis. Notera att $\check{\chi}_k = \chi_{-k}$, varför

$$\check{\mathcal{F}}f = \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) \chi_k = \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(-k) \chi_{-k} = \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} \check{f}(k) \chi_{-k} = \frac{1}{N} \mathcal{F}(\check{f}),$$

vilket visar den första relationen i satsen. Den andra följer av räkningen

$$\mathcal{F}(\check{f}) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} \overline{f(-k)} \chi_{-k} = \overline{\sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(-k) \chi_k} = \overline{\sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) \chi_{-k}} = \overline{\mathcal{F}(f)}. \quad \square$$

EXEMPEL 6.3.1 Som redan noterats i beviset för sats 6.3.1 är

$$\mathcal{F}(\mathbf{e}_k) = \chi_{-k} = \check{\chi}_k.$$

Med hjälp av sats 6.3.3 fås därför

$$\mathbf{e}_k = \check{\mathcal{F}}\mathcal{F}\mathbf{e}_k = \check{\mathcal{F}}(\check{\chi}_k) = \frac{1}{N} \mathcal{F}(\check{\chi}_k) = \frac{1}{N} \mathcal{F}(\chi_k).$$

Således är

$$\mathcal{F}(\chi_k) = N\mathbf{e}_k. \quad \square$$

Till varje linjär operator på ett ändligtdimensionellt rum med given bas hör en unik matris – fouriertransformens matris med avseende på standardbasen ges av följande sats.

Sats 6.3.4 Med avseende på standardbasen för $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ har fouriertransformen \mathcal{F} matrisen

$$W_N = [\omega_N^{nk}]_{0 \leq n, k \leq N-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \omega_N^3 & \dots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \omega_N^6 & \dots & \omega_N^{2(N-1)} \\ 1 & \omega_N^3 & \omega_N^6 & \omega_N^9 & \dots & \omega_N^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \omega_N^{3(N-1)} & \dots & \omega_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix},$$

där $\omega_N = e^{-2\pi i/N}$.

Observera att matrisen W_N är symmetrisk.

Bevis. Eftersom $\overline{\chi_n(k)} = e^{-2\pi i nk/N} = \omega_N^{nk}$, kan definitionen av $\hat{f}(n)$ skrivas på formen

$$\hat{f}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{nk} f(k).$$

Om vi nu uppfattar

$$f = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \hat{f} = \begin{bmatrix} \hat{f}(0) \\ \hat{f}(1) \\ \vdots \\ \hat{f}(N-1) \end{bmatrix}$$

som kolonnmatriser, är med andra ord $\hat{f}(n)$ lika med produkten av den n :te raden i matrisen W_N och kolonnmatrisen f . Detta innebär att kolonnmatrisen \hat{f} är lika med produkten av matriserna W_N och f .

Fouriertransformen kan således beräknas som matrisprodukten

$$\hat{f} = W_N f,$$

och detta betyder W_N är matrisen till operatoren \mathcal{F} med avseende på standardbasen i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$. \square

Matrisen W_N är inverterbar, beroende på att operatoren \mathcal{F} är inverterbar, och inversen W_N^{-1} är matris till den inversa operatoren \mathcal{F}^{-1} ($= \check{\mathcal{F}}$). Nu är

$$\check{\mathcal{F}}f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \chi_k(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{\omega_N^{nk}} f(k),$$

och härav följer att operatoren $\check{\mathcal{F}}$ har matrisen

$$\frac{1}{N} \overline{W_N} = \frac{1}{N} [\overline{\omega_N^{nk}}]_{0 \leq n, k \leq N-1}.$$

Följaktligen är

$$W_N^{-1} = \frac{1}{N} \overline{W_N}.$$

EXEMPEL 6.3.2 Matriserna W_N har för $N = 2, 3$ och 4 följande utseenden:

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}.$$

\square

EXEMPEL 6.3.3 Fouriertransformen till funktionen $f = (1, 2, 3, 4) \in \ell^2(\mathbf{Z}_4)$ ges av matrisprodukten

$$W_4 f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -2 + 2i \\ -2 \\ -2 - 2i \end{bmatrix}$$

med slutsatsen att $\hat{f} = (10, -2 + 2i, -2, -2 - 2i)$.

Den inversa fouriertransformen $\check{\mathcal{F}}\hat{f}$ till \hat{f} erhålls som resultat av matrismultiplikationen

$$\frac{1}{4} \overline{W_4} \hat{f} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -2 + 2i \\ -2 \\ -2 - 2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

vilket verifierar inversionssatsen enligt vilken $\check{\mathcal{F}}\hat{f} = f$. □

Vi fortsätter nu med två räkneregler som visar hur fouriertransformen ändras då en funktion translateras och multipliceras med karaktärer.

Sats 6.3.5 Antag att $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ och $m \in \mathbf{Z}_N$. Då är

- (i) $\mathcal{F}(R_m f) = \overline{\chi_m} \mathcal{F}f$
- (ii) $\mathcal{F}(\chi_m f) = R_m(\mathcal{F}f)$

Bevis. (i) följer av följande räkning:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(R_m f)(n) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} R_m f(k) \overline{\chi_n(k)} = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k - m) \overline{\chi_n(k - m)} \overline{\chi_n(m)} \\ &= \overline{\chi_n(m)} \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k - m) \overline{\chi_n(k - m)} \\ &= \overline{\chi_m(n)} \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) \overline{\chi_n(k)} = \overline{\chi_m(n)} \hat{f}(n) = (\overline{\chi_m} \mathcal{F}f)(n). \end{aligned}$$

Beviset bygger som synes på att karaktären är multiplikativ och att summan är translationsinvariant.

(ii) följer av följande kalkyl:

$$\begin{aligned} \widehat{\chi_m f}(n) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) \chi_m(k) \overline{\chi_n(k)} = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) \overline{\chi_{n-m}(k)} \\ &= \hat{f}(n - m) = R_m \hat{f}(n). \end{aligned} \quad \square$$

Vi avslutar det här avsnittet med två mycket viktiga identiteter som följer ur (6.3.3) och det faktum att fourierbasen är ortogonal.

Sats 6.3.6 För f och $g \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ gäller följande Parsevalrelationer:

- (i) $\langle f, g \rangle = \frac{1}{N} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}$
- (ii) $\|f\|_2^2 = \frac{1}{N} \|\hat{f}\|_2^2 = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} |\hat{f}(n)|^2.$

Bevis. Av (6.3.3) och motsvarande formel för g får vi

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)} \|\chi_n\|_2^2 = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)},$$

eftersom $\|\chi_n\|_2^2 = N$. Detta bevisar (i), och (ii) är förstas ett specialfall av (i). \square

EXEMPEL 6.3.4 I exempel 6.3.3 beräknade vi fouriertransformen till följden $f = (1, 2, 3, 4) \in \ell^2(\mathbf{Z}_4)$ och fann att $\hat{f} = (10, -2 + 2i, -2, -2 - 2i)$. För dessa två följder är

$$\|f\|_2^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

och

$$\|\hat{f}\|_2^2 = 10^2 + |-2 + 2i|^2 + |-2|^2 + |-2 - 2i|^2 = 120,$$

så $\|f\|^2 = \frac{1}{4} \|\hat{f}\|^2$, vilket verifierar Parsevals relation. \square

6.4 Tidsrummet och frekvensrummet

Vi gör ett uppehåll i utvecklingen av den matematiska teorin för att ge en konkret tolkning av rummet $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$, karaktärerna och fouriertransformen.

Om man samplar en signal i N tidpunkter får man en följd av tal som kan uppfattas som en funktion f i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$. Av den anledningen talar man ofta om \mathbf{Z}_N som *tidsrummet* och f som en funktion på tidsrummet.

Parametern k i karaktären $\chi_k(n) = e^{2\pi i k n / N}$ kan på motsvarande sätt tolkas som en *frekvens*. Då n genomlöper en period från 0 till N kommer punkterna $\chi_1(n)$ på enhetscirkeln att beskriva precis 1 varv, medan punkterna $\chi_2(n)$ genomlöper 2 varv av enhetscirkeln, osv. Frekvensen k , dvs. antalet genomlöpta varv, ökar då k ökar. Detta kan emellertid inte gälla för alla k upp till $k = N$, ty $\chi_N(n) = \chi_0(n) = 1$ för alla n . Eftersom $\chi_{N-k}(n) = \overline{\chi_k(n)} = \chi_{-k}(n)$, kommer exempelvis punkterna $\chi_{N-1}(n) = \overline{\chi_1(n)} = e^{-2\pi i n / N}$ att genomlöpa enhetscirkeln 1 varv *baklänges* då n går från 0 till N . De högsta frekvenserna i *frekvensrummet* $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ är de som befinner sig mitt på skalan, dvs. kring $k = [N/2]$, medan de lägsta är de som befinner sig i början och slutet av frekvensområdet.

För fouriertransformen \hat{f} av en funktion $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ gäller per definition

$$\hat{f}(k) = \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} f(n) \overline{\chi_k(n)}.$$

Om vi uppfattar f som en funktion på tidsrummet ska vi därför betrakta fouriertransformen \hat{f} som en funktion definierad på frekvensrummet.

6.5 Faltning och translationsinvarianta operatorer

Definition För $f, g \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ definieras *faltningen* $f * g \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ av att

$$(f * g)(n) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k)g(n-k) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k)R_k g(n),$$

dvs.

$$f * g = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k)R_k g.$$

Faltningen $f * g$ är med andra ord en viktad summa av translat $R_k g$, där vikterna är $f(k)$.

EXEMPEL 6.5.1 Vi beräknar faltningen $f * \chi_m$ mellan en godtycklig funktion och en karaktär:

$$\begin{aligned} (f * \chi_m)(n) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k)\chi_m(n-k) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k)\chi_m(n)\chi_m(-k) \\ &= \chi_m(n) \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k)\overline{\chi_m(k)} = \chi_m(n)\hat{f}(m). \end{aligned}$$

Alltså är

$$f * \chi_m = \hat{f}(m)\chi_m. \quad \square$$

Faltning är en ganska komplicerad operation. En av finesserna med fouriertransformen är att den överför faltning till multiplikation av funktioner. Vi har nämligen följande resultat.

Sats 6.5.1 För $f, g \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ är

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g.$$

Bevis. Genom att utnyttja linearitet och att $\mathcal{F}(R_k g) = \overline{\chi_k} \mathcal{F}g$ erhålls:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g) &= \mathcal{F}\left(\sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k)R_k g\right) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k)\mathcal{F}(R_k g) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k)\overline{\chi_k}\mathcal{F}g \\ &= \mathcal{F}g \cdot \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k)\overline{\chi_k} = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g. \end{aligned} \quad \square$$

EXEMPEL 6.5.2 För att lösa faltningsekvationen

$$a * f = b,$$

där a och b är följderna $(2, 3, 4, 1)$ resp. $b = (0, 6, 8, 6)$ i $\ell^2(\mathbf{Z}_4)$, fouriertransformerar vi ekvationen och får då det ekvivalenta sambandet

$$\hat{a}(n)\hat{f}(n) = \hat{b}(n), \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

Nu är $\hat{a} = W_4 a = (10, -2 - 2i, 2, -2 + 2i)$ och $\hat{b} = W_4 b = (20, -8, -4, -8)$, så

$$\hat{f} = \left(\frac{20}{10}, \frac{-8}{-2 - 2i}, \frac{-4}{2}, \frac{-8}{-2 + 2i} \right) = (2, 2 - 2i, -2, 2 + 2i).$$

Inverstransformering ger slutligen att

$$f = \frac{1}{4} \overline{W_4} \hat{f} = (1, 2, -1, 0). \quad \square$$

Sats 6.5.2 För $f, g, h \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ och $k \in \mathbf{Z}_N$ är

- (i) $f * (\alpha g + \beta h) = \alpha(f * g) + \beta(f * h)$
- (ii) $f * g = g * f$
- (iii) $f * (g * h) = (f * g) * h$
- (iv) $f * \mathbf{e}_0 = f$
- (v) $R_k(f * g) = (R_k f) * g = f * (R_k g)$

Bevis. Eftersom fouriertransformen är inverterbar räcker det att visa att båda sidor i respektive likhet har samma fouriertransform. Vi gör detta för (iii) och lämnar övriga identiteter som enkla övningar.

På grund av närmast föregående sats är

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * (g * h)) &= \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}(g * h) = \mathcal{F}f \cdot (\mathcal{F}g \cdot \mathcal{F}h) \\ &= (\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g) \cdot \mathcal{F}h = \mathcal{F}(f * g) \cdot \mathcal{F}h = \mathcal{F}((f * g) * h). \quad \square \end{aligned}$$

Naturligtvis kan man också visa identiteterna i sats 6.5.2 direkt genom att enbart utnyttja faltningsdefinitionen, och läsaren bör försöka göra detta som övning.

Definition En operator $T: \ell^2(\mathbf{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ kallas *translationsinvariant* om

$$R_k T = T R_k$$

för alla $k \in \mathbf{Z}_N$.

Eftersom $R_k = R_1^k$ är operatoren T translationsinvariant om och endast om $R_1 T = T R_1$.

Sats 6.5.3 Följande fem villkor är ekvivalenta för en godtycklig operator $T: \ell^2(\mathbf{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_N)$.

- (i) T är linjär och translationsinvariant.
- (ii) $T(f * g) = f * (Tg)$ för alla funktioner $f, g \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$.
- (iii) Det finns en funktion $b \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ så att $Tf = b * f$.
- (iv) T är linjär och karaktärerna $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{N-1}$ är egenvektorer till T .
- (v) Det finns en funktion $\mu \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ så att $Tf = \check{\mathcal{F}}(\mu \hat{f})$.

Bevis. (i) \Rightarrow (ii): Antag först att T är linjär och translationsinvariant. Eftersom $f * g = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) R_k g$, är

$$T(f * g) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) T(R_k g) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k) R_k (Tg) = f * (Tg),$$

dvs. (ii) gäller.

(ii) \Rightarrow (iii): Antag att $T(f * g) = f * (Tg)$ för alla funktioner f och g . Då är speciellt

$$Tf = T(f * \mathbf{e}_0) = f * (T\mathbf{e}_0) = (T\mathbf{e}_0) * f,$$

dvs. (iii) gäller med $b = T\mathbf{e}_0$.

(iii) \Rightarrow (i): Antag att $Tf = b * f$; då är T linjär på grund av egenskap (i) i sats 6.5.2. På grund av (v) i samma sats är vidare

$$R_k Tf = R_k(b * f) = b * (R_k f) = T(R_k f),$$

vilket visar att T är translationsinvariant.

(iii) \Rightarrow (iv): Om (iii) gäller så är T linjär, och av resultatet i exempel 6.5.1 följer att $T(\chi_n) = b * \chi_n = \hat{b}(n) \chi_n$ vilket innebär att χ_n är en egenvektor med $\hat{b}(n)$ som motsvarande egenvärde.

(iv) \Rightarrow (v): Antag att $T\chi_n = \lambda(n) \chi_n$ för alla $n \in \mathbf{Z}_N$. På grund av inversionssatsen blir då

$$\begin{aligned} Tf &= T\left(\frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \hat{f}(n) \chi_n\right) = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \hat{f}(n) T\chi_n \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \lambda(n) \hat{f}(n) \chi_n = \check{\mathcal{F}}(\lambda \hat{f}), \end{aligned}$$

vilket visar att (v) gäller med $\mu(n) = \lambda(n)$.

(v) \Rightarrow (iii): Antag att (v) gäller och sätt $b = \check{\mathcal{F}}\mu$; då är $\hat{b} = (\mathcal{F}\check{\mathcal{F}})\mu = \mu$ och

$$\check{\mathcal{F}}(\mu \hat{f}) = \check{\mathcal{F}}(\hat{b} \hat{f}) = \check{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(b * f)) = b * f,$$

vilket visar att (iii) gäller. □

EXEMPEL 6.5.3 Definiera operatoren $T: \ell^2(\mathbf{Z}_4) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_4)$ genom att sätta

$$Tf(n) = f(n) + 3f(n-2) - 2f(n-3).$$

I termer av translationsoperatorerna R_k är tydligen $T = R_0 + 3R_2 - 2R_3$. Det följer att $R_1T = R_1 + 3R_3 - 2R_4 = TR_1$, så operatoren T är translationsinvariant. För

$$b = T\mathbf{e}_0 = T(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 3, -2)$$

är $Tf = b * f$. □

En translationsinvariant operator känns, som vi strax ska se, omedelbart igen på utseendet av operators matris med avseende på standardbasen.

Definition En $N \times N$ -matris $A = [a_{ij}]_{i,j \in \mathbf{Z}_N}$ kallas *cyklisk* om $a_{i+1,j+1} = a_{ij}$ för alla index $i, j \in \mathbf{Z}_N$.

EXEMPEL 6.5.4 Matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

är cyklisk. □

Om vi uppfattar den k :te kolonnen A_{*k} i $N \times N$ -matrisen A som en vektor i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$, så är tydligen matrisen A cyklisk om och endast om $A_{*k} = R_k A_{*0}$ för alla k . Kolonnerna i en cyklisk matris är med andra ord translat av den första kolonnen (kolonn nr 0).

Sats 6.5.4 En operator T på $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ är translationsinvariant om och endast om operators matris med avseende på standardbasen är cyklisk.

Bevis. Låt T vara en operator på $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$, och låt A vara operators matris med avseende på standardbasen $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{N-1}\}$. Den k :te kolonnen A_{*k} i A består av vektorn $T\mathbf{e}_k$, eller närmare bestämt av vektorns koordinater med avseende på standardbasen.

Om T är translationsinvariant med $T = b * f$, så är

$$A_{*k} = T\mathbf{e}_k = T(R_k\mathbf{e}_0) = R_k(T\mathbf{e}_0) = R_k(b * \mathbf{e}_0) = R_k b.$$

Detta innebär att kolonnen nr 0 i matrisen är lika med vektorn b och att övriga kolonner fås som successiva translat av denna kolonn, dvs. operators matris är cyklisk.

Omvänt, om matrisen är cyklisk med $A_{*0} = b$, så är $T\mathbf{e}_k = A_{*k} = R_k b$. För en godtycklig funktion $f = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k)\mathbf{e}_k$ är därför

$$Tf = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k)T\mathbf{e}_k = \sum_{k \in \mathbf{Z}_N} f(k)R_k b = f * b,$$

vilket visar att T är translationsinvariant. \square

EXEMPEL 6.5.5 Operatoren i exempel 6.5.3 har matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
 \square

6.6 Sambandet mellan \mathbf{Z}_N och $\mathbf{Z}_{N/2}$

I det här avsnittet antar vi genomgående att *talet N är delbart med 2*. Vi sätter vidare $M = N/2$ så att

$$N = 2M.$$

Gruppen \mathbf{Z}_M kan uppfattas som en delgrupp av gruppen \mathbf{Z}_N via den injektiva avbildningen

$$\varphi: \mathbf{Z}_M \rightarrow \mathbf{Z}_N, \quad \varphi(m) = 2m,$$

en avbildning som uppenbarligen respekterar gruppstrukturerna i den bemärkelsen att $\varphi(m+n) = \varphi(m) + \varphi(n)$. Sådana avbildningar mellan grupper kallas *homomorfier*, och bildmängden $\varphi(\mathbf{Z}_M) = \{0, 2, 4, \dots, N-2\}$ är en delgrupp av \mathbf{Z}_N som i alla gruppteoretiska avseenden är likvärdig med gruppen \mathbf{Z}_M .

För att förstå varför det kan vara fruktbart att studera gruppen \mathbf{Z}_M , när man primärt är intresserad av $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$, betraktar vi en funktion $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$. Funktionen är uppenbarligen helt bestämd av de båda restriktionerna $f|_A$ och $f|_B$ av f till mängden A av alla jämna tal i \mathbf{Z}_N resp. mängden B av alla udda tal i \mathbf{Z}_N . Med vektornotation är

$$f|_A = (f(0), f(2), f(4), \dots, f(N-2))$$

och

$$\begin{aligned} f|_B &= (f(1), f(3), f(5), \dots, f(N-1)) \\ &= (R_{-1}f(0), R_{-1}f(2), R_{-1}f(4), \dots, R_{-1}f(N-2)) = (R_{-1}f)|_A. \end{aligned}$$

Att studera funktionen f är således ekvivalent med att studera de båda restriktionerna $f|_A$ och $(R_{-1}f)|_A$, som via den ovan nämnda homomorfismen φ kan uppfattas som två funktioner u och v på den mindre gruppen \mathbf{Z}_M . Vi ska se att det finns ett enkelt samband mellan fouriertransformen \hat{f} till

f och fouriertransformerna i \mathbf{Z}_M till de båda funktionerna u och v . Vi ska också visa att det snabbaste sättet att beräkna fouriertransformen \hat{f} bygger på att man först beräknar fouriertransformerna \hat{u} och \hat{v} , en metod som kallas *snabba fouriertransformen*.

Vi börjar därför med att notera sambandet mellan karaktärerna till grupperna \mathbf{Z}_M och \mathbf{Z}_N .

Sats 6.6.1 Låt $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{N-1}$ beteckna karaktärerna till gruppen \mathbf{Z}_N och $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{M-1}$ beteckna karaktärerna till gruppen \mathbf{Z}_M , så att

$$\chi_k(n) = e^{2\pi i k n / N}, \quad n, k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

och

$$\eta_k(m) = e^{2\pi i k m / M}, \quad m, k = 0, 1, 2, \dots, M-1.$$

Då är

$$\eta_k(m) = \chi_k(2m) = \chi_{k+M}(2m) \quad \text{för } k, m = 0, 1, \dots, M-1.$$

Bevis. Sambandet mellan karaktärerna följer med en gång ur de explicita formelerna för χ_k och η_k . Exempelvis är

$$\begin{aligned} \chi_{k+M}(2m) &= e^{2\pi i (k+M) 2m / N} = e^{2\pi i (k+M) 2m / 2M} = e^{2\pi i k m / M} \cdot e^{2\pi i m} \\ &= e^{2\pi i k m / M} = \eta_k(m). \end{aligned}$$

□

Det är naturligtvis ingen tillfällighet att sambandet mellan karaktärerna till \mathbf{Z}_N och \mathbf{Z}_M ser ut som det gör. Om φ som tidigare betecknar homomorfin $\varphi(m) = 2m$ mellan \mathbf{Z}_M och delgruppen av alla multipler av 2 i \mathbf{Z}_N , och χ är en karaktär till \mathbf{Z}_N , dvs. en multiplikativ avbildning $\mathbf{Z}_N \rightarrow \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$, så är sammansättningen $\chi \circ \varphi$, dvs. avbildningen $m \mapsto \chi(2m)$, uppenbarligen en karaktär till \mathbf{Z}_M . Funktionerna $m \mapsto \chi_k(2m)$ är således karaktärer till \mathbf{Z}_M för $k = 0, 1, \dots, N-1$. Att vi inte får $N-1$ karaktärer till \mathbf{Z}_M på detta vis beror naturligtvis på att $\chi_{k+M}(2m) = \chi_k(2m)$, vilket reducerar antalet *olika* karaktärer till gruppen \mathbf{Z}_M med en faktor $\frac{1}{2}$ till M stycken.

Följande två operatorer spelar en viktig roll i konstruktionen av wavelet-baser och bidrar också till att förklara sambandet mellan fouriertransformerna till funktioner i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ och $\ell^2(\mathbf{Z}_M)$.

Definition Nedsamlingsoperatorn $D: \ell^2(\mathbf{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_M)$ och uppsamlingsoperatorn $U: \ell^2(\mathbf{Z}_M) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ definieras av att

$$Df(m) = f(2m) \quad \text{för alla } m \in \mathbf{Z}_M,$$

och

$$Ug(n) = \begin{cases} g(n/2) & \text{om } n \in \mathbf{Z}_n \text{ är jämnt} \\ 0 & \text{om } n \in \mathbf{Z}_n \text{ är udda.} \end{cases}$$

Här är förstas f en godtycklig funktion i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ och g en godtycklig funktion i $\ell^2(\mathbf{Z}_M)$. Med funktionerna f och g skrivna på vektorform som

$$\begin{aligned} f &= (f(0), f(1), f(2), \dots, f(N-1)) \quad \text{resp.} \\ g &= (g(0), g(1), g(2), \dots, g(M-1)) \end{aligned}$$

är således

$$Df = (f(0), f(2), f(4), \dots, f(N-2))$$

och

$$Ug = (g(0), 0, g(1), 0, g(2), 0, \dots, g(M-1), 0).$$

Observera att $DU = I$, den identiska avbildningen, men att UD inte är lika med den identiska avbildningen, eftersom

$$UDf(n) = \begin{cases} f(n) & \text{om } n \text{ är jämnt} \\ 0 & \text{om } n \text{ är udda.} \end{cases}$$

Fouriertransformen av en funktion i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ är en funktion i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$, medan förstas fouriertransformen av en funktion i $\ell^2(\mathbf{Z}_M)$ är en funktion i $\ell^2(\mathbf{Z}_M)$. Detta kommer emellertid inte att hindra oss från att använda samma beteckning, \hat{f} eller $\mathcal{F}f$, för fouriertransformen av funktioner i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ och $\ell^2(\mathbf{Z}_M)$, eftersom det knappast kan uppstå något missförstånd.

Sats 6.6.2 För $g \in \ell^2(\mathbf{Z}_M)$ och $k = 0, 1, \dots, M-1$ är

$$\widehat{Ug}(k) = \widehat{Ug}(k+M) = \hat{g}(k).$$

Bevis. För $\epsilon = 0$ och $\epsilon = 1$ är $\chi_{k+\epsilon M}(2m) = \eta_k(m)$ enligt sats 6.6.1. Detta i kombination med att $Ug(n) = 0$ för udda n och $Ug(n) = g(n/2)$ för jämna n ger att

$$\begin{aligned} \widehat{Ug}(k + \epsilon M) &= \sum_{n=0}^{N-1} Ug(n) \overline{\chi_{k+\epsilon M}(n)} = \sum_{m=0}^{M-1} Ug(2m) \overline{\chi_{k+\epsilon M}(2m)} \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} g(m) \overline{\eta_k(m)} = \hat{g}(k). \end{aligned}$$

□

Eftersom vi inte kommer att behöva resultatet i följande sats lämnar vi beviset av densamma som övning.

Sats 6.6.3 Antag att $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ och $k = 0, 1, 2, \dots, M-1$. Då är

$$\widehat{Df}(k) = \frac{1}{2}(\hat{f}(k) + \hat{f}(k+M)).$$

6.7 Snabba fouriertransformen

I det här avsnittet ska vi analysera hur komplicerat det är att beräkna fouriertransformen till en funktion i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$. Eftersom additioner kräver väsentligt mindre beräkningstid än multiplikationer, kommer vi att mäta beräkningsarbetets omfattning genom att räkna antalet komplexa multiplikationer som krävs för att beräkna transformen.

Beräkningsarbetet beror naturligtvis av N och växer då N växer. Låt därför $\mu(N)$ beteckna antalet komplexa multiplikationer som maximalt krävs för att beräkna fouriertransformen \hat{f} av en godtycklig funktion f i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$.

Om fourierkoefficienten $\hat{f}(k)$ beräknas med hjälp av definitionen

$$\hat{f}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-2\pi ink/N}$$

åtgår det tydligen N komplexa multiplikationer för varje komponent $\hat{f}(k)$, och eftersom det finns N komponenter behövs det N^2 komplexa multiplikationer för att beräkna hela transformen. Detta visar att $\mu(N) \leq N^2$, och att det i allmänhet krävs N^2 komplexa multiplikationer om man använder definitionen av \hat{f} för beräkningen.

Vi ska nu diskutera ett effektivare sätt att beräkna fouriertransformen, den s. k. *snabba fouriertransformen* (FFT). Algoritmen förutsätter att talet N är sammansatt. Vi nöjer oss med att beskriva det enklaste fallet att N är delbart med en potens av 2.

Antag till att börja med att talet N är jämnt. Den snabba fouriertransformen bygger på följande sats.

Sats 6.7.1 Definiera, givet funktionen $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$, funktionerna u och v i $\ell^2(\mathbf{Z}_{N/2})$ genom att sätta

$$u = Df \quad \text{och} \quad v = DR_{-1}f,$$

dvs.

$$u = (f(0), f(2), \dots, f(N-2)) \quad \text{och} \quad v = (f(1), f(3), \dots, f(N-1)).$$

Då är

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \hat{u}(k) + e^{-2\pi i k/N} \hat{v}(k) \\ \hat{f}(N/2 + k) &= \hat{u}(k) - e^{-2\pi i k/N} \hat{v}(k)\end{aligned}$$

för $k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$.

Bevis. Eftersom

$$\begin{aligned}Uu &= (f(0), 0, f(2), 0, f(4), 0, \dots, f(N-2), 0) \quad \text{och} \\ R_1 Uv &= (0, f(1), 0, f(3), 0, f(5), \dots, 0, f(N-1))\end{aligned}$$

är

$$f = Uu + R_1 Uv.$$

Det följer därför av linearitet, sats 6.3.5 (i) och sats 6.6.2 att

$$\hat{f}(k + \epsilon N/2) = \hat{u}(k) + \overline{\chi_1(k + \epsilon N/2)} \hat{v}(k),$$

där ϵ är lika med 0 eller 1. Vidare är

$$\overline{\chi_1(k + \epsilon N/2)} = e^{-2\pi i (k + \epsilon N/2)/N} = e^{-2\pi i k/N} \cdot e^{\epsilon \pi i} = \begin{cases} e^{-2\pi i k/N} & \text{om } \epsilon = 0 \\ -e^{-2\pi i k/N} & \text{om } \epsilon = 1. \end{cases}$$

Därmed är beviset klart. \square

Om vi har beräknat fouriertransformerna \hat{u} och \hat{v} , behöver vi således bara utföra de $N/2$ komplexa multiplikationerna $e^{-2\pi i k/N} \cdot \hat{v}(k)$ (samt förstås N additioner) för att beräkna fouriertransformen \hat{f} . Detta visar att

$$(6.7.1) \quad \mu(N) \leq 2\mu(N/2) + N/2.$$

Transformen \hat{u} kan vi beräkna med hjälp av definitionen med $(N/2)^2$ komplexa multiplikationer, och detsamma gäller för \hat{v} . Med hjälp av sats 6.7.1 kan vi således beräkna \hat{f} med

$$2(N/2)^2 + N/2 = \frac{1}{2}(N^2 + N)$$

komplexa multiplikationer, vilket är mindre än de N^2 komplexa multiplikationer som behövs för att beräkna \hat{f} direkt.

Om N är delbart med fyra kan vi gå ett steg vidare genom att beräkna \hat{u} och \hat{v} med hjälp av sats 6.7.1, osv. Det gynnsammaste fallet är att N är en potens av 2. I detta fall leder en rekursiv användning av sats 6.7.1 till följande resultat.

Sats 6.7.2 *Antag att N är en potens av 2. Då kan fouriertransformen av en funktion i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ beräknas med högst*

$$\frac{1}{2}N \log_2 N$$

komplexa multiplikationer.

Bevis. Sätt $N = 2^n$; påståendet i satsen är då ekvivalent med påståendet

$$(6.7.2) \quad \mu(2^n) \leq n2^{n-1}.$$

För att visa olikheten (6.7.2) använder vi induktion. För att beräkna transformen av en funktion $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_2)$ behövs det inte någon multiplikation alls eftersom $\hat{f}(0) = f(0) + f(1)$ och $\hat{f}(1) = f(0) - f(1)$. Således är $\mu(2) = 0$, så olikheten (6.7.2) gäller för $n = 1$.

Antag nu att olikheten (6.7.2) gäller då $n = m$. Induktionsantagandet tillsammans med olikheten (6.7.1) för $M = 2^m$ ger då

$$\mu(2^{m+1}) \leq 2\mu(2^m) + 2^m \leq 2(m2^{m-1}) + 2^m = (m+1)2^m.$$

Detta visar att (6.7.2) gäller då $n = m+1$, och därmed är induktionsbeviset klart. \square

EXEMPEL 6.7.1 Låt oss beräkna fouriertransformen till funktionen

$$f = (1, 0, 2, 6, 3, 8, 4, 6) \in \ell^2(\mathbf{Z}_8)$$

givet att vi redan beräknat transformerna till

$$u = Df = (1, 2, 3, 4) \quad \text{och} \quad v = DR_{-1}f = (0, 6, 8, 6).$$

I exemplen 6.3.3 och 6.5.2 fann vi att

$$\hat{u} = (10, -2 + 2i, -2, -2 - 2i) \quad \text{och} \quad \hat{v} = (20, -8, -4, -8).$$

Eftersom $e^{-2\pi i k/8}$ för $k = 0, 1, 2$ och 3 är lika med 1 , $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$, $-i$ och

$-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, följer de nu av sats 6.7.1 att

$$\hat{f}(0) = 10 + 20 = 30$$

$$\hat{f}(4) = 10 - 20 = -10$$

$$\hat{f}(1) = -2 + 2i + \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)(-8) = -2 - 4\sqrt{2} + (2 + 4\sqrt{2})i$$

$$\hat{f}(5) = -2 + 2i - \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)(-8) = -2 + 4\sqrt{2} + (2 - 4\sqrt{2})i$$

$$\hat{f}(2) = -2 - i(-4) = -2 + 4i$$

$$\hat{f}(6) = -2 + i(-4) = -2 - 4i$$

$$\hat{f}(3) = -2 - 2i - \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)(-8) = -2 + 4\sqrt{2} - (2 - 4\sqrt{2})i$$

$$\hat{f}(7) = -2 - 2i + \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)(-8) = -2 - 4\sqrt{2} - (2 + 4\sqrt{2})i. \quad \square$$

Den snabba fouriertransformen kan också användas för att beräkna faltningar effektivt. Om faltningen $f * g$ av två $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ -funktioner beräknas direkt ur definitionen

$$(f * g)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)g(n-k)$$

behövs det N multiplikationer för varje komponent $(f * g)(n)$ och således totalt N^2 multiplikationer för att beräkna $f * g$. Om vi istället utnyttjar att

$$(f * g)(n) = \check{\mathcal{F}}\mathcal{F}(f * g)(n) = \frac{1}{N} \widehat{(\hat{f} \cdot \hat{g})}(-n),$$

kan vi beräkna $f * g$ genom att först beräkna fouriertransformerna \hat{f} och \hat{g} , vilket totalt kräver högst $2\mu(N)$ multiplikationer, sedan multiplicera ihop transformerna \hat{f} och \hat{g} , vilket kräver ytterligare N multiplikationer, sedan beräkna fouriertransformen $\widehat{(\hat{f} \cdot \hat{g})}$, vilket kräver ytterligare $\mu(N)$ multiplikationer, och slutligen dividera med N . Den avslutande divisionen med heltalet N går snabbt, i synnerhet om N är en potens av 2, så den bortser vi ifrån i vår komplexitetsberäkning. Totalt åtgår således högst $3\mu(N) + N$ komplexa multiplikationer. För heltalspotenser av N får vi därför följande korollarium till föregående sats.

Sats 6.7.3 *Om N är en potens av 2, kan faltningen av två funktioner i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ beräknas med högst $N + \frac{3N}{2} \log_2 N$ komplexa multiplikationer.*

Övningsuppgifter till kapitel 6

6.1 Beräkna \hat{f} när

- a) $f = (1, 2, 3, 4) \in \ell^2(\mathbf{Z}_4)$ b) $f = (1, i, 2 + i, -3) \in \ell^2(\mathbf{Z}_4)$
 c) $f = (1, 2, 3, 4, 5, 6) \in \ell^2(\mathbf{Z}_6)$

6.2 Visa att fouriertransformen \hat{f} är reell om och endast om $f(k) = \overline{f(-k)}$ för alla k .

6.3 Funktionen $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_4)$ har fouriertransformen $\hat{f} = (1, i, 1, -i)$.

- a) Beräkna f . b) Beräkna $f * f$.

6.4 f och g är två funktioner i $\ell^2(\mathbf{Z}_3)$. För funktionen f gäller att $\hat{f} = (1, 2, 0)$, medan $g = (1, \omega, \omega^2)$, där $\omega = e^{-2\pi i/3} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$. Beräkna f , \hat{g} och $f * g$.

6.5 Lös faltningsekvationen

$$f * a = b$$

för $a = (2, 3, 4, 1)$ och $b = (0, 6, 8, 6)$ i $\ell^2(\mathbf{Z}_4)$.

6.6 För $a \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ gäller att $\hat{a}(0) = 0$ medan $\hat{a}(k) \neq 0$ för $k = 1, 2, \dots, N-1$.

- a) Bestäm alla lösningar f till ekvationen $a * f = 0$.
 b) För vilka $b \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ är ekvationen $a * f = b$ lösbar? Är lösningen i så fall entydig?

6.7 Beräkna egenvärdena till den cykliska matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

6.8 Definiera en translationsinvariant avbildning $T: \ell^2(\mathbf{Z}_4) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_4)$ genom att sätta

$$(Tf)(n) = 3f(n-2) + if(n) - (2+i)f(n+1).$$

- a) Bestäm T 's matris med avseende på standardbasen.
 b) Bestäm egenvärden och egenvektorer till avbildningen T .

6.9 Låt S och T vara två translationsinvarianta operatorer på $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$. Visa att operatorerna kommuterar, dvs. att $ST = TS$.

6.10 Antag att $a \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ och låt A vara den cykliska matris som har a som sin första kolumn. Visa att följande tre villkor är ekvivalenta:

- (i) Translaten $R_0a, R_1a, \dots, R_{N-1}a$ utgör en bas för $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$.
 (ii) Matrisen A är inverterbar.
 (iii) $\hat{a}(n) \neq 0$ för alla $n \in \mathbf{Z}_N$.

6.11 Låt a och b vara element i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$.

- a) Visa att $\langle R_k a, R_m b \rangle = (a * \tilde{b})(m - k)$.
- b) Utnyttja a) för att visa att följande tre villkor är ekvivalenta:
 - (i) Translaten $R_0 a, R_1 a, \dots, R_{N-1} a$ utgör en ON-bas för $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$.
 - (ii) $a * \tilde{a} = \mathbf{e}_0$.
 - (iii) $|\hat{a}(n)| = 1$ för alla n .

6.12 a) Bestäm fouriertransformerna till $a = (1, 4, 1, 2)$ och $b = (1, 2, 3, 4)$ i $\ell^2(\mathbf{Z}_4)$.

- b) Utnyttja resultaten i a) och den snabba Fouriertransformen för att beräkna fouriertransformen till funktionen $f = (1, 1, 4, 2, 1, 3, 2, 4) \in \ell^2(\mathbf{Z}_8)$.

6.13 Låt $u = \frac{\sqrt{2}}{4}(1, 1 - \sqrt{2}, 1, 1 + \sqrt{2})$.

- a) Visa att $\{u, R_2 u\}$ är en ON-mängd i $\ell^2(\mathbf{Z}_4)$.
- b) Bestäm en funktion v så att $B = \{u, R_2 u, v, R_2 v\}$ blir en ON-bas i $\ell^2(\mathbf{Z}_4)$.
(ON-basen B är en s. k. *första etappens waveletbas* för $\ell^2(\mathbf{Z}_4)$.)

Kapitel 7

Fouriertransformen

7.1 Introduktion

För att en funktion ska kunna skrivas som summan av en fourierserie måste funktionen vara periodisk. Denna inskränkning är dock inte så allvarlig som man kan tycka vid första anblicken; funktioner med begränsade intervall som sina definitionsmängder kan ju alltid utvidgas till periodiska funktioner, och de kan därför – om de är tillräckligt reguljära – representeras av fourierserier i sina ursprungliga definitionsmängder. För icke-periodiska funktioner med hela \mathbf{R} som definitionsmängd finns det emellertid inte något hopp om att erhålla fourierserier som representerar funktionerna överallt. Lösningen består i att istället representera sådana funktioner med integraler som är analoga med fourierserierna. För att komma fram till hur denna integralrepresentation bör se ut resonerar vi i detta avsnitt helt heuristiskt och lämnar detaljfrågor om konvergens till följande avsnitt.

Låt därför $f(t)$ vara en hygglig funktion, definierad på \mathbf{R} och med absolutkonvergent integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$, och låt T vara ett (stort) positivt tal. Genom att utvidga restriktionen av funktionen f till intervallet $] -T, T[$ $2T$ -periodiskt får vi för $|t| < T$ en fourierserieutveckling av $f(t)$ av följande slag

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(T) e^{in\frac{\pi}{T}t},$$

där fourierkoefficienterna $c_n(T)$ ges av formeln

$$c_n(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-in\frac{\pi}{T}t} dt.$$

Tanken är nu att låta T gå mot oändligheten. Eftersom integralerna

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-in\frac{\pi}{T}t} dt$$

är absolutkonvergenta, går de båda svansarna

$$\int_{-\infty}^{-T} f(t)e^{-in\frac{\pi}{T}t} dt \quad \text{och} \quad \int_T^{\infty} f(t)e^{-in\frac{\pi}{T}t} dt$$

mot 0 då $T \rightarrow \infty$, så därför bör vi för stora T med god approximation kunna sätta

$$c_n(T) \approx \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-in\frac{\pi}{T}t} dt.$$

Om vi inför definitionen

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (\omega \in \mathbf{R})$$

kan vi alltså kortare skriva

$$c_n(T) \approx \frac{1}{2T} \hat{f}\left(n\frac{\pi}{T}\right),$$

och insättning av detta i fourierserien för $f(t)$ på intervallet $[-T, T]$ ger oss approximationen

$$f(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} \hat{f}\left(n\frac{\pi}{T}\right) e^{in\frac{\pi}{T}t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{T} \hat{f}\left(n\frac{\pi}{T}\right) e^{in\frac{\pi}{T}t}.$$

Summan i högerledet är en Riemannsumma (rektangelapproximation) till integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$ med steglängd π/T , och när $T \rightarrow \infty$ konvergerar summan mot denna integral. Efter gränsövergång bör vi således erhålla formeln

$$(7.1.1) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

Funktionen \hat{f} kallas *fouriertransformen* till funktionen f , och genom integralformeln (7.1.1), som går under namnet *inversionsformeln* representeras f av sin fouriertransform på ett sätt som motsvarar hur en periodisk funktion representeras av sin fourierserie. Naturligtvis behöver funktionen f uppfylla vissa villkor för att formeln ovan ska gälla, och sådana villkor kommer vi att studera närmare i avsnitt 7.3.

Vi kompletterar nu den informella härledningen av inversionsformeln med en lika informell härledning av Parsevals formel, som för $2T$ -periodiska funktioner har följande form:

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(T)|^2.$$

Insättning av approximationen $c_n(T) \approx \frac{1}{2T} \hat{f}(n\frac{\pi}{T})$ ger efter multiplikation med $2T$

$$\int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} |\hat{f}(n\frac{\pi}{T})|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{T} |\hat{f}(n\frac{\pi}{T})|^2.$$

Summan i högerledet är en Riemannsumma som konvergerar mot integralen $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$, då $T \rightarrow \infty$. Vi kan följaktligen förvänta oss att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Denna formel, *Parsevals formel för fouriertransformen*, gäller (med lämplig tolkning av fouriertransformen \hat{f}) för alla funktioner f med ändligt vänsterled, och vi kommer att studera den utförligt i avsnitt 7.4.

Vi avslutar det här avsnittet med en tolkning av inversionsformeln och Parsevals formel. I många viktiga tillämpningar svarar $f(t)$ mot en kontinuerlig signal som varierar som funktion av tiden t . Funktionerna $e^{i\omega t}$ representerar då rena periodiska svängningar med vinkelfrekvens ω . Om t mäts i sekunder så är tiden för en period lika med $2\pi/\omega$ s, dvs. svängningsfunktionen $e^{i\omega t}$ hinner med $\omega/2\pi$ perioder per sekund, vilket innebär att dess frekvens är $\omega/2\pi$ Hz. Fouriertransformen $\hat{f}(\omega)$ är ett mått på signalens ”innehåll” av rena svängningar med vinkelfrekvens ω , och inversionsformeln (7.1.1) beskriver signalens sammansättning av de olika rena svängningarna. En integral av typen $\int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt$ kan tolkas som signalens energiinnehåll under tiden mellan t_1 och t_2 , medan integralen $\frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$ istället är energiinnehållet i frekvensbandet mellan ω_1 och ω_2 (om man mäter i lämpliga enheter). Parsevals formel uttrycker då bara att energin är densamma om man summerar över hela signalens livslängd eller över alla frekvenser.

7.2 Fouriertransformen

Låt oss påminna om att $L^1(\mathbf{R})$ betecknar vektorrummet av alla (Lebesguemätbara) komplexvärda funktioner på \mathbf{R} som uppfyller

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbf{R}} |f(t)| dt < \infty.$$

Translatet av en funktion f på \mathbf{R} betecknas $R_s f$, och definieras av att

$$R_s f(t) = f(t - s).$$

För funktioner f och g på \mathbf{R} definieras faltningen $f * g$ av sambandet

$$f * g(t) = \int_{\mathbf{R}} f(t - s)g(s) ds,$$

förutsatt att integralen existerar. Man kan visa att faltningen är väldefinierad ifall f och g båda tillhör $L^1(\mathbf{R})$, och att $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. Det finns andra fall när faltningen är väldefinierad; t. ex. när $f \in L^1(\mathbf{R})$ och g är en begränsad (Lebesgue-mätbar) funktion; i det fallet är faltningen $f * g$ en begränsad funktion med $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

Definition Låt $f \in L^1(\mathbf{R})$. Då existerar integralen

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

för alla $\omega \in \mathbf{R}$. Funktionen \hat{f} kallas *fouriertransformen* till funktionen f . Ibland är det lämpligare att beteckna fouriertransformen $\mathcal{F}[f]$.

EXEMPEL 7.2.1 Med den *karaktéristiska funktionen* χ_I till ett intervall I menas funktionen som är identiskt lika med 1 på intervallet och identiskt lika med 0 utanför intervallet. Låt oss beräkna fouriertransformen till den karaktéristiska funktionen till det symmetriska intervallet $[-a, a]$:

$$\mathcal{F}[\chi_{[-a,a]}](\omega) = \int_{\mathbf{R}} \chi_{[-a,a]} e^{-i\omega t} dt = \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt = \frac{i}{\omega} \left[e^{-i\omega t} \right]_{-a}^a = 2 \frac{\sin a\omega}{\omega}. \quad \square$$

EXEMPEL 7.2.2 Härnäst beräknar vi fouriertransformen till funktionen $e^{-|t|}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{-|t|}](\omega) &= \int_{\mathbf{R}} e^{-|t|} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{t(1-i\omega)} dt + \int_0^{\infty} e^{-t(1+i\omega)} dt \\ &= \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}. \end{aligned} \quad \square$$

EXEMPEL 7.2.3 Analogt får man att funktionen

$$e^{-|t|} \operatorname{sgn} t = \begin{cases} e^{-t}, & \text{om } t > 0 \\ 0, & \text{om } t = 0 \\ -e^t, & \text{om } t < 0 \end{cases}$$

har fouriertransformen

$$\mathcal{F}[e^{-|t|} \operatorname{sgn} t](\omega) = -\frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} = -\frac{2i\omega}{1+\omega^2}. \quad \square$$

För fouriertransformen gäller följande räkneregler.

Sats 7.2.1 Låt $f, g \in L^1(\mathbf{R})$. Då är

- (a) $\widehat{(f+g)}(\omega) = \hat{f}(\omega) + \hat{g}(\omega)$
- (b) $\widehat{(\alpha f)}(\omega) = \alpha \hat{f}(\omega) \quad (\alpha \in \mathbf{C})$
- (c) $\widehat{\bar{f}}(\omega) = \overline{\hat{f}(-\omega)}$
- (d) $\widehat{(e^{i\xi t} f)}(\omega) = \hat{f}(\omega - \xi) = R_\xi \hat{f}(\omega) \quad (\xi \in \mathbf{R})$
- (e) $\widehat{R_s f}(\omega) = \hat{f}(\omega) e^{-is\omega} \quad (s \in \mathbf{R})$
- (f) $\widehat{f(\lambda t)}(\omega) = \frac{1}{|\lambda|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{\lambda}\right) \quad (\lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq 0)$
- (g) $\widehat{(f * g)}(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$

Bevis. (a), (b), (c) och (d) är uppenbara, medan (e) och (f) följer efter variabelbyten. Beviset för (g) går till på följande sätt:

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}(\omega) &= \int_{\mathbf{R}} (f * g)(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} f(t-u) g(u) e^{-i\omega t} du dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} f(t-u) g(u) e^{-i\omega(t-u)} e^{-i\omega u} dt du \\ &= \int_{\mathbf{R}} \left(g(u) e^{-i\omega u} \int_{\mathbf{R}} f(t-u) e^{-i\omega(t-u)} dt \right) du \\ &= \int_{\mathbf{R}} \left(g(u) e^{-i\omega u} \int_{\mathbf{R}} f(s) e^{-i\omega s} ds \right) du = \hat{g}(\omega) \hat{f}(\omega). \end{aligned}$$

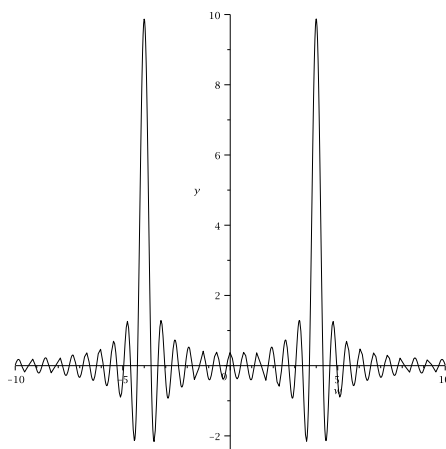
Omkastningen av integrationsordning är tillåten på grund av att absolutbeloppen av integranderna har ändliga integraler. \square

EXEMPEL 7.2.4 Sätt

$$f(t) = \begin{cases} \cos bt, & \text{om } |t| \leq a \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Eftersom $f(t) = \cos bt \cdot \chi_{[-a,a]} = \frac{1}{2}(e^{ibt} + e^{-ibt}) \chi_{[-a,a]}$, får vi fouriertransformen genom att kombinera resultatet i exempel 7.2.1 med (d) i sats 7.2.1:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\sin a(\omega - b)}{\omega - b} + 2 \frac{\sin a(\omega + b)}{\omega + b} \right) = \frac{\sin a(\omega - b)}{\omega - b} + \frac{\sin a(\omega + b)}{\omega + b}. \quad \square$$



Figur 7.1. Fouriertransformen till funktionen $f(t) = \cos 4t \cdot \chi_{[-10,10]}$.

Sats 7.2.2 Låt $f \in L^1(\mathbf{R})$. Då gäller:

(a) Fouriertransformen \hat{f} är begränsad på \mathbf{R} . Mera precist gäller att

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \|f\|_1.$$

(b) Fouriertransformen \hat{f} är likformigt kontinuerlig på \mathbf{R} .

(c) $\hat{f}(\omega) \rightarrow 0$ då $\omega \rightarrow \pm\infty$.

Bevis. (a) följer med en gång om man använder triangelolikheten för integraler, och (c) är ett specialfall av Riemann-Lebesgues lemma.

För att bevisa att fouriertransformen är kontinuerlig använder man Lebesgues sats om dominerad konvergens. Etersom $|f(t)e^{-i\omega t}| \leq |f(t)|$ för alla t och alla ω , och eftersom $|f(t)|$ tillhör $L^1(\mathbf{R})$, får man

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \hat{f}(\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{\mathbf{R}} \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\omega_0 t} dt = \hat{f}(\omega_0), \end{aligned}$$

dvs. funktionen \hat{f} är kontinuerlig överallt på \mathbf{R} . En kontinuerlig funktion, som har ändliga gränsvärden då $\omega \rightarrow \pm\infty$, är automatiskt likformigt kontinuerlig. \square

Sats 7.2.3 Om funktionerna $f(t)$ och $tf(t)$ båda tillhör rummet $L^1(\mathbf{R})$, så är \hat{f} deriverbar med derivata

$$\hat{f}'(\omega) = -i \widehat{tf(t)}(\omega).$$

Bevis. Formellt erhåller man derivatan genom att derivera

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

under integraltecknet. Detta resulterar nämligen i

$$\hat{f}'(\omega) = -i \int_{\mathbf{R}} t f(t) e^{-i\omega t} dt = -i \widehat{(tf(t))}(\omega).$$

Naturligtvis krävs det någon form av motivering för ovanstående operation. Betrakta därför differenskvoten

$$\begin{aligned} \frac{\hat{f}(\omega + h) - \hat{f}(\omega)}{h} &= \int_{\mathbf{R}} f(t) \frac{e^{-i(\omega+h)t} - e^{-i\omega t}}{h} dt \\ (7.2.1) \qquad &= \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\omega t} \frac{e^{-iht} - 1}{h} dt. \end{aligned}$$

Eftersom

$$\left| \frac{e^{-iht} - 1}{h} \right| = \left| -i \int_0^t e^{-ihu} du \right| \leq \int_0^{|t|} |e^{-ihu}| du = \int_0^{|t|} 1 du = |t|,$$

är beloppet av integranden i (7.2.1) begränsat av $L^1(\mathbf{R})$ -funktionen $|tf(t)|$. Vidare går integranden mot $-itf(t)e^{-i\omega t}$ då $h \rightarrow 0$. Det följer därför av Lebesgues sats om dominerad konvergens att differenskvoten går mot

$$-i \int_{\mathbf{R}} t f(t) e^{-i\omega t} dt = -i \widehat{(tf(t))}(\omega)$$

då $h \rightarrow 0$, och detta bevisar vårt påstående. \square

Sats 7.2.4 Antag att f är deriverbar och att både f och f' tillhör $L^1(\mathbf{R})$. Då är

$$\widehat{f'}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega).$$

Bevis. Eftersom $\int_{\mathbf{R}} |f(t)| dt$ är ändlig, finns det en följd $(t_n)_1^\infty$ med egenskapen att $t_n \rightarrow \infty$ och $f(t_n) \rightarrow 0$, då $n \rightarrow \infty$. (Annars skulle det finnas ett tal $\epsilon > 0$ och ett tal T så att $|f(t)| \geq \epsilon$ för alla $t \geq T$, något som uppenbarligen är orimligt när f tillhör L^1 .) Analogt finns det en följd $(u_n)_1^\infty$ så att $u_n \rightarrow -\infty$ och $f(u_n) \rightarrow 0$.

Partiell integration ger nu

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{u_n}^{t_n} f'(t) e^{-i\omega t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left[f(t) e^{-i\omega t} \right]_{u_n}^{t_n} + i\omega \int_{u_n}^{t_n} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) \\ &= i\omega \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega \hat{f}(\omega). \end{aligned} \quad \square$$

EXEMPEL 7.2.5 Genom att utnyttja de två föregående satserna kan vi beräkna fouriertransformen till funktionen $f(t) = e^{-t^2/2}$. Eftersom $f'(t) = -tf(t)$, är

$$i\omega \hat{f}(\omega) = \widehat{f'}(\omega) = \widehat{(-tf(t))}(\omega) = -i\hat{f}'(\omega),$$

dvs. $\hat{f}'(\omega) + \omega \hat{f}(\omega) = 0$. Den allmänna lösningen till denna differentialekvation är $\hat{f}(\omega) = Ce^{-\omega^2/2}$. Konstanten C bestäms av villkoret

$$C = \hat{f}(0) = \int_{\mathbf{R}} e^{-t^2/2} dt.$$

För att beräkna C skriver vi C^2 som en dubbelintegral över \mathbf{R}^2 och inför polära koordinater:

$$\begin{aligned} C^2 &= \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2/2} dx \int_{\mathbf{R}} e^{-y^2/2} dy = \int \int_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r e^{-r^2/2} dr d\theta = 2\pi \left[-e^{-r^2/2} \right]_0^\infty = 2\pi. \end{aligned}$$

Följaktligen är $C = \sqrt{2\pi}$, och vi har alltså

$$\mathcal{F}[e^{-\frac{1}{2}t^2}](\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\omega^2}.$$

□

7.3 Inversionsformler

Antag att $f \in L^1(\mathbf{R})$. Är funktionen entydigt bestämd av sin fouriertransform \hat{f} , och kan man återvinna f om man känner transformen? Detta är ju möjligt i det periodiska fallet, då en funktion är entydigt bestämd av sina fourierkoefficienter. Genom att låta periodlängden gå mot oändligheten gjorde vi i inledningen till det här kapitlet en informell härledning av följande inversionsformel:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Fouriertransformen \hat{f} tillhör dock inte nödvändigtvis $L^1(\mathbf{R})$ (se exempel 7.2.1), så integralen ovan måste ges en lämplig tolkning, liksom innebörden av likhetstecknet. I det här avsnittet ska vi reda ut dessa problem.

Vi bevisade våra konvergenssats för fourierserier med hjälp av allmänna resultat för summationskärnor på \mathbf{T} . Analogt kommer våra inversionsformler för fouriertransformen att bygga på resultat för summationskärnor på \mathbf{R} , som definieras på följande sätt.

Definition En *positiv summationskärna* på \mathbf{R} är en familj $(K_a)_{a>0}$ bestående av kontinuerliga funktioner på \mathbf{R} som uppfyller följande villkor:

- (i) $\int_{\mathbf{R}} K_a(t) dt = 1$ för alla $a > 0$;
- (ii) $K_a(t) \geq 0$ för alla $t \in \mathbf{R}$ och alla $a > 0$;
- (iii) För alla $\delta > 0$ gäller $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{|t| \geq \delta} K_a(t) dt = 0$.

Sats 7.3.1 Antag att $f \in L^1(\mathbf{R})$ och låt (K_a) vara en positiv summationskärna.

(a) Då gäller att

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \|f * K_a - f\|_1 = 0.$$

(b) Antag dessutom att

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_{|t| \geq \delta} K_a(t) = 0$$

för alla $\delta > 0$ och att funktionen f är kontinuerlig i punkten t . Då är

$$\lim_{a \rightarrow \infty} K_a * f(t) = f(t).$$

Bevis. Man behöver endast göra smärre justeringar i beviset för sats 4.5.1 för att det ska fungera i den nya situationen. \square

I fallet med fourierserier införde vi de symmetriska delsummorna $s_n(f; t)$ och deras Cesàromedelvärden $\sigma_n(f; t)$. Vi visade sedan att $\sigma_n(f; t)$ konvergerar mot $f(t)$ genom att skriva $\sigma_n(f; t)$ som en faltning mellan f och en positiv summationskärna. Vi kommer att använda precis samma teknik för fouriertransformen. Definiera

$$S_a(f; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{och} \\ T_a(f; t) = \frac{1}{a} \int_0^a S_x(f; t) dx.$$

Till att börja med ska vi skriva dessa två objekt som faltningar med lämpliga kärnor. Analogin med det periodiska fallet torde vara uppenbar.

Sats 7.3.2 Sätt för $a > 0$

$$D_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a e^{i\omega t} d\omega \quad \text{och} \quad F_a(t) = \frac{1}{a} \int_0^a D_x(t) dx.$$

Då är

$$S_a(f; t) = (f * D_a)(t) \quad \text{och} \quad T_a(f; t) = (f * F_a)(t).$$

$D_a(t)$ och $F_a(t)$ kallas *Dirichletkärnan* resp. *Fejérkärnan* på \mathbf{R} .

Bevis. Följande beräkning visar det påstådda resultatet för $S_a(f; t)$:

$$\begin{aligned} S_a(f; t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \left(\int_{\mathbf{R}} f(u) e^{-i\omega u} du \right) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{\mathbf{R}} f(u) e^{i\omega(t-u)} du d\omega = \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a f(u) e^{i\omega(t-u)} d\omega du \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(u) \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a e^{i\omega(t-u)} d\omega du = \int_{\mathbf{R}} f(u) D_a(t-u) du \\ &= (f * D_a)(t). \end{aligned}$$

Det sökta resultatet för $T_a(f; t)$ får vi nu genom att integrera ekvationen för $S_a(f; t)$:

$$\begin{aligned} T_a(f; t) &= \frac{1}{a} \int_0^a S_x(f; t) dx = \frac{1}{a} \int_0^a (f * D_x)(t) dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a \int_{\mathbf{R}} f(u) D_x(t-u) du dx = \int_{\mathbf{R}} f(u) \frac{1}{a} \int_0^a D_x(t-u) dx du \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(u) F_a(t-u) du = (f * F_a)(t). \end{aligned}$$

□

Anmärkning. Enda skälet för att införa faktorn $1/(2\pi)$ i definitionerna av $S_a(f; t)$ och $D_a(t)$ är att vi önskar ha $\int_{\mathbf{R}} F_a(t) dt = \int_{\mathbf{R}} D_a(t) dt = 1$. Att dessa integraler är lika med 1 beror i sin tur på följande lemma.

Lemma 7.3.3 $\int_{\mathbf{R}} \frac{\sin u}{u} du = \pi$.

Bevis. Lemmat bevisas vanligtvis med hjälp av residykalkyl, som är en teknik som lärs ut i kurser i komplex analys. Efter det att vi bevisat inversionssatsen ska vi ge ett alternativt bevis för lemmat. □

Låt oss nu studera de två nya kärnornas egenskaper. Dirichletkärnan är inte en positiv summationskärna, men den har följande viktiga egenskaper.

Sats 7.3.4 *Dirichletkärnan på \mathbf{R} har följande egenskaper:*

- (i) $D_a(t) = \frac{\sin at}{\pi t}$
- (ii) Funktionerna $D_a(t)$ är jämna.
- (iii) $\int_{\mathbf{R}} D_a(t) dt = 1$ för alla $a > 0$.
- (iv) $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\infty} D_a(t) dt = 0$ om $\delta > 0$.

Bevis. Vi har $D_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\chi_{[-a,a]})(-t) = \frac{\sin at}{\pi t}$, där den sista likheten gäller på grund av exempel 7.2.1.

Vi ser med en gång att D_a är jämn. För att beräkna integralen av kärnan gör vi först variabelbytet $u = at$ och använder sedan lemma 7.3.3:

$$\int_{\mathbf{R}} D_a(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{\sin at}{t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{\sin u}{u} du = 1.$$

Samma variabelbyte ger också

$$\int_{\delta}^{\infty} D_a(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} \frac{\sin at}{t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{a\delta}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du,$$

och den sista integralen går mot 0 då $a \rightarrow \infty$, beroende på att integralen $\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$ är konvergent. \square

Liksom i det periodiska fallet är Fejérkärnan på \mathbf{R} mer välartad än Dirichletkärnan, ty den är en positiv summationskärna.

Sats 7.3.5 *Fejérkärnan ges explicit av formeln*

$$F_a(t) = \frac{1 - \cos at}{a\pi t^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}at}{a\pi t^2}.$$

Den är en positiv summationskärna på \mathbf{R} med egenskapen

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_{|t| \geq \delta} F_a(t) = 0.$$

Vidare är

$$(f * F_a)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \left(1 - \frac{|\omega|}{a}\right) \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

om $f \in L^1(\mathbf{R})$.

Bevis. Per definition är

$$\begin{aligned} F_a(t) &= \frac{1}{a} \int_0^a D_x(t) dx = \frac{1}{a} \int_0^a \frac{\sin xt}{\pi t} dx = \frac{1}{a} \left[-\frac{\cos xt}{\pi t^2} \right]_0^a \\ &= \frac{1 - \cos at}{a\pi t^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}at}{a\pi t^2}. \end{aligned}$$

Formeln ovan visar att kärnan är positiv och att $F_a(t) = aF_1(at)$. Det följer att

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} F_a(t) dt &= \int_{\mathbf{R}} aF_1(at) dt = \int_{\mathbf{R}} F_1(u) du = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{1 - \cos u}{u^2} du \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{u}(1 - \cos u) \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{u} \sin u du = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{\sin u}{u} du = 1. \end{aligned}$$

Vidare är

$$\int_{|t| \geq \delta} F_a(t) dt = \int_{|t| \geq \delta} a F_1(at) dt = \int_{|u| \geq \delta a} F_1(u) du,$$

och högerledet går mot 0 då $a \rightarrow \infty$, eftersom integralen $\int_{\mathbf{R}} F_1(u) du$ är ändlig. Detta innebär att $(F_a)_{a>0}$ är en positiv summationskärna på \mathbf{R} . Olikheten $F_a(t) \leq 2/(a\pi t^2)$ medför förstås direkt att $\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_{|t| \geq \delta} F_a(t) = 0$.

Vi kan nu beräkna $f * F_a$ med hjälp av sats 7.3.2 på följande vis:

$$\begin{aligned} (f * F_a)(t) &= \frac{1}{a} \int_0^a S_x(f; t) dx = \frac{1}{a} \int_0^a \frac{1}{2\pi} \int_{-x}^x \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega dx \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_{-a}^a \int_{|\omega|}^a \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} dx d\omega = \frac{1}{2\pi a} \int_{-a}^a (a - |\omega|) \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \left(1 - \frac{|\omega|}{a}\right) \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

□

Genom att speciellt tillämpa sats 7.3.1 på Fejérkärnan och utnyttja sats 7.3.5 erhåller vi nästa resultat.

Sats 7.3.6 (Inversionssatsen) *Antag att $f \in L^1(\mathbf{R})$.*

(a) *Integralen*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \left(1 - \frac{|\omega|}{a}\right) \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

konvergerar då $a \rightarrow \infty$ i $L^1(\mathbf{R})$ -norm mot funktionen f .

(b) *I varje punkt t , där funktionen f är kontinuerlig, är*

$$f(t) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \left(1 - \frac{|\omega|}{a}\right) \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Korollarium 7.3.7 *Antag $f \in L^1(\mathbf{R})$. Om $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$ och funktionen f är kontinuerlig i punkten t , så är*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Bevis. Resultatet i exempel 2.4.11 ger

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \left(1 - \frac{|\omega|}{a}\right) \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

□

Om vi byter t mot $-t$ i korollariet och definierar funktionen \check{f} genom att sätta $\check{f}(t) = f(-t)$, så får korollariet följande eleganta formulering:

Korollarium 7.3.8 *Antag att $f \in L^1(\mathbf{R})$ är kontinuerlig överallt och att $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$; då är*

$$\hat{\hat{f}} = 2\pi \check{f},$$

där $\check{f}(t) = f(-t)$.

Vi kan nu ge det utlovade beviset för lemma 7.3.3. Sätt

$$c = \int_{\mathbf{R}} \frac{\sin u}{u} du.$$

Det är lätt att se att $c > 0$. Konstanten c förekommer implicit i bevisen ovan för att Dirichlet- och Fejérkärnorna har integral 1. Alla våra resultat om dessa kärnor förblir därför sanna om faktorn $1/(2\pi)$ överallt ersätts med faktorn $1/(2c)$. (Läs t. ex. om beviset för sats 7.3.4.) Speciellt blir slutsatsen i korollarium 7.3.8 ovan att

$$\hat{\hat{f}}(t) = 2cf(-t).$$

Betrakta nu den jämna funktionen $f(t) = e^{-t^2/2}$. Den uppfyller förutsättningarna i korollarium 7.3.8, och vi har tidigare beräknat fouriertransformen och funnit att $\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2} = \sqrt{2\pi} f(\omega)$, dvs. $\hat{f} = \sqrt{2\pi} f$. Det följer att $\hat{\hat{f}}(t) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(t) = 2\pi f(t) = 2\pi f(-t)$. Genom att jämföra med det allmänna resultatet ovan drar vi slutsatsen att $2c = 2\pi$, dvs. $c = \pi$. \square

EXEMPEL 7.3.1 I exempel 7.2.2 fann vi att $\mathcal{F}[e^{-|t|}](\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}$. Korollarium 2 ger nu att $\mathcal{F}\left[\frac{2}{1 + \omega^2}\right](t) = 2\pi e^{-|t|}$. Efter variabelbyte (och förenkling) får vi

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1 + t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|}.$$

\square

Följande sats är också en omedelbar följd av inversionssatsen.

Sats 7.3.9 (Entydighetssatsen) *Låt $f \in L^1(\mathbf{R})$, och antag att $\hat{f}(\omega) = 0$ för alla $\omega \in \mathbf{R}$. Då är funktionen f , betraktad som en $L^1(\mathbf{R})$ -funktion, lika med nollfunktionen, dvs. $f(t) = 0$ för alla t utanför en nollmängd.*

Vi skriver slutligen ned motsvarigheten till sats 4.7.1 för punktvis konvergens.

Sats 7.3.10 (Punktvis konvergens) *Antag att $f \in L^1(\mathbf{R})$, och låt $t \in \mathbf{R}$ vara en punkt där de två ensidiga gränsvärdena $f(t-)$ och $f(t+)$ och de två generaliserade ensidiga derivatorna $f'_-(t)$ och $f'_+(t)$ existerar. Då är*

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Bevis. Beviset för motsvarande sats för fourierserier går igenom nästan ordagrant. \square

EXEMPEL 7.3.2 I exempel 7.2.3 fann vi att $\mathcal{F}[e^{-|t|} \operatorname{sgn} t](\omega) = -\frac{2i\omega}{1 + \omega^2}$. Förutsättningarna i sats 7.3.10 är uppfyllda i alla punkter t , varför

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a -\frac{2i\omega}{1 + \omega^2} e^{i\omega t} d\omega = e^{-|t|} \operatorname{sgn} t.$$

Genom att först ersätta t med $-t$, sedan låta variablerna t och ω byta roller, och slutligen flytta konstanten 2π från vänsterledet till högerledet, erhåller man resultatet

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{t}{1 + t^2} e^{-i\omega t} d\omega = -\pi i e^{-|\omega|} \operatorname{sgn} \omega.$$

\square

7.4 L^2 -teori

Rummet $L^2(\mathbf{R})$ består av alla (Lebesgue-mätbara) funktioner $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ som uppfyller

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Det är ett inre produktrum med $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{g(t)} dt$ som inre produkt.

Om intervallet I är begränsat, så är såväl rummet $L^2(I)$ som rummet av alla begränsade (Lebesgue-mätbara) funktioner på I delrum till rummet $L^1(I)$. Rummet $L^1(\mathbf{T})$ innehåller därför ”många” funktioner.

För obegränsade intervall är situationen helt annorlunda. Rummet $L^1(\mathbf{R})$ är ett ganska litet rum, som inte innehåller $L^2(\mathbf{R})$ som delrum, eftersom t. ex. funktionen $1/(1 + |t|)$ tillhör det senare men inte det förra rummet.

Vi kan därför inte beräkna fouriertransformen \hat{f} av en godtycklig $L^2(\mathbf{R})$ -funktion f med hänvisning till definitionen i avsnitt 4.1, ty integralen som definierar transformen behöver inte existera. Det är emellertid möjligt att utvidga fouriertransformens definition på ett entydigt sätt till hela $L^2(\mathbf{R})$.

Denna utvidgning av fouriertransformen är viktig, ty integraler av typen $\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt$ kan ofta tolkas som ett slags energiuttryck; att säga att f tillhör $L^2(\mathbf{R})$ betyder i så fall att energin är ändlig, vilket är ett i högsta grad relevant fysikaliskt villkor. Låt t. ex. $f(t)$ beteckna strömstyrkan vid tiden t i en elektrisk krets med resistansen R ; effekten vid tiden t är då lika med $Rf(t)^2$, och kretsens totala elektriska energi ges av integralen $R \cdot \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt$ ($= R\|f\|_2^2$).

Vi ska nu skissera hur det går till att utvidga fouriertransformen till rummet $L^2(\mathbf{R})$. Det hela hänger på att snittet $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ är tätt i $L^2(\mathbf{R})$, dvs. varje funktion $f \in L^2(\mathbf{R})$ kan approximeras med funktioner f_n , som ligger i snittet $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ och så att $\|f - f_n\|_2 \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$. Funktionerna f_n har fouriertransformer, varför man kan definiera transformen av f som gränsvärdet av transformerna \hat{f}_n . Vi måste naturligtvis visa att gränsvärdet existerar i någon rimlig mening. En viktig ingrediens i beviset för detta är följande specialfall av Parsevals formel.

Lemma 7.4.1 *Antag att $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$. Då tillhör fouriertransformen \hat{f} rummet $L^2(\mathbf{R})$ och*

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2^2.$$

Bevis. Sätt

$$g = f * \tilde{f},$$

där $\tilde{f}(t) = \overline{f(-t)}$. Funktionen g kan skrivas som en inre produkt, nämligen

$$g(t) = \int_{\mathbf{R}} f(u) \overline{f(u-t)} du = \langle f, R_t f \rangle,$$

och speciellt är alltså $g(0) = \langle f, R_0 f \rangle = \langle f, f \rangle = \|f\|_2^2$.

Cauchy-Schwarz olikhet ger

$$|g(t) - g(t_0)| = |\langle f, R_t f - R_{t_0} f \rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|R_t f - R_{t_0} f\|_2,$$

och eftersom

$$\|R_t f - R_{t_0} f\|_2 = \|R_{t-t_0} f - f\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{då } t \rightarrow t_0,$$

(jmf sats 4.3.1) följer det av olikheten ovan att $g(t) \rightarrow g(t_0)$ då $t \rightarrow t_0$. Funktionen g är med andra ord kontinuerlig i alla punkter.

Eftersom g är en faltning av två L^1 -funktioner ligger g också i L^1 , och dess fouriertransform är

$$\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{\tilde{f}}(\omega) = \hat{f}(\omega) \overline{\hat{f}(\omega)} = |\hat{f}(\omega)|^2.$$

Enligt inversionssatsen (sats 7.3.6 (b)), tillämpad på funktionen g i punkten 0, är därför

$$(7.4.1) \quad \|f\|_2^2 = g(0) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \left(1 - \frac{|\omega|}{a}\right) |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Antag nu att \hat{f} inte ligger i $L^2(\mathbf{R})$. I så fall är $\int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = +\infty$, och detta innebär att för varje tal N är $\int_{-a/2}^{a/2} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega > N$ för alla tillräckligt stora tal a . Men för dessa a är också

$$\int_{-a}^a \left(1 - \frac{|\omega|}{a}\right) |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \geq \int_{-a/2}^{a/2} \left(1 - \frac{|\omega|}{a}\right) |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \geq \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{2} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \geq \frac{N}{2},$$

vilket betyder att gränsvärdet i (7.4.1) är $+\infty$ och inte ändligt. Detta är en motsägelse och bevisar lemmats påstående att $\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$.

Eftersom således $|\hat{f}|^2$ ligger i $L^1(\mathbf{R})$, kan vi tillämpa Lebesgues sats om dominerad konvergens på gränsvärdet (7.4.1) och får då

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2^2. \quad \square$$

Antag nu att f är en godtycklig $L^2(\mathbf{R})$ -funktion, och definiera för varje positivt heltal n funktionen f_n genom att sätta

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & \text{om } |t| \leq n \\ 0, & \text{om } |t| \geq n. \end{cases}$$

Då gäller

$$\|f_n - f\|_2 = \left(\int_{|t| \geq n} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad \text{då } n \rightarrow \infty.$$

Givet $\epsilon > 0$ finns det därför ett N så att $m, n \geq N$ medför att $\|f_m - f_n\|_2 < \epsilon$. Detta uttrycker man vanligen genom att säga att funktionsföljden $(f_n)_1^\infty$ är en *Cauchyföljd* i $L^2(\mathbf{R})$.

Funktionerna f_n ligger i snittet $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, och det följer därför av lemma 7.4.1 att $\|\widehat{f_m} - \widehat{f_n}\|_2^2 = \|\widehat{f_m - f_n}\|_2^2 = 2\pi \|f_m - f_n\|_2^2$. Härav drar vi slutsatsen att $m, n \geq N$ medför att

$$\|\widehat{f_m} - \widehat{f_n}\|_2 < \sqrt{2\pi} \epsilon,$$

dvs. funktionsföljden $(\hat{f}_n)_1^\infty$ är också en Cauchyföljd i $L^2(\mathbf{R})$. Rummet $L^2(\mathbf{R})$ har en mycket trevlig egenskap, vars bevis ligger utanför den här kursens ram, nämligen att varje Cauchyföljd konvergerar mot en unik gränsfunktion i $L^2(\mathbf{R})$. Det finns därför en funktion, som vi betecknar \hat{f} , med egenskapen att $\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_2 \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$. Det är denna funktion som kallas fouriertransformen till $L^2(\mathbf{R})$ -funktionen f .

Sammanfattningsvis har vi alltså kommit fram till följande definition.

Definition *Fouriertransformen* \hat{f} till en funktion $f \in L^2(\mathbf{R})$ definieras som

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(t) e^{-i\omega t} dt,$$

där gränsvärdet ska tolkas som ett gränsvärde i L^2 -mening.

Anmärkning. För funktioner f i snittet $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ har vi nu två definitioner av fouriertransformen \hat{f} , den ursprungliga i avsnitt 7.2 och ovanstående. Lyckligtvis ger de båda definitionerna samma resultat. (Med beteckningarna ovan gäller nämligen att $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$, så det följer av sats 7.2.2 (a) att funktionerna \hat{f}_n konvergerar likformigt på \mathbf{R} mot den ursprungliga fouriertransformen \hat{f} . Detta har till följd att \hat{f} också är lika med L^2 -gränsvärdet till följderna $(\hat{f}_n)_1^\infty$.)

EXEMPEL 7.4.1 Enligt exempel 7.3.2 är

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{t}{1+t^2} e^{-i\omega t} d\omega = -i\pi e^{-|\omega|} \operatorname{sgn} \omega.$$

Detta medför att

$$\mathcal{F}\left[\frac{t}{1+t^2}\right](\omega) = -i\pi e^{-|\omega|} \operatorname{sgn} \omega.$$

Observera att $L^2(\mathbf{R})$ -funktionen $t/(1+t^2)$ inte tillhör $L^1(\mathbf{R})$.

Identiteten i Lemma 7.4.1 kan nu utvigas till att gälla för hela $L^2(\mathbf{R})$.

Sats 7.4.2 (Parsevals formler) Om $f, g \in L^2(\mathbf{R})$, så är

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ \text{(ii)} \quad & \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega. \end{aligned}$$

Bevis. Med beteckningarna ovan gäller att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{f}_n - \hat{f}\|_2 = 0.$$

Härav följer med hjälp av triangelolikheten

$$\|f\|_2 - \|f - f_n\|_2 \leq \|f_n\|_2 \leq \|f_n - f\|_2 + \|f\|_2$$

att $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2$, och på motsvarande sätt att $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{f}_n\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. Men lemma 7.4.1 medför att $\|\hat{f}_n\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f_n\|_2$, så det följer att

$$\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2,$$

vilket är ekvivalent med likheten (i).

Den polariserade versionen (ii) följer av sats 5.1.5 tillämpad på den linjära avbildningen $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$. \square

Som korollarium till Parsevals formler visar vi hur man kan fouriertransformera en produkt av två L^2 -funktioner; resultatet är dualt till sats 7.2.1 (g).

Sats 7.4.3 *Antag att $f, g \in L^2(\mathbf{R})$. Då ligger produkten fg i $L^1(\mathbf{R})$ och*

$$\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}.$$

Bevis. På grund av Cauchy-Schwarz olikhet är

$$\|fg\|_1 = \langle |f|, |g| \rangle \leq \|f\|_2 \|g\|_2 < \infty,$$

dvs. produkten fg ligger i $L^1(\mathbf{R})$ och har därför en fouriertransform. För att beräkna denna noterar vi först att $\mathcal{F}[\overline{g(t)} e^{i\alpha t}](\omega) = \mathcal{F}[\bar{g}](\omega - \alpha) = \hat{g}(\alpha - \omega)$. Parsevals formel (ii) ger därför

$$\begin{aligned} \widehat{fg}(\alpha) &= \int_{\mathbf{R}} f(t)g(t) e^{-i\alpha t} dt = \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{\overline{g(t)} e^{i\alpha t}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \mathcal{F}[f(t)](\omega) \overline{\mathcal{F}[\overline{g(t)} e^{i\alpha t}](\omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\alpha - \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} (\hat{f} * \hat{g})(\alpha). \end{aligned}$$

\square

Vi ska nu visa att inversionssatsen gäller för L^2 -funktioner.

Sats 7.4.4 *Antag att $f \in L^2(\mathbf{R})$. Då är*

$$\hat{\hat{f}}(t) = 2\pi \check{f}(t) = 2\pi f(-t),$$

där likheten ska uppfattas som en likhet för L^2 -funktioner, dvs. likhet råder utom eventuellt på en nollmängd.

Bevis. Vi konstaterar först att inversionssatsen gäller om f är en kontinuerlig L^1 -funktion vars fouriertransform också tillhör L^1 enligt korollarium 7.3.8.

Ett tillräckligt villkor på f för att satsen ska gälla är därför att f är två gånger kontinuerligt deriverbar och $= 0$ utanför något begränsat intervall. Detta medför nämligen för det första att såväl f som f'' tillhör $L^1(\mathbf{R})$ (och $L^2(\mathbf{R})$). Eftersom $\widehat{f''}(\omega) = -\omega^2 \widehat{f}(\omega)$ och fouriertransformen $\widehat{f''}(\omega)$ är begränsad, är vidare $|\widehat{f}(\omega)| \leq C|\omega|^{-2}$ för stora $|\omega|$, så fouriertransformen \widehat{f} tillhör $L^1(\mathbf{R})$.

Låt nu f vara en godtycklig $L^2(\mathbf{R})$ -funktion. Då finns det en följd $(f_n)_1^\infty$ av funktioner som är två gånger kontinuerligt deriverbara och noll utanför begränsade intervall, och som approximerar f godtyckligt bra i L^2 -mening, dvs. så att $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$. (Jmf sats 2.2.1.) Av Parsevals formel följer nu först att $\|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_2 \rightarrow 0$ och sedan att $\|\widehat{\widehat{f_n}} - \widehat{\widehat{f}}\|_2 \rightarrow 0$. Men som vi konstaterat ovan är $\widehat{\widehat{f_n}}(t) = 2\pi f_n(-t)$. Funktionerna $2\pi f_n(-t)$ konvergerar därför både mot $2\pi f(-t)$ och mot $\widehat{\widehat{f}}(t)$, så de båda sistnämnda funktionerna måste vara identiska som L^2 -funktioner. \square

Parsevals formel innebär att fouriertransformering \mathcal{F} , dvs. avbildningen $f \rightarrow \widehat{f}$, är en linjär avbildning från rummet $L^2(\mathbf{R})$ till sig självt, och avbildningen är injektiv eftersom $\widehat{f} = 0$ uppenbarligen medför att $f = 0$. Inversionssatsen visar att avbildningen också är surjektiv, dvs. varje funktion $g \in L^2(\mathbf{R})$ är fouriertransform till en (unik) $L^2(\mathbf{R})$ -funktion f , nämligen funktionen $f = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[g]$.

Sammanfattningsvis gäller alltså

Sats 7.4.5 (Plancherels sats) *Fouriertransformering $\mathcal{F}: L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R})$ är en isomorfism (dvs. en bijektiv linjär avbildning).*

Övningsuppgifter till kapitel 7

7.1 Bestäm fouriertransformen till funktionen

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{om } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{om } |t| > 1. \end{cases}$$

7.2 Beräkna med fouriermetoder integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{b^2 + x^2} dx$$

för alla positiva värden på de reella konstanterna a och b .

- 7.3 Bestäm fouriertransformen till funktionen $f(t) = e^{-|t|} \cos t$ och beräkna med dess hjälp integralen

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 4} d\omega.$$

- 7.4 Beräkna, t. ex. genom att först bestämma derivatans transform, fouriertransformen till funktionen

$$f(t) = \arctan(t+1) - \arctan(t-1).$$

- 7.5 I sannolikheteorin studeras s. k. stokastiska variabler. En stokastisk variabel X är en variabel vars värde beror av slumpen. Variabeln har en täthetsfunktion f om sannolikheten att variabelns värde skall ligga i intervallet $[a, b]$ ges av integralen $\int_a^b f(x) dx$. Om X_1 och X_2 är två oberoende stokastiska variabler med täthetsfunktioner f_1 och f_2 , så har summan $X_1 + X_2$ täthetsfunktionen $f_1 * f_2$.

- a) En stokastisk variabel kallas normalfördelad med medelvärde μ och varians σ^2 , om täthetsfunktionen är

$$\varphi_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Bestäm fouriertransformen till $\varphi_{\mu, \sigma}$.

- b) Beräkna täthetsfunktionen till summan av två oberoende normalfördelade stokastiska variabler X_1 och X_2 med medelvärde och varians μ_1 och σ_1^2 resp. μ_2 och σ_2^2 , dvs beräkna faltningen

$$\varphi_{\mu_1, \sigma_1} * \varphi_{\mu_2, \sigma_2}.$$

(Formulera gärna resultatet i sannolikheteoretiska termer.)

- 7.6 Funktionen f är kontinuerligt deriverbar och $f(t) = 0$ för $|t| \geq 5$. Bevisa utan att använda Riemann-Lebesgues lemma att

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = 0.$$

- 7.7 a) Antag att $f \in L^1(\mathbf{R})$ och definiera en ny funktion \tilde{f} genom att sätta $\tilde{f}(t) = \overline{f(-t)}$. Härled sambandet mellan fouriertransformerna till de båda funktionerna \tilde{f} och f .
 b) Visa att fouriertransformen \hat{f} är reell om $f(t) = \overline{f(-t)}$ för alla $t \in \mathbf{R}$.

- c) Visa omvänt att om \hat{f} är reell och funktionen f är kontinuerlig, så är $f(t) = \overline{f(-t)}$ för alla $t \in \mathbf{R}$.

7.8 Funktionen f är kontinuerlig och tillhör $L^1(\mathbf{R})$. Vidare är

$$\int_{-1}^1 f(t-s) ds = f(t)$$

för alla $t \in \mathbf{R}$. Visa att $f(t) = 0$ för alla t .

7.9 Sätt $f(t) = e^{-t}H(t)$ och $g(t) = e^t(1 - H(t))$, där H är Heavisidefunktionen (dvs. $H(t) = 0$ om $t < 0$ och $H(t) = 1$ om $t > 0$). Bestäm faltningen $f * g$.

7.10 Antag att $f \in L^1(\mathbf{R})$ är kontinuerlig och att

$$f(t-1) + f(t) + f(t+1) = 0$$

för alla $t \in \mathbf{R}$. Visa, t. ex. genom att fouriertransformera, att $f(t) = 0$ för alla $t \in \mathbf{R}$.

7.11 Funktionen f definieras av att $f(t) = \begin{cases} 2 - |t|, & |t| < 2 \\ 0, & |t| \geq 2. \end{cases}$

- a) Beräkna fouriertransformen $\hat{f}(\omega)$.
b) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt$$

7.12 Definiera funktionen f genom att sätta

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{om } |t| < 1 \\ 0 & \text{om } |t| \geq 1. \end{cases}$$

- a) Bestäm fouriertransformen \hat{f} .
b) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t)^2}{t^6} dt.$$

7.13 a) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

- b) Bestäm fouriertransformen till funktionen g om

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{för } t \leq -1 \\ (t+1)e^{-t} & \text{för } -1 \leq t \leq 1 \\ 2e^{-t} & \text{för } t \geq 1 \end{cases}$$

- c) Bestäm fouriertransformen $\hat{f}(\omega)$ om funktionen f uppfyller likheten

$$ef(t+1) - e^{-1}f(t-1) = g(t),$$

där g är funktionen i (b).

- d) Beräkna L^2 -normen $\|f\|_2$ för funktionen f i (c).

7.14 Definiera en funktion f genom att sätta

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{för } |t| \leq 1 \\ 2 - |t| & \text{för } 1 < |t| \leq 2 \\ 0 & \text{för } |t| > 2. \end{cases}$$

- a) Bestäm fouriertransformen $\hat{f}(\omega)$.

- b) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos t - \cos 2t)^2}{t^4} dt.$$

- c) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t - \cos 2t}{t^2} e^{-|t|} dt.$$

- 7.15 a) Låt $f(t) = e^{-|t|}$. Bestäm faltningen $f * f(t)$.

- b) Bestäm en funktion $y = y(t)$ i $L^1(\mathbf{R})$ som löser differentialekvationen

$$y''(t) - y(t) = e^{-|t|}.$$

7.16 Bestäm en lösning till integralekvationen

$$f(x) = e^{-|x|} + \frac{1}{2} e^{-x} \int_{-\infty}^x e^y f(y) dy.$$

7.17 Funktionen f är kontinuerlig på \mathbf{R} och $|f(x)| \leq x^{-2}$ för $|x| \geq 1$. Sätt

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + 2k\pi).$$

- a) Visa att serien är konvergent för alla reella tal x och att summan g är en 2π -periodisk funktion.

- b) Antag att fouriertransformen \hat{f} har egenskapen att $\hat{f}(n) = 0$ för alla heltal n . Visa att detta medför att $g(x) = 0$ för alla x .

7.18 Sätt

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!(t^2 + n^2)}.$$

- a) Visa att serien är likformigt konvergent på \mathbf{R} och att funktionen f är kontinuerlig på \mathbf{R} .
- b) Beräkna fouriertransformen $\hat{f}(\omega)$.
- c) Beräkna $L^1(\mathbf{R})$ -normen $\|f\|_1$.

Kapitel 8

Laplacetransformen

8.1 Definition

Fouriertransformen har sina begränsningar, eftersom vi inte kan fouriertransformera funktioner som är stora i oändligheten. Exempelvis saknar sådana viktiga funktioner som polynom fouriertransform. För att råda bot på denna brist ska vi definiera en transform som fungerar för funktioner som inte växer snabbare än exponentiellt.

Låt f vara en funktion som till att börja med är definierad på halvaxeln $\mathbf{R}_+ = [0, \infty[$ och utvidga funktionen till hela \mathbf{R} genom att sätta $f(t) = 0$ för $t < 0$. Låt σ vara ett reellt tal och betrakta produkten $f(t) e^{-\sigma t}$; för $\sigma > 0$ går faktorn $e^{-\sigma t}$ mot 0 då $t \rightarrow +\infty$, så därför har produkten $f(t) e^{-\sigma t}$ större förutsättningar att tillhöra $L^1(\mathbf{R})$ än vad f har. Även om $f(t)$ är stor för stora t kan således funktionen $f(t) e^{-\sigma t}$ tillhöra $L^1(\mathbf{R})$, och vi kan då bilda fouriertransformen, som är

$$\mathcal{F}([f(t) e^{-\sigma t}](\tau) = \int_0^\infty f(t) e^{-\sigma t} e^{-i\tau t} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(\sigma + i\tau)t} dt.$$

Detta leder oss till att betrakta integraler av typen

$$\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt,$$

där s är ett komplext tal. Här och i fortsättningen kommer vi konsekvent att skriva komplexa tal på formen $s = \sigma + i\tau$, där alltså σ betecknar realdelen och τ imaginärdelen.

Låt oss först precisera klassen av funktioner för vilka ovanstående integral är väldefinierad.

Definition Med klassen \mathcal{E} menas mängden av alla komplexvärda (Lebesgue-mätbara) funktioner f på intervallet $\mathbf{R}_+ = [0, \infty[$ för vilka det finns ett reellt tal a så att $f(t)e^{-at} \in L^1(\mathbf{R}_+)$, dvs. så att $\int_0^\infty |f(t)|e^{-at} dt < \infty$.

EXEMPEL 8.1.1 Funktionen $f(t) = t$ tillhör \mathcal{E} eftersom $\int_0^\infty te^{-t} dt < \infty$. Däremot tillhör funktionen $g(t) = e^{t^2}$ inte klassen \mathcal{E} , ty $\int_0^\infty e^{t^2-at} dt = \infty$ för alla reella tal a . \square

Observera att om $f \in \mathcal{E}$, så tillhör f automatiskt $L^1(I)$ för varje begränsat intervall $I = [0, c]$. Per definition finns det nämligen ett tal a så att $\int_0^\infty |f(t)|e^{-at} dt < \infty$, och eftersom funktionen e^{-at} är nedåt begränsad på intervallet I av den positiva konstanten $m = \min(1, e^{-ac})$, får vi

$$m \int_I |f(t)| dt \leq \int_I |f(t)|e^{-at} dt \leq \int_0^\infty |f(t)|e^{-at} dt < \infty.$$

Lemma 8.1.1 Låt $f \in \mathcal{E}$. Mängden

$$E(f) = \{a \in \mathbf{R}: f(t)e^{-at} \in L^1(\mathbf{R}_+)\}$$

är ett intervall på formen $] \alpha, \infty[$, $[\alpha, \infty[$ eller $] -\infty, \infty[$. I de första två fallen sätter vi $\sigma_0(f) = \alpha$, och i det sistnämnda fallet sätter vi $\sigma_0(f) = -\infty$.

Talet (eller oändlighetssymbolen) $\sigma_0(f)$ kallas funktionens (absolut)konvergensabscissa.

Bevis. En icke-tom delmängd I av \mathbf{R} är ett intervall av den typ som beskrivs i lemmat om och endast om mängden har följande egenskap:

$$a \in I \ \& \ b > a \implies b \in I.$$

Mängden $E(f)$ i lemmat har denna egenskap, ty om $b > a$, så är $|f(t)|e^{-bt} \leq |f(t)|e^{-at}$ för alla t , och därför medför $a \in E(f)$ att $b \in E(f)$. \square

EXEMPEL 8.1.2 Läsaren kan lätt verifiera att $E(t) =]0, \infty[$, $E((1+t^2)^{-1}) = [0, \infty[$ och $E(e^{-t^2}) =]-\infty, \infty[$. Således är $\sigma_0(t) = \sigma_0((1+t^2)^{-1}) = 0$ och $\sigma_0(e^{-t^2}) = -\infty$. \square

Låt oss kalla en (Lebesgue-mätbar) funktion f , som är definierad på \mathbf{R}_+ , *exponentiellt växande* om det finns en reell konstant k och en positiv konstant M så att $|f(t)| \leq Me^{kt}$ för alla $t > 0$.

Om en funktion f är exponentiellt växande (med exponent k), så är uppenbarligen integralen $\int_0^\infty |f(t)|e^{-at} dt$ ändlig för alla $a > k$, dvs. f tillhör klassen \mathcal{E} och $\sigma_0(f) \leq k$.

Exponentialfunktioner e^{ct} och polynom är självklart exponentiellt växande funktioner.

Låt $f \in \mathcal{E}$ och låt $s = \sigma + i\tau$. Eftersom $|f(t)e^{-st}| = |f(t)|e^{-\sigma t}$, är integralen $\int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$ väldefinierad för alla komplexa tal s med realdel $\sigma > \sigma_0$. Vi kan därför göra följande definition.

Definition Låt $f \in \mathcal{E}$. För komplexa tal $s = \sigma + i\tau$ med $\sigma > \sigma_0(f)$ sätter vi

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$$

Funktionen \tilde{f} kallas *Laplacetransformen* till f . Ibland kommer vi att skriva $\mathcal{L}[f](s)$ istället för $\tilde{f}(s)$.

Vi noterar att definitionsområdet för Laplacetransformen $\tilde{f}(s)$ består av halvplanet $\operatorname{Re} s > \sigma_0(f)$, utom i fallet $\sigma_0(f) = -\infty$ då definitionsområdet är hela komplexa planet \mathbf{C} .

Laplacetransformen är primärt definierad för funktioner f med intervallet $[0, \infty[$ som definitionsområde. Ibland är det emellertid lämpligt att utvidga definitionsområdet för sådana funktioner f till hela \mathbf{R} genom att sätta $f(t) = 0$ för $t < 0$. Med denna konvention blir naturligtvis

$$(8.1.1) \quad \tilde{f}(s) = \int_{\mathbf{R}} f(t)e^{-st} dt.$$

Det är förstås viktigt att betona att för funktioner f , som redan har en definitionsområde som är större än \mathbf{R}_+ , är det nödvändigt att *omdefiniera* $f(t)$ så att $f(t) = 0$ för $-\infty < t < 0$ innan vi får använda tolkningen (8.1.1).

Den stora fördelen med att tillåta komplexa argument $s = \sigma + i\tau$ i definitionen av Laplacetransformen är att vi därigenom får ett enkelt samband mellan Laplace- och fouriertransformerna. Som vi noterade inledningsvis är

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_{\mathbf{R}} f(t)e^{-\sigma t}e^{-i\tau t} dt = \mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}](\tau).$$

Laplacetransformen till funktionen f i punkten $s = \sigma + i\tau$ är således lika med fouriertransformen till funktionen $f(t)e^{-\sigma t}$ i punkten τ . Man kan utnyttja detta för att översätta egenskaper hos fouriertransformen till egenskaper hos Laplacetransformen.

EXEMPEL 8.1.3 Låt oss beräkna Laplacetransformen till exponentialfunk-

tionen $f(t) = e^{ct}$, $t \geq 0$. Här är $c = a + bi$ ett godtyckligt komplext tal.

$$\begin{aligned}\tilde{f}(s) &= \int_0^\infty e^{ct} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-c)t} dt = \left[-\frac{e^{-(s-c)t}}{s-c} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{s-c} - \frac{1}{s-c} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s-c)t}.\end{aligned}$$

För $\sigma > a$ är $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s-c)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\sigma-a)t} e^{-i(\tau-b)t} = 0$. Det följer att

$$\mathcal{L}[e^{ct}](s) = \frac{1}{s-c} \quad \text{om } \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} c.$$

Genom att speciellt välja $c = 0$ respektive $c = 1$ får man

$$\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s} \quad \text{för } \operatorname{Re} s > 0 \quad \text{och} \quad \mathcal{L}[e^t](s) = \frac{1}{s-1} \quad \text{för } \operatorname{Re} s > 1.$$

Värdena $c = \pm i$ ger istället att $\mathcal{L}[e^{it}](s) = (s-i)^{-1}$ och $\mathcal{L}[e^{-it}](s) = (s+i)^{-1}$ för $\operatorname{Re} s > 0$, och eftersom $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ och $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$, följer det att

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos t](s) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i} \right) = \frac{s}{s^2+1} & \text{och} \\ \mathcal{L}[\sin t](s) &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i} \right) = \frac{1}{s^2+1} & \text{för } \operatorname{Re} s > 0. \quad \square\end{aligned}$$

EXEMPEL 8.1.4 För $\operatorname{Re} s > 0$ är

$$\mathcal{L}[t](s) = \int_0^\infty t e^{-st} dt = \left[-t \frac{e^{-st}}{s} \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s^2} \left[e^{-st} \right]_0^\infty = \frac{1}{s^2}.$$

Här har vi utnyttjat att $\lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-st} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$. □

Sats 8.1.2 Klassen \mathcal{E} är ett vektorrum som är slutet under multiplikation med polynom, dvs.

- (i) $f, g \in \mathcal{E} \Rightarrow f + g \in \mathcal{E}$
- (ii) $f \in \mathcal{E}, c \in \mathbf{C} \Rightarrow cf \in \mathcal{E}$
- (iii) $f \in \mathcal{E}, p \text{ polynom} \Rightarrow pf \in \mathcal{E}$

Vidare är

$$\begin{aligned}\sigma_0(f+g) &\leq \max(\sigma_0(f), \sigma_0(g)), \\ \sigma_0(cf) &= \sigma_0(f), \\ \sigma_0(pf) &= \sigma_0(f),\end{aligned}$$

om $c \neq 0$ och p inte är nollpolynomet.

Bevis. Om $a > m = \max(\sigma_0(f), \sigma_0(g))$ så är $\int_0^\infty |f(t)|e^{-at} dt < \infty$ och $\int_0^\infty |g(t)|e^{-at} dt < \infty$. Det följer att

$$\int_0^\infty |f(t) + g(t)|e^{-at} dt \leq \int_0^\infty |f(t)|e^{-at} dt + \int_0^\infty |g(t)|e^{-at} dt < \infty.$$

Detta visar att $f + g \in \mathcal{E}$ och att $\sigma_0(f + g) \leq a$. Eftersom den sistnämnda olikheten gäller för alla $a > m$, följer det att $\sigma_0(f + g) \leq m$.

(ii) är trivialt.

(iii) För konstanta polynom följer (iii) av (ii). Antag därför att $f \in \mathcal{E}$ och att $p(t)$ är ett godtyckligt icke-konstant polynom. Låt $a > \sigma_0(f)$ vara godtyckligt, och välj $\epsilon > 0$ så att $a - \epsilon > \sigma_0(f)$.

Eftersom funktionen $p(t)e^{-\epsilon t}$ är kontinuerlig på \mathbf{R}_+ och går mot 0 då $t \rightarrow \infty$, finns det en konstant M så att $p(t)e^{-\epsilon t} \leq M$ för alla $t \geq 0$. Detta innebär att $p(t) \leq Me^{\epsilon t}$, så det följer att

$$|p(t)f(t)|e^{-at} \leq M|f(t)|e^{\epsilon t}e^{-at} = M|f(t)|e^{-(a-\epsilon)t}$$

för $t \geq 0$. Genom att integrera denna olikhet får vi

$$\int_0^\infty |p(t)f(t)|e^{-at} dt \leq M \int_0^\infty |f(t)|e^{-(a-\epsilon)t} dt < \infty$$

där integralen i högerledet är ändlig beroende på att $a - \epsilon > \sigma_0(f)$. Detta visar att funktionen pf tillhör \mathcal{E} och att $\sigma_0(pf) \leq a$. Eftersom den sistnämnda olikheten gäller för alla $a > \sigma_0(f)$ är $\sigma_0(pf) \leq \sigma_0(f)$.

För att bevisa den omvända olikheten för konvergensabscissan startar vi med ett godtyckligt tal $a > \sigma_0(pf)$, och väljer talet $c > 0$ så stort att olikheten $|p(t)| \geq 1$ gäller för $t > c$. Då blir

$$\int_c^\infty |f(t)|e^{-at} dt \leq \int_c^\infty |p(t)||f(t)|e^{-at} dt \leq \int_0^\infty |p(t)f(t)|e^{-at} dt < \infty.$$

Integralen $\int_0^c |f(t)|e^{-at} dt$ är också ändlig, eftersom f tillhör $L^1([0, c])$ och faktorn e^{-at} är begränsad på intervallet. Det följer att $\int_0^\infty |f(t)|e^{-at} dt < \infty$, vilket innebär att $\sigma_0(f) \leq a$. Eftersom $a > \sigma_0(pf)$ är godtyckligt, följer det att $\sigma_0(f) \leq \sigma_0(pf)$. \square

Eftersom exponentialfunktionen e^{ct} tillhör klassen \mathcal{E} , följer det av satsen ovan att klassen \mathcal{E} innehåller alla funktioner som kan skrivas som summor och produkter av polynom, exponentialfunktioner och de trigonometriska funktionerna $\sin kt$ och $\cos kt$.

Faltning

Vi erinrar om att faltningen $f * g$ av två godtyckliga $L^1(\mathbf{R})$ -funktioner f och g definieras genom formeln $f * g(t) = \int_{\mathbf{R}} f(t-u)g(u) du$. Om funktionerna f och g båda är lika med noll på den negativa reella axeln, så är $f(t-u)g(u) = 0$ för $u < 0$ och för $u > t$. Därför är $f * g(t) = 0$ om $t < 0$, och $f * g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u) du$ om $t \geq 0$. Den sistnämnda formeln är meningsfull så snart som funktionerna f och g är definierade på \mathbf{R}_+ och tillhör $L^1(I)$ för varje begränsat delintervall I till \mathbf{R}_+ . Dessa observationer motiverar följande definition.

Definition *Faltningen* $f * g$ av två funktioner f och g , som är definierade på \mathbf{R}_+ och tillhör $L^1(I)$ för varje begränsat delintervall I av \mathbf{R}_+ , definieras av formeln

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u) du, \quad t \geq 0.$$

Läsaren kan lätt kontrollera att följande kommutativa, associativa och distributiva räkneregler gäller:

$$\begin{aligned} f * g &= g * f \\ f * (g * h) &= (f * g) * h \\ f * (g + h) &= f * g + f * h. \end{aligned}$$

EXEMPEL 8.1.5 Låt $f(t) = e^t$ och $g(t) = \cos t$. Då är

$$(f * g)(t) = \int_0^t e^{t-u} \cos u du = e^t \int_0^t e^{-u} \cos u du.$$

Integralen i högerledet kan beräknas med hjälp av två partiella integrationer eller enklare genom att ersätta $\cos u$ med $\frac{1}{2}(e^{iu} + e^{-iu})$. Slutresultatet blir (kontrollera gärna!):

$$\int_0^t e^{-u} \cos u du = \frac{1}{2}(1 + e^{-t}(\sin t - \cos t)),$$

dvs.

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2}(e^t + \sin t - \cos t).$$

□

Sats 8.1.3 *Faltningen* $f * g$ av två funktioner f och g i klassen \mathcal{E} tillhör själv klassen \mathcal{E} , och $\sigma_0(f * g) \leq \max(\sigma_0(f), \sigma_0(g))$.

Bevis. Vi behöver visa att funktionen $(f * g)(t) e^{-at}$ tillhör $L^1(\mathbf{R}_+)$ för varje tal $a > \max(\sigma_0(f), \sigma_0(g))$.

För $t \geq 0$ är

$$\begin{aligned}(f * g)(t) e^{-at} &= e^{-at} \int_0^t f(t-u)g(u) du = \int_0^t f(t-u) e^{-a(t-u)} g(u) e^{-au} du \\ &= (f e^{-a\cdot}) * (g e^{-a\cdot})(t).\end{aligned}$$

Utvidga nu definitionerna av f , g och $f * g$ till hela \mathbf{R} genom att sätta $f(t) = g(t) = (f * g)(t) = 0$ för $t < 0$. Då är $(f * g)(t) e^{-at} = (f e^{-a\cdot}) * (g e^{-a\cdot})(t)$ för alla $t \in \mathbf{R}$, där faltningen nu ska tolkas som en faltning av $L^1(\mathbf{R})$ -funktioner. För sådana funktioner F och G vet vi redan att $\|F * G\|_{L^1(\mathbf{R})} \leq \|F\|_{L^1(\mathbf{R})} \|G\|_{L^1(\mathbf{R})}$. Tillämpat på situationen ovan har vi därför

$$\begin{aligned}\|(f * g)(t) e^{-at}\|_{L^1(\mathbf{R}_+)} &= \|(f * g)(t) e^{-at}\|_{L^1(\mathbf{R})} \\ &= \|(f(t) e^{-at}) * (g(t) e^{-at})\|_{L^1(\mathbf{R})} \\ &\leq \|f(t) e^{-at}\|_{L^1(\mathbf{R})} \cdot \|g(t) e^{-at}\|_{L^1(\mathbf{R})} \\ &= \|f(t) e^{-at}\|_{L^1(\mathbf{R}_+)} \cdot \|g(t) e^{-at}\|_{L^1(\mathbf{R}_+)} < \infty.\end{aligned}$$

□

8.2 Räkneregler

Vi börjar med att lista några enkla men mycket användbara räkneregler:

Sats 8.2.1 Låt $f, g \in \mathcal{E}$, $c \in \mathbf{C}$ och $\lambda > 0$. Då gäller:

- (a) $\mathcal{L}[f + g](s) = \mathcal{L}[f](s) + \mathcal{L}[g](s), \quad \operatorname{Re} s > \max(\sigma_0(f), \sigma_0(g))$
- (b) $\mathcal{L}[cf](s) = c \mathcal{L}[f](s), \quad \operatorname{Re} s > \sigma_0(f)$
- (c) $\mathcal{L}[e^{ct} f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s - c), \quad \operatorname{Re} s > \sigma_0(f) + \operatorname{Re} c$
- (d) $\mathcal{L}[f(t - \lambda)](s) = e^{-\lambda s} \mathcal{L}[f](s), \quad \operatorname{Re} s > \sigma_0(f)$
- (e) $\mathcal{L}[f(\lambda t)](s) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{L}[f](s/\lambda), \quad \operatorname{Re} s > \lambda \sigma_0(f)$
- (f) $\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s), \quad \operatorname{Re} s > \max(\sigma_0(f), \sigma_0(g)).$

Anmärkning. I (d) är det viktigt att påminna om att $f(t) = 0$ för $t < 0$. Alltså är $f(t - \lambda) = f_\lambda(t) = 0$ för $t < \lambda$.

Bevis. Det är mycket lätt att visa reglerna genom att använda Laplace-transformens definition, men vi kan också utnyttja sambandet mellan Laplace-transformen och fouriertransformen och motsvarigheterna till ovanstående

regler för den sistnämnda transformen. Som exempel visar vi (c) genom att använda sats 7.2.1 (d). Med $c = a + bi$ blir

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{ct}f(t)](s) &= \mathcal{F}[e^{-\sigma t}e^{ct}f(t)](\tau) = \mathcal{F}[e^{-(\sigma-a)t}e^{ibt}f(t)](\tau) \\ &= \mathcal{F}[e^{-(\sigma-a)t}f(t)]f(\tau-b) = \mathcal{L}[f](\sigma-a+i(\tau-b)) \\ &= \mathcal{L}[f](s-c).\end{aligned}$$

På motsvarande sätt följer (d) ur sats 7.2.1 (e):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t-\lambda)](s) &= \mathcal{F}[e^{-\sigma t}f(t-\lambda)](\tau) = \mathcal{F}[e^{-\lambda\sigma}(e^{-\sigma(t-\lambda)}f(t-\lambda))](\tau) \\ &= e^{-\lambda\sigma}\mathcal{F}[e^{-\sigma(t-\lambda)}f(t-\lambda)](\tau) = e^{-\lambda\sigma}e^{-i\lambda\tau}\mathcal{F}[e^{-\sigma t}f(t)](\tau) \\ &= e^{-\lambda(\sigma+i\tau)}\mathcal{L}[f(t)](s) = e^{-\lambda s}\mathcal{L}[f(t)](s).\end{aligned}$$

□

EXEMPEL 8.2.1 Vi vet redan att $\mathcal{L}[\sin t](s) = \frac{1}{s^2+1}$. Med hjälp av (e) och (c) i sats 8.2.1 får man

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin at](s) &= \frac{1}{a((s/a)^2+1)} = \frac{a}{s^2+a^2} \quad \text{och} \\ \mathcal{L}[e^{bt}\sin at](s) &= \frac{a}{(s-b)^2+a^2}.\end{aligned}$$

□

Sats 8.2.2 Antag att $f \in \mathcal{E}$ är kontinuerlig och deriverbar och att $f' \in \mathcal{E}$. Då är

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0), \quad \text{om } \operatorname{Re} s > \max(\sigma_0(f), \sigma_0(f')).$$

Bevis. Antag att $\operatorname{Re} s > \max(\sigma_0(f), \sigma_0(f'))$. Då tillhör $f(t)e^{-st}$ rummet $L^1(\mathbf{R}_+)$, och det följer att det finns en växande följd $(t_n)_1^\infty$ så att $t_n \rightarrow \infty$ och $f(t_n)e^{-st_n} \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$. En partiell integration ger nu

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'](s) &= \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{t_n} f'(t)e^{-st}dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left([f(t)e^{-st}]_0^{t_n} + s \int_0^{t_n} f(t)e^{-st}dt \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n)e^{-st_n} - f(0) + s \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = s\tilde{f}(s) - f(0).\end{aligned}$$

□

Korollarium 8.2.3 Antag att $f \in \mathcal{E}$ är n gånger deriverbar och att alla derivatorna tillhör \mathcal{E} . Då är

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) s^{n-1-k},$$

förutsatt att $\operatorname{Re} s$ är tillräckligt stort.

Anmärkning. Derivatorna $f^{(k)}(0)$ ska naturligtvis tolkas som högerderivator i origo.

Bevis. Genom upprepade användning av sats 8.2.2 får vi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''](s) &= s \mathcal{L}[f'](s) - f'(0) = s(s \mathcal{L}[f](s) - f(0)) - f'(0) \\ &= s^2 \mathcal{L}[f](s) - f(0)s - f'(0), \end{aligned}$$

osv. □

Laplacetransformen kan användas för att lösa vissa integral- och differentialekvationer. I stora drag går metoden ut på att genom Laplacetransformering först överföra den ursprungliga ekvationen, som innehåller en obekant funktion f , till en ekvation för funktionens Laplacetransform \tilde{f} . Man löser sedan denna ekvation explicit och erhåller en lösning på formen $\tilde{f}(s) = G(s)$. Om vi har tur känner vi igen $G(s)$ som Laplacetransformen av någon känd funktion $g(t)$ (annars får man använda sig av någon metod för att rekonstruera funktionen $g(t)$ utifrån transformen $G(s)$). Sista steget består av slutsatsen att g är den sökta funktionen f . För att denna slutsats ska vara välgrundad behöver vi en entydighetssats, som säger att en funktion är entydigt bestämd av sin Laplacetransform. Vi kommer att bevisa ett sådant resultat i nästa avsnitt.

Följande två exempel illustrerar den allmänna lösningsmetoden.

EXEMPEL 8.2.2 Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 2y' - 3y = -8e^{-t} \sin 2t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

Lösning: Vi antar att lösningen $y = y(t)$, liksom y' och y'' , har en Laplace-transform. På grund av korollariet ovan är i så fall

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'](s) &= s\tilde{y}(s) - y(0) = s\tilde{y}(s) - 1 \\ \mathcal{L}[y''](s) &= s^2\tilde{y}(s) - sy(0) - y'(0) = s^2\tilde{y}(s) - s - 3. \end{aligned}$$

Linearitet ger därefter

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y'' + 2y' - 3y](s) &= s^2\tilde{y}(s) - s - 3 + 2(s\tilde{y}(s) - 1) - 3\tilde{y}(s) \\ &= (s^2 + 2s - 3)\tilde{y}(s) - s - 5.\end{aligned}$$

Å andra sidan visar exempel 1 ovan att

$$\mathcal{L}[-8e^{-t}\sin 2t](s) = -8 \cdot \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2} = -\frac{16}{s^2 + 2s + 5}.$$

Den givna differentialekvationen medför därför att

$$(s^2 + 2s - 3)\tilde{y}(s) - s - 5 = -\frac{16}{s^2 + 2s + 5}.$$

Resultatet blev en algebraisk ekvation som vi kan lösa med avseende på \tilde{y} :

$$\tilde{y}(s) = \frac{s^3 + 7s^2 + 15s + 9}{(s-1)(s+3)(s^2 + 2s + 5)}.$$

Här ser vi inte omedelbart att högerledet är Laplacetransformen till någon känd funktion, men om vi först delar upp högerledet i partialbråk, får vi

$$\tilde{y}(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{2}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{s-1} + \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}.$$

Nu har vi tur, ty vi känner igen högerledet som Laplacetransformen till funktionen $e^t + e^{-t}\sin 2t$. Eftersom funktionen är entydigt bestämd av sin Laplacetransform, drar vi slutsatsen att differentialekvationens lösning är

$$y(t) = e^t + e^{-t}\sin 2t. \quad \square$$

EXEMPEL 8.2.3 Lös integralekvationen

$$f(t) = 1 + \int_0^t f(t-u)e^u du, \quad t \geq 0.$$

Lösning: Antag $f \in \mathcal{E}$. Genom att Laplacetransformera integralekvationen får vi följande algebraiska ekvation

$$\tilde{f}(s) = \mathcal{L}[1 + f * e^t](s) = \frac{1}{s} + \tilde{f}(s)\frac{1}{s-1},$$

som vi löser med avseende på $\tilde{f}(s)$:

$$\tilde{f}(s) = \frac{s-1}{s(s-2)} = \frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s-2}.$$

Det följer att

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t}. \quad \square$$

8.3 Deriverbarhet och entydighet

Sats 8.3.1 Laplacetransformen \tilde{f} till en funktion $f \in \mathcal{E}$ är deriverbar i hela sitt definitionsområde $\operatorname{Re} s > \sigma_0(f)$ med derivata

$$\frac{d}{ds} \tilde{f}(s) = -\mathcal{L}[tf(t)](s).$$

Anmärkning. För läsare som har studerat komplex analys kan vi formulera sats 8.3.1 på följande sätt: Laplacetransformen \tilde{f} är analytisk i halvplanet $\operatorname{Re} s > \sigma_0(f)$. Detta faktum har långtgående konsekvenser.

Bevis. Formellt får man derivatan $\tilde{f}'(s)$ genom att derivera Laplacetransformen

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

under integraltecknet, vilket ger

$$\frac{d}{ds} \tilde{f}(s) = \int_0^\infty \frac{d}{ds} (f(t) e^{-st}) dt = - \int_0^\infty t f(t) e^{-st} dt = -\mathcal{L}[tf(t)](s).$$

För att rigoröst motivera att detta är tillåtet betraktar man differenskvoten

$$\frac{\tilde{f}(s+h) - \tilde{f}(s)}{h} = \int_0^\infty f(t) \frac{e^{-(s+h)t} - e^{-st}}{h} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-st} \frac{e^{-ht} - 1}{h} dt.$$

Avsikten är förstås att låta $h \rightarrow 0$.

Sätt som vanligt $s = \sigma + \tau i$, antag att $\sigma > \sigma_0(f)$, och välj $\epsilon > 0$ så att $\sigma - \epsilon > \sigma_0(f)$. Integranden

$$f(t) e^{-st} \frac{e^{-ht} - 1}{h}$$

går mot $-tf(t) e^{-st}$ då $h \rightarrow 0$. Påståendet följer således med hjälp av Lebesgues sats om dominerad konvergens så snart som vi har visat att integranden är begränsad av någon $L^1(\mathbf{R}_+)$ -funktion som är oberoende av h .

På grund av olikheten $|e^{-ht} - 1| \leq t|h|e^{|h|t}$ är integranden till sitt belopp begränsad av $t|f(t)|e^{(|h|-\sigma)t}$. För $|h| \leq \epsilon$ är därför integranden begränsad av funktionen $t|f(t)|e^{-(\sigma-\epsilon)t}$, som tillhör $L^1(\mathbf{R}_+)$ eftersom $tf(t) \in \mathcal{E}$ och $\sigma_0(tf(t)) = \sigma_0(f(t)) < \sigma - \epsilon$. \square

Genom iteration får vi följande följande korollarium till sats 8.3.1.

Korollarium 8.3.2 Antag $f \in \mathcal{E}$. Då har Laplacetransformen \tilde{f} derivator av alla ordningar i området $\operatorname{Re} s > \sigma_0(f)$ och

$$\frac{d^n}{ds^n} \tilde{f}(s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)](s).$$

EXEMPEL 8.3.1 Vi vet att $\mathcal{L}[e^{ct}](s) = \frac{1}{s-c}$. Genom att derivera n gånger får vi

$$\mathcal{L}[t^n e^{ct}](s) = \frac{n!}{(s-c)^{n+1}},$$

och som specialfall

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}. \quad \square$$

Sats 8.3.3 (Entydighetssatsen) Antag att $f \in \mathcal{E}$ och att $\tilde{f}(s) = 0$ för alla s i något intervall på \mathbf{R} . Då är $f(t) = 0$ i alla kontinuitetpunkter t till f .

Beviset utnyttjar egenskaper hos analytiska funktioner och bör därför hoppas över av den som inte har studerat komplex analys.

Bevis. På grund av entydighetssatsen för analytiska funktioner är $\tilde{f}(s) = 0$ för alla s i transformens definitionsområde. Om $\sigma_1 > \sigma_0(f)$, så är därför speciellt $\tilde{f}(\sigma_1 + \tau i) = 0$ för alla $\tau \in \mathbf{R}$. Men

$$\tilde{f}(\sigma_1 + \tau i) = \mathcal{F}[e^{-\sigma_1 t} f(t)](\tau).$$

Fouriertransformen till L^1 -funktionen $e^{-\sigma_1 t} f(t)$ är således identiskt noll. Entydighetssatsen för fouriertransformen leder därför till slutsatsen att $e^{-\sigma_1 t} f(t)$ är lika med nollfunktionen. Det följer att $f(t)$ är nollfunktionen i L^1 . Speciellt är därför $f(t) = 0$ i alla punkter t där f är kontinuerlig. \square

Korollarium 8.3.4 Om $f, g \in \mathcal{E}$ och $\tilde{f}(s) = \tilde{g}(s)$ för alla tillräckligt stora reella tal s , så är $f(t) = g(t)$ i alla punkter t där båda funktionerna är kontinuerliga.

Bevis. Tillämpa entydighetssatsen på funktionen $f - g$. \square

Sats 8.3.5 Om $f \in \mathcal{E}$, så gäller att $\tilde{f}(s) \rightarrow 0$ då $\operatorname{Re} s \rightarrow \infty$.

Bevis. Välj $a > \sigma_0(f)$ och sätt $s = \sigma + \tau i$. Eftersom $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} f(t) e^{-\sigma t} = 0$ för alla $t > 0$, och funktionen $|f(t)|e^{-\sigma t}$ är begränsad av $|f(t)|e^{-at} \in L^1(\mathbf{R}_+)$ för alla $\sigma \geq a$, följer det av Lebesgues sats om dominerad konvergens att

$$|\tilde{f}(s)| \leq \int_0^\infty |f(t)| e^{-\sigma t} dt \rightarrow 0, \quad \text{då } \sigma \rightarrow \infty. \quad \square$$

Sats 8.3.6 Varje rationell funktion, i vilken täljaren har lägre grad än nämnaren, är Laplacetransform till en funktion i \mathcal{E} .

Bevis. En sådan rationell funktion kan skrivas som en linjärkombination av partialbråk på formen $(s-c)^{-(n+1)}$ med $n \geq 0$, och sådana bråk är Laplace-transformer till funktionerna $\frac{1}{n!} t^n e^{ct}$. \square

Vi avslutar det här avsnittet med några kompletterande resultat om Laplacetransformens beteende när $s \rightarrow \infty$ och $s \rightarrow 0$.

Sats 8.3.7 *Antag $f \in \mathcal{E}$ och betrakta nedan för enkelhets skull Laplacetransformen $\tilde{f}(s)$ bara för reella argument s .*

(a) Begynnelsevärdesregeln: Om $f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$ existerar, så är

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s\tilde{f}(s) = f(0+).$$

(b) Slutvärdesregeln: Om $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ existerar, så är

$$\lim_{s \rightarrow 0+} s\tilde{f}(s) = f(\infty).$$

Bevis. (a) Vi observerar först att funktionerna $(K_s)_{s>0}$, som definieras av att

$$K_s(t) = \begin{cases} se^{st}, & \text{om } t \leq 0, \\ 0, & \text{om } t > 0, \end{cases}$$

bildar en positiv summationskärna på \mathbf{R} , ty

$$(i) \quad \int_{\mathbf{R}} K_s(t) dt = \int_{-\infty}^0 se^{st} dt = \int_{-\infty}^0 e^u du = 1,$$

$$(ii) \quad K_s(t) \geq 0 \text{ för alla } t, \text{ och}$$

$$(iii) \quad \int_{|t| \geq \delta} K_s(t) dt = \int_{-\infty}^{-\delta} se^{st} dt = \int_{-\infty}^{-\delta} e^u du = e^{-\delta s} \rightarrow 0, \text{ då } s \rightarrow \infty.$$

Dessutom gäller att $\sup_{|t| \geq \delta} K_s(t) = se^{-\delta s} \rightarrow 0$, då $s \rightarrow \infty$.

Om funktionen g tillhör $L^1(\mathbf{R})$ och är kontinuerlig i punkten 0, så är därför

$$\lim_{s \rightarrow \infty} g * K_s(0) = g(0),$$

enligt sats 7.3.1. Som funktion g kan vi speciellt välja

$$g(t) = \begin{cases} f(t)e^{-at}, & \text{om } t > 0, \\ f(0+), & \text{om } -1 \leq t \leq 0, \\ 0, & \text{om } t < -1, \end{cases}$$

där $a > \sigma_0(f)$. (Det spelar ingen roll hur vi definierar $g(t)$ för $t < 0$ bara den utvidgade funktionen tillhör $L^1(\mathbf{R})$ och är kontinuerlig i 0.) Nu är

$$\begin{aligned} g * K_s(0) &= \int_{\mathbf{R}} g(t)K_s(-t) dt = \int_0^\infty g(t)se^{-st} dt = s \int_0^\infty f(t)e^{-at}e^{-st} dt \\ &= s\tilde{f}(s+a). \end{aligned}$$

Eftersom $g(0) = f(0+)$, är slutsatsen att

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow \infty} s\tilde{f}(s) &= \lim_{s \rightarrow \infty} (s+a)\tilde{f}(s+a) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s+a}{s} \cdot s\tilde{f}(s+a) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\tilde{f}(s+a) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} g * K_s(0) = g(0) = f(0+).\end{aligned}$$

(b) kan också reduceras till att bli ett specialfall av sats 7.3.1, men följande direkta bevis är enklare.

Låt $\epsilon > 0$ vara givet. Eftersom $s \int_0^\infty e^{-st} dt = 1$, är

$$s\tilde{f}(s) - f(\infty) = \int_0^\infty s(f(t) - f(\infty)) e^{-st} dt.$$

Välj talet A tillräckligt stort för att garantera att $|f(t) - f(\infty)| < \epsilon$ för alla $t \geq A$, och skriv integralen ovan som en summa av integraler över intervallen $[0, A]$ och $[A, \infty[$:

$$\begin{aligned}s\tilde{f}(s) - f(\infty) &= \int_0^A s f(t) e^{-st} dt - \int_0^A s f(\infty) e^{-st} dt \\ &\quad + \int_A^\infty s(f(t) - f(\infty)) e^{-st} dt \\ &= I_1 + I_2 + I_3.\end{aligned}$$

De tre ingående integralerna kan nu uppskattas på följande sätt:

$$|I_1| \leq s \int_0^A |f(t)| e^{-st} dt \leq s \int_0^A |f(t)| dt \rightarrow 0, \quad \text{då } s \rightarrow 0+.$$

$$|I_2| \leq s |f(\infty)| \int_0^A e^{-st} dt \leq A s |f(\infty)| \rightarrow 0, \quad \text{då } s \rightarrow 0+.$$

$$|I_3| \leq \int_A^\infty |f(t) - f(\infty)| s e^{-st} dt \leq \int_A^\infty \epsilon s e^{-st} dt \leq \epsilon \int_0^\infty s e^{-st} dt = \epsilon.$$

Följaktligen finns det ett $\delta > 0$ så att $|I_1| < \epsilon$ och $|I_2| < \epsilon$ för $0 < s < \delta$. Det följer att

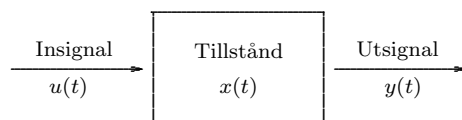
$$|s\tilde{f}(s) - f(\infty)| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| < 3\epsilon,$$

om $0 < s < \delta$. Detta bevisar påstående (b). □

8.4 Dynamiska system

En del dynamiska system kan beskrivas schematiskt med hjälp av figur 8.1. Systemets faktiska tillstånd vid tidpunkten t beskrivs av tillståndsvariabeln

$x(t)$ (som i allmänhet är en vektorvärd funktion, men låt oss för enkelhetens skull anta att $x(t)$ är en vanlig reellvärd funktion). Vi kan påverka systemet via funktionen $u(t)$ (insignalen), och vi observerar systemet med hjälp av funktionen $y(t)$ (utsignalen).



Figur 8.1.

Låt oss anta att systemets tillstånd för tidpunkter $t \geq 0$ beskrivs av en linjär differentialekvation av typen

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_2 x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = u(t)$$

med $a_n \neq 0$, att systemet är i vila vid tidpunkten $t = 0$, dvs. att

$$x^{(n-1)}(0) = \cdots = x''(0) = x'(0) = x(0) = 0,$$

och att utsignalen $y(t)$ är en linjärkombination av derivator till $x(t)$ av högst ordning $n - 1$, dvs. att

$$y(t) = b_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \cdots + b_2 x''(t) + b_1 x'(t) + b_0 x(t).$$

Låt $P(s)$ och $Q(s)$ beteckna polynomen

$$\begin{aligned} P(s) &= a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \quad \text{och} \\ Q(s) &= b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0. \end{aligned}$$

På grund av begynnelsevillkoren är $\widetilde{x^{(k)}}(s) = s^k \tilde{x}(s)$, så genom att Laplacetransformera de båda likheterna ovan innehållande $u(t)$ resp. $y(t)$, får vi sambanden

$$P(s) \tilde{x}(s) = \tilde{u}(s) \quad \text{och} \quad \tilde{y}(s) = Q(s) \tilde{x}(s).$$

Elimineras $\tilde{x}(s)$ blir resultatet

$$\tilde{y}(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \tilde{u}(s).$$

Funktionen $G(s) = Q(s)/P(s)$ kallas systemets *överföringsfunktion*. Denna funktion är en rationell, och eftersom täljaren har lägre grad än nämnaren är

den Laplacetransform till någon kontinuerlig funktion $g(t)$, som kallas systemets *viktfunktion*. Enligt sats 8.2.1 är $\mathcal{L}[g * u](s) = \tilde{g}(s)\tilde{u}(s) = G(s)\tilde{u}(s) = \tilde{y}(s)$. Sambandet mellan utsignal och insignal ges därför av en faltning, nämligen

$$y(t) = (g * u)(t) = \int_0^t g(t-x)u(x) dx.$$

EXEMPEL 8.4.1 Som konkret exempel betraktar vi en partikel med massa m som rör sig längs x -axeln under påverkan av en yttre kraft $u(t)$. Låt $x(t)$ beteckna partikelns läge vid tidpunkten t , och antag att den är i vila då $t = 0$. Låt oss slutligen använda läget som den observerade variabeln (utsignalen).

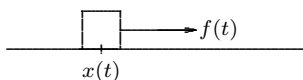
Enligt Newtons rörelselag beskrivs systemets tillstånd av differentialekvationen $mx''(t) = u(t)$, och $y(t) = x(t)$. I föreliggande situation är således $P(s) = ms^2$, $Q(s) = 1$, $G(s) = 1/ms^2$ och $g(t) = t/m$. Sambandet mellan kraft (insignal) och läge (utsignal) beskrivs således av integralekvationen

$$y(t) = m^{-1} \int_0^t (t-x)u(x) dx.$$

□

8.5 Diracmåttet

Kraft och impuls



Figur 8.2.

Betrakta ett föremål med massa m som kan röra sig utefter x -axeln. För tidpunkter $t \leq 0$ befinner det sig i vila i origo. För $t > 0$ utsätts det av en kraft $f(t)$, som sätter föremålet i rörelse så att det vid tiden t befinner sig i punkten $x(t)$ och har hastigheten $v(t) = x'(t)$.

Föremålets rörelse beskrivs av Newtons lag:

$$f(t) = mx''(t) = mv'(t),$$

och genom att integrera detta samband över intervallet $] -\infty, t]$ erhåller vi (eftersom $f(t) = 0$ för $t \leq 0$):

$$\int_{-\infty}^t f(s) ds = \int_0^t f(s) ds = m \int_0^t v'(s) ds = mv(t) - mv(0) = mv(t).$$

I fysik kallar man $I(t) = mv(t)$ för föremålets *impuls*, och sambandet ovan innebär alltså att förändringen i ett föremåls impuls över ett tidsintervall är lika med integralen av kraften över samma intervall. Om vi antar att kraften $f(t) = 0$ utanför intervallet $[0, T]$, att $m = 1$ och att $\int_0^T f(t)dt = 1$, och plottar kraften respektive impulsen som funktioner av tiden, får vi grafer med följande utseende:

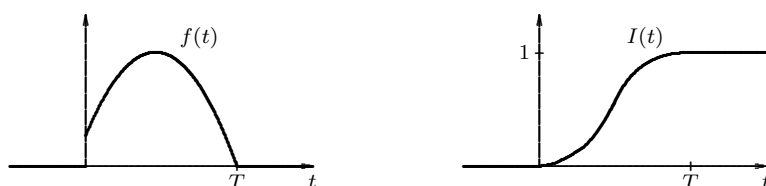


Figure 8.3. Kraften respektive impulsen som funktion av tiden.

Låt nu föremålet ifråga vara en biljardboll, som vid tidpunkten $t = 0$ utsätts för en kraftig stöt. Tidsintervallet $[0, h]$ under vilket stötkraften verkar på bollen är mycket kort – låt oss anta att

$$f_h(t) = \begin{cases} 1/h & \text{då } 0 \leq t \leq h \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Impulsen blir då

$$I_h(t) = \int_{-\infty}^t f_h(s) ds = \begin{cases} 0 & \text{för } t \leq 0 \\ t/h & \text{för } 0 \leq t \leq h \\ 1 & \text{för } t \geq h. \end{cases}$$

Graferna för kraften $f_h(t)$ och impulsen $I_h(t)$ har nu följande utseende:

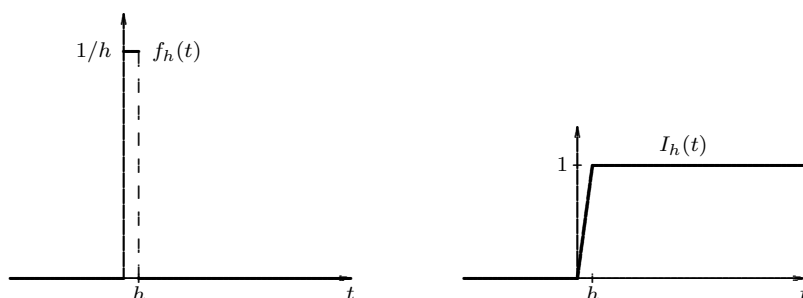


Figure 8.4. Stötkraft och motsvarande impuls.

Heavisidefunktionen

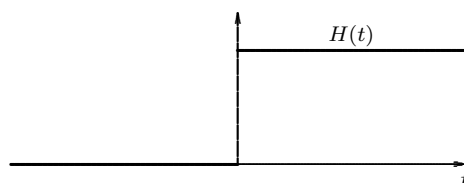
Vi undersöker gränsvärdet av $I_h(t)$ då h går mot 0. Tydligt är

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_h(t) = \begin{cases} 0 & \text{om } t \leq 0 \\ 1 & \text{om } t > 0. \end{cases}$$

Detta ger oss anledning att introducera den s. k. *Heavisidefunktionen* H , som definieras som

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{om } t < 0 \\ 1 & \text{om } t > 0. \end{cases}$$

Vi bryr oss inte om att ge Heavisidefunktionen något värde för $t = 0$, eftersom värdet där ändå är oväsentligt för den kommande diskussionen.



Figur 8.5. Heavisidefunktionen.

Tydligt går impulsfunktionen $I_h(t)$ mot $H(t)$ då h går mot 0, så därför beskriver Heavisidefunktionen impulsen med god approximation för krafter som verkar under mycket kort tid. Slutsatsen gäller även om stötkraften har ett annat utseende än det som ges av figur 8.4. För alla kraftfunktioner $f_h(t)$ som är 0 utanför intervallet $[0, h]$ och vars integral över intervallet $[0, h]$ är lika med 1, gäller att motsvarande impulsfunktioner $I_h(t)$ konvergerar mot Heavisidefunktionen då $h \rightarrow 0$. (Om integralen av kraftfunktionen istället är konstant lika med α , så konvergerar impulsen mot $\alpha H(t)$.)

Vi gör därför en idealisering av verkligheten och säger att impulsen vid en stöt ges av Heavisidefunktionen (eller en multipel av densamma). Men kan man då på något vettigt sett beskriva impulsen som en integral av någonting, dvs. är

$$(8.5.1) \quad H(t) = \int_{-\infty}^t f(s) ds$$

för någon icke-negativ "kraft" f . Problemet är att det inte kan finnas någon funktion f som åstadkommer detta. För alla intervall $[a, b]$ som inte innehåller

0 är $\int_a^b f(s) ds = H(b) - H(a) = 0$, och detta medför att $f(s) = 0$ på alla sådana intervall, dvs. $f(s) = 0$ för alla $s \neq 0$, och då blir ju $\int_{-\infty}^t f(s) ds = 0$ för alla t , vilket strider mot definitionen av funktionen H .

Diracmåttet

I en sådan situation finns det bara en sak att göra – såvida man inte ger upp förstås – nämligen att uppfinna ett nytt objekt. Vi **definierar** *Diracmåttet* eller *Diracdistributionen*¹ $\delta(t)dt$ genom att kräva att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t) dt = \varphi(0)$$

ska gälla för alla funktioner φ som är kontinuerliga i en omgivning av origo. Då blir speciellt

$$\int_{-\infty}^t \delta(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{]-\infty, t]}(s) \delta(s) ds = \chi_{]-\infty, t]}(0) = \begin{cases} 0 & \text{om } t < 0 \\ 1 & \text{om } t > 0 \end{cases} = H(t)$$

så vi har uppfunnit ett objekt $f(t) = \delta(t)$ som uppfyller ekvation (8.5.1).

En konsekvens av definitionen är att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)f(t)\delta(t) dt = \varphi(0)f(0) = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)f(0)\delta(t) dt,$$

om funktionerna f och φ är kontinuerliga i en omgivning av 0, och därför finns det ingen anledning att skilja på objekten $f(t)\delta(t)$ och $f(0)\delta(t)$. För kontinuerliga funktioner f är med andra ord

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t).$$

Faltningen $f * \delta$ mellan en kontinuerlig funktion f och Diracmåttet definieras som

$$(f * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\delta(s) ds.$$

Definitionen ovan av Diracmåttet ger direkt att $(f * \delta)(t) = f(t-0) = f(t)$, dvs.

$$f * \delta = f.$$

Med avseende på faltning fyller med andra ord Diracmåttet δ samma funktion som talet 1 gör med avseende på multiplikation av tal.

¹Fysiker, som inte är lika noga som matematiker, säger Diracfunktionen $\delta(t)$.

Heavisidefunktionens derivata

Heavisidefunktionen är förstas derivierbar i alla punkter utom $t = 0$ med derivata $H'(t) = 0$. Däremot existerar inte $H'(0)$ hur vi än definierar $H(0)$, eftersom Heavisidefunktionen har en diskontinuitet i origo. Men om vi lämnar klassen av traditionella funktioner kan vi på ett meningsfullt sätt definiera ett derivatabegrepp som gör att Heavisidefunktionen blir "överallt derivierbar".

Vi antar därför att derivatan $H'(t)$ finns i någon mening och att vi kan räkna med denna derivata på "vanligt sätt" i formeln för partiell integration. Låt vidare φ vara en kontinuerligt derivierbar funktion som är identiskt noll utanför något begränsat intervall, vilket innebär att $\varphi(t) = 0$ för $|t| \geq a$, om talet a är tillräckligt stort. Genom partiell integration får vi då följande resultat:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) H'(t) dt &= \int_{-a}^a \varphi(t) H'(t) dt = [\varphi(t) H(t)]_{-a}^a - \int_{-a}^a \varphi'(t) H(t) dt \\ &= \varphi(a) H(a) - \varphi(-a) H(-a) - \int_0^a \varphi'(t) dt \\ &= 0 - 0 - [\varphi(t)]_0^a = \varphi(0) - \varphi(a) = \varphi(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta(t) dt. \end{aligned}$$

Detta ger oss anledning att uppfatta $H'(t)$ och $\delta(t)$ som samma sak, dvs.

$$H'(t) = \delta(t).$$

Heavisidefunktionens derivata är således lika med Diracmåttet.

Diracmåttets Laplacetransform

Laplacetransformen $\tilde{f}(s)$ till en funktion f , som är definierad på halvaxeln $[0, +\infty[$, ges som bekant av formeln

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

För funktioner f som också är definierade i en omgivning till vänster om origo, och som har ändlig integral då man integrerar över ett litet intervall runt origo, är

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \int_h^0 f(t) e^{-st} dt = 0$$

så därför kan man för dem lika gärna definiera Laplacetransformen som

$$\tilde{f}(s) = \lim_{h \rightarrow 0-} \int_h^{\infty} f(t) e^{-st} dt,$$

och gränsvärdet i högerledet brukar av naturliga skäl betecknas

$$\int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

För integraler som innehåller Diracmättet bör integrationsintervallet inte innehålla 0 som randpunkt. Av den anledningen definierar vi nu *Laplace-transformen* $\tilde{\delta}(s)$ till Diracmättet på följande sätt:

$$\tilde{\delta}(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-st} \delta(t) dt = e^{-s0} = 1.$$

Resultatet verkar vettigt, ty sambandet mellan Laplacetransformerna till en vanlig funktion och funktionens derivata, som med vår modifierade definition har formen

$$\tilde{f}'(s) = s\tilde{f}(s) - f(0-),$$

gäller nu även för Heavisidefunktionens derivata $H' = \delta$, eftersom $\tilde{H}(s) = 1/s$ och $H(0-) = 0$.

Fundamentallösningen

EXEMPEL 8.5.1 Låt oss bestämma den allmänna lösningen till differential-ekvationen

$$(8.5.2) \quad y' + 2y = \delta$$

samt den speciella lösning som uppfyller villkoret

$$(8.5.3) \quad y(0-) = \lim_{t \rightarrow 0-} y(t) = 0.$$

Differentialekvationen är linjär av första ordningen, så vi börjar med att bestämma en integrerande faktor, som i det här fallet är e^{2t} . Efter multiplikation med denna får vi den ekvivalenta ekvationen

$$\frac{d}{dt}(ye^{2t}) = e^{2t}\delta(t) = e^{2 \cdot 0}\delta(t) = \delta(t) = \frac{d}{dt}H(t)$$

med slutsatsen att $ye^{2t} = H(t) + C$ för någon konstant C . Följaktligen är

$$y = e^{-2t}H(t) + Ce^{-2t}$$

den allmänna lösningen till den givna differentialekvationen.

Eftersom $H(0-) = 0$ är $C = y(0-) = 0$, så

$$y = e^{-2t}H(t)$$

är den speciella lösning till (8.5.2) som också uppfyller begynnelsevillkoret (8.5.3). Denna speciella lösning kallas fundamentallösningen till differentialekvationen $y' + 2y = u(t)$. \square

Allmänt har vi följande definition: Med *fundamentallösningen* till en linjär differentialekvation

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = u(t)$$

menas den lösning till differentialekvationen

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = \delta$$

som uppfyller begynnelsevillkoren

$$y^{(n-1)}(0-) = y^{(n-2)}(0-) = \dots + y'(0-) = y(0-) = 0.$$

Med de givna begynnelsevillkoren har differentialekvationen en entydig lösning. På intervallet $]-\infty, 0[$ satisfierar uppenbarligen nollfunktionen såväl differentialekvationen som begynnelsevillkoren, så därför är fundamentallösningen identiskt lika med 0 för $t < 0$.

EXEMPEL 8.5.2 Vi bestämmer fundamentallösningen till differentialekvationen

$$y'' - y' - 6y = u(t).$$

Den här gången använder vi Laplacetransformen för att bestämma fundamentallösningen, dvs. lösningen $y(t)$ till differentialekvationen

$$y'' - y' - 6y = \delta$$

med begynnelsevillkoren $y'(0-) = y(0-) = 0$. Sätt $Y(s) = \tilde{y}(s)$. På grund av begynnelsevillkoren är $\tilde{y}'(s) = sY(s)$ och $\tilde{y}''(s) = s^2Y(s)$. Vidare har Diracmåttet Laplacetransform 1, så genom att Laplacetransformera differentialekvationen får vi ekvationen

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - sY(s) - 6Y(s) &= 1 \\ (s^2 - s - 6)Y(s) &= 1 \\ Y(s) &= \frac{1}{s^2 - s - 6} = \frac{1}{(s-3)(s+2)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{s-3} - \frac{1}{s+2} \right) \end{aligned}$$

med slutsatsen att

$$y(t) = \frac{1}{5}(e^{3t}H(t) - e^{-2t}H(t)) = \frac{1}{5}(e^{3t} - e^{-2t})H(t).$$

(Vi måste multiplicera med heavisidefunktionen $H(t)$ eftersom $y(t) = 0$ för $t < 0$.) \square

Med hjälp av fundamentallösningen kan man konstruera en partikulärlösning för varje högerledsfunktion u . Följande sats ger receptet.

Sats 8.5.1 Låt $E(t)$ beteckna fundamentallösningen till differentialekvationen

$$(8.5.4) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = u(t).$$

Då är faltningen

$$y(t) = (E * u)(t)$$

för $t > 0$ den partikulärlösning till differentialekvationen som uppfyller begynnelsevillkoren

$$y^{(n-1)}(0-) = y^{(n-2)}(0-) = \cdots + y'(0-) = y(0-) = 0.$$

Bevis. Att $E(t)$ är fundamentallösningen betyder att

$$(8.5.5) \quad E^{(n)}(t) + a_{n-1}E^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1E'(t) + a_0E(t) = \delta(t)$$

och att $E(t)$ satisfierar begynnelsevillkoren ovan.

Sätt

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0,$$

och låt vidare $\tilde{y}(s)$, $\tilde{E}(s)$ och $\tilde{u}(s)$ beteckna Laplacetransformerna till den sökta partikulärlösningen, fundamentallösningen resp. högerledsfunktionen $u(t)$. Genom att Laplacetransformera de båda differentialekvationerna (8.5.4) och (8.5.5) får vi sambanden (jämför med exemplet ovan)

$$P(s)\tilde{y}(s) = \tilde{u}(s) \quad \text{och}$$

$$P(s)\tilde{E}(s) = 1.$$

Den andra ekvationen ger att $1/P(s) = \tilde{E}(s)$, vilket insatt i den första ekvationen leder till att

$$\tilde{y}(s) = \tilde{u}(s)/P(s) = \tilde{E}(s)\tilde{u}(s) = \widetilde{(E * u)}(s).$$

Följaktligen är $y(t) = (E * u)(t)$. \square

Impulssvar

Betrakta en svart låda med insignal $u(t)$, viktfunction $k(t)$ och utsignal $y(t)$. Sambandet mellan insignal och utsignal ges då per definition av faltningen

$$y = k * u.$$

Genom Laplacetransformering fås följande ekvivalenta formulering

$$\tilde{y}(s) = K(s)\tilde{u}(s),$$

där $K(s) = \tilde{k}(s)$ är överföringsfunktionen.

Lådans funktion är helt bestämd av överföringsfunktionen. Hur ska man då bestämma denna? Ja, enklast är förstås att studera vilken reaktion som fås då man skickar in en signal med Laplacetransform $\tilde{u}(s) = 1$. Utsignalens transform blir då $\tilde{y}(s) = K(s)$. Överföringsfunktionen överensstämmer med andra ord med utsignalens transform då insignalen är lika med Diracpulsens δ . I praktiken kan man naturligtvis bara åstadkomma en approximativ sådan puls, nämligen en insignal som är skild från noll under ett kort intervall och har integral lika med 1.

Övningsuppgifter till kapitel 8

8.1 Bestäm funktionen f om dess Laplacetransform är

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{1}{s(s+1)} & \text{b) } \frac{1}{s^2+4s+29} & \text{c) } \frac{6s^2+4s-2}{(s-2)^2(s^2+2s+2)} \\ \text{d) } \frac{se^{-s}}{(s^2+1)^2} & \text{e) } \frac{e^{-s}}{(s-1)(s-2)} & \text{f) } \ln \frac{s+3}{s+2}. \end{array}$$

8.2 Bestäm Laplacetransformen till funktionen f om

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{då } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases} & \text{b) } f(t) = \begin{cases} t & \text{då } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases} \\ \text{c) funktionen är periodisk med period 1 och } f(t) = t \text{ för } 0 \leq t < 1. \end{array}$$

8.3 Bestäm en funktion f som är definierad på intervallet $[0, \infty[$ och som löser integralekvationen

$$\int_0^t u f(t-u) du = t \sin t.$$

8.4 Bestäm funktioner $x(t)$ och $y(t)$, definierade för $t \geq 0$, så att

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t y(t-u) du \\ y(t) = 1 + 2 \int_0^t x(t-u) \cos u du \end{cases}$$

8.5 Bestäm en lösning till integralekvationen

$$\int_0^t f(t-u) \cos 2u \, du = \sin t, \quad t \geq 0.$$

8.6 Lös med hjälp av Laplacetransformering systemet

$$\begin{cases} x + y' = 2e^t \\ x' - x - 2y' - y = \sin t \end{cases}$$

med begynnelsevärdena $x(0) = 2$ och $y(0) = 1$.

8.7 Lös systemet

$$\begin{cases} z'' + y = 5e^{2t} \\ y'' - z = 3e^{2t}, \end{cases}$$

där $y(0) = z(0) = 1$, $y'(0) = z'(0) = 2$.

8.8 Lös integralekvationen

$$y(t) = t + 2 \int_0^t \cos(t-u) y(u) \, du.$$

8.9 Beräkna Laplacetransformen till funktionen $f(t) = \frac{\sin t}{t}$.

8.10 Beräkna Laplacetransformen till $f(t) = \int_0^t \frac{1 - e^{-u}}{u} \, du$.

8.11 Beräkna Laplacetransformen till $f(t) = t^a$, $a > -1$, genom att (för $a > 0$) härleda en differentialekvation för transformen.

8.12 Antag att funktionen f 's Laplacetransform $\tilde{f}(s)$ existerar för $s \geq 0$, och låt g beteckna Laplacetransformen till funktionen \tilde{f} , dvs. $g(s) = \mathcal{L}[\tilde{f}](s)$. Visa att

$$g(s) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t+s} \, dt.$$

(Man kallar g för Stieltjestransformen av f .)

Kapitel 9

Utblickar mot abstrakt harmonisk analys

Läsaren kan knappast ha undgått att märka de stora likheterna i resultaten för fourierserier och fouriertransformer. Detta är naturligtvis ingen tillfällighet utan det finns en bakomliggande generell teori. En grundlig genomgång av denna förutsätter kunskaper i funktionalanalys, mått- och integrationsteori och topologi, så diskussionen i detta kapitel blir därför nödvändigtvis skissartad.

9.1 Lokalt kompakta abelska grupper

Abelska grupper

Gemensamt för \mathbf{T} , \mathbf{Z} , \mathbf{R} och \mathbf{Z}_N , som varit våra spelplaner för fourieranalysen, är att de är abelska grupper.

En *grupp* G är en mängd som är försedd med en binär operation \cdot , dvs. en operation som till varje par a, b av element i G tillordnar ett element $a \cdot b$ i G , som uppfyller följande tre gruppaxiom:

- (i) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ för alla element $a, b, c \in G$.
- (ii) Det finns ett unikt *neutralt* element 1 i G så att $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ för alla $a \in G$.
- (iii) För varje element $a \in G$ finns det ett unikt *inverst* element a^{-1} så att $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Vanligtvis utelämnar man operationssymbolen \cdot och skriver ab istället för $a \cdot b$, precis som vid vanlig multiplikation.

Gruppen kallas *kommutativ* eller *abelsk* om gruppoperationen är kommutativ, dvs. om

(iv) $a \cdot b = b \cdot a$ för alla gruppelament a, b .

I abelska grupper använder man oftast additiv notation, dvs. man använder $+$ som symbol för gruppoperationen, kallar det neutrala elementet 0 och skriver $-a$ för inversen till a . De fyra gruppegenskaperna blir med andra ord: $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a + 0 = 0 + a = a$, $a + (-a) = -a + a = 0$ och $a + b = b + a$.

\mathbf{T} , \mathbf{Z} , \mathbf{R} och \mathbf{Z}_N är som redan nämnts abelska grupper; gruppoperationen $+$ är för dessa grupper addition modulo 2π , addition av heltal, addition av reella tal resp. addition av heltal modulo N . Gruppen \mathbf{T} kan också som mängd identifieras med enhetscirkeln i komplexa talplanet via avbildningen $t \mapsto e^{it}$, och gruppoperationen i \mathbf{T} motsvaras då av multiplikation av komplexa tal.

Andra exempel på naturliga abelska grupper är \mathbf{R}^n och \mathbf{T}^n , där gruppoperationen är komponentvis addition i \mathbf{R} resp. i \mathbf{T} .

Begreppet *translation* har en naturlig definition i abelska grupper G . Om X är en delmängd till gruppen och a är ett gruppelament, så kallas mängden $a + X = \{a + x \mid x \in X\}$ ett translat till X . Och om f är en funktion som är definierad på hela gruppen, kallas funktionen f_a , definierad av att $f_a(x) = f(x - a)$ för alla $x \in G$, ett translat till f .

Topologiska grupper

Våra grundläggande objekt \mathbf{T} , \mathbf{Z} , \mathbf{R} och \mathbf{Z}_N bär inte bara på en algebraisk struktur, utan de har också en topologisk struktur, som gör det möjligt att tala om kontinuitet för funktioner som är definierade på grupperna och för själva gruppoperationerna addition ($+$) och inversbildning ($-$). Topologin definieras av att man specificerar vad som skall menas med (*öppna*) *omgivning*ar till gruppelamenten.

En grupp med ett omgivningsbegrepp som uppfyller vissa naturliga villkor som vi inte specificerar här, och som gör att gruppoperationerna blir kontinuerliga, kallas en *topologisk grupp*. Det räcker härvidlag att precisera omgivningarna till gruppens neutrala element, ty omgivningarna till övriga gruppelament fås som translat.

I gruppen \mathbf{R} är de öppna omgivningarna av 0 öppna intervall $]a, b[$ med $a < 0 < b$, och i gruppen $\mathbf{T} = [0, 2\pi[$ har de öppna omgivningarna av nollelementet formen $[0, a[\cup]b, 2\pi[$ med $a > 0$ och $b < 2\pi$. Även i grupperna \mathbf{Z} och \mathbf{Z}_N har vi ett omgivningsbegrepp, fast av det mer triviala slaget; varje delmängd av \mathbf{Z} resp. av \mathbf{Z}_N innehållande 0 är en öppen omgivning till 0 , och speciellt är således enpunktsmängden $\{0\}$ en öppen omgivning.

Grupperna \mathbf{T} och \mathbf{R} är tydligen *kontinuerliga* topologiska grupper i den meningen att det i varje öppen omgivning av ett godtyckligt element finns

andra gruppelement. Grupperna \mathbf{Z} och \mathbf{Z}_N är däremot *diskreta* grupper, vilket betyder att det för varje element finns det en omgivning som inte innehåller något annat element.

Haarmåttet

För att man skall kunna utveckla någon slags motsvarighet till fourieranalysen på en grupp behöver man förstå ett användbart integralbegrepp, och för att kunna definiera ett sådant behöver man kunna mäta "storleken" hos delmängder till gruppen. För grupperna \mathbf{Z} och \mathbf{Z}_N är detta enkelt; en delmängds mått är helt enkelt lika med antalet element i delmängden. En ändlig delmängds mått blir därigenom ett icke-negativt heltal, medan oändliga delmängder av \mathbf{Z} får mått $+\infty$.

Måttet för ett intervall i \mathbf{T} eller \mathbf{R} är lika med intervalllängden, och måttet för en mängd som är en disjunkt union av intervall är lika med summan av intervalllängderna. Man kan sedan utvidga definitionen så att varje "vettig" mängd blir mätbar, och det mått man får på detta vis kallas *Lebesguemåttet*.

En viktig egenskap hos Lebesguemåttet och hos de diskreta måtten på grupperna \mathbf{Z} och \mathbf{Z}_N är att de är *translationsinvarianta*, dvs. ett godtyckligt translat $a + X$ har samma mått som mängden X .

Det finns en viktig klass av topologiska grupper för vilka man kan konstruera en motsvarighet till det translationsinvarianta Lebesguemåttet på \mathbf{R} , och det är grupper i vilka nollelementet har en öppen omgivning, vars slutna hölje är kompakt. Sådana grupper kallas *lokalt kompakta*. Grupperna \mathbf{T} , \mathbf{R} , \mathbf{Z} och \mathbf{Z}_N är uppenbarligen lokalt kompakta.

Varje lokalt kompakt abelsk grupp G har således ett translationsinvariant mått m , och detta mått är unikt i den bemärkelsen att om m_1 och m_2 är två translationsinvarianta mått, så finns det en positiv konstant c så att $m_1(X) = cm_2(X)$ för alla (mätbara) delmängder X . Translationsinvarianta mått kallas *Haarmått*.¹

I grupperna \mathbf{R} och \mathbf{T} är Haarmåttet det vanliga Lebesguemåttet. Det kan vara praktiskt att normalisera Haarmåttet i gruppen \mathbf{T} så att hela gruppen får mått 1, vilket förklarar förekomsten av faktorn $1/2\pi$ i definitionen av $L^1(\mathbf{T})$ -normen och fourierkoefficienterna $\hat{f}(n)$.

I diskreta grupper, som \mathbf{Z} och \mathbf{Z}_N , får man ett Haarmått m genom att låta $m(X)$ vara lika med antalet element i mängden X .

För varje givet mått, och då speciellt för Haarmåttet m , kan man på ett naturligt sätt definiera ett integralbegrepp. Definitionen av integralen

¹Efter den ungerske matematikern Alfréd Haar, 1885–1933, som introducerade måttet.

$\int_G f dm$ för komplexvärda funktioner f som är definierade på hela gruppen går i stora drag till så här:

- (i) Låt oss kalla en funktion f på G för *enkel* om den bara antar uppräknligt många funktionsvärden, dvs. om man kan skriva G som en disjunkt union $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ av uppräknligt många (mätbara) delmängder och det finns tal c_n så att $f(x) = c_n$ för alla $x \in X_n$. För reella, icke-negativa sådana enkla funktioner sätter man

$$\int_G f dm = \sum_{n=1}^{\infty} c_n m(X_n).$$

- (ii) Om $f: G \rightarrow \mathbf{R}_+$ är en godtycklig (mätbar) funktion sätter man

$$\int_G f dm = \sup \int_G g dm,$$

där supremum tas över alla enkla reellvärda funktioner g som uppfyller $0 \leq g(x) \leq f(x)$ för alla $x \in G$.

- (iii) En godtycklig reell funktion f kan skrivas som en differens $f = f_1 - f_2$ av två icke-negativa funktioner, varpå man sätter

$$\int_G f dm = \int_G f_1 dm - \int_G f_2 dm$$

förutsatt att minst en av integralerna är ändlig. I övriga fall lämnas integralen odefinierad.

- (iv) Komplexvärda funktioner delas upp i real- och imaginärdel, varpå integralen definieras på ett uppenbart sätt.

I fortsättningen använder vi den traditionella beteckningen för integraler och skriver $\int_G f(x) dx$ istället för $\int_G f dm$, då m är Haarmåttet.

Translationsinvariansen hos Haarmåttet översätts omedelbart i följande translationsinvariansegenskap hos integralen: För alla $a \in G$ och alla integrerbara funktioner f är

$$\int_G f(x - a) dx = \int_G f(x) dx.$$

I de båda diskreta grupperna \mathbf{Z} och \mathbf{Z}_N , där Haarmåttet för en enpunktsmängd är 1, blir integralen en summa. För en funktion (dvs. följd) $f = (f(n))_{n=-\infty}^{\infty}$ definierad på \mathbf{Z} är med andra ord

$$\int_{\mathbf{Z}} f(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n).$$

$L^1(G)$ och $L^2(G)$

Med $L^1(G)$ menas mängden av alla (mätbara) komplexvärda funktioner f på gruppen G som uppfyller

$$\|f\|_1 = \int_G |f(x)| dx < \infty.$$

Med den vanliga definitionen av addition av funktioner och multiplikation med skalärer blir $L^1(G)$ ett normerat vektorrum. Rummet är vidare fullständigt i den meningen att varje Cauchyföljd av funktioner i rummet har ett gränsvärde som också tillhör rummet. Fullständiga normerade vektorrum kallas *Banachrum*, så $L^1(G)$ är ett Banachrum.

För $L^1(G)$ -funktioner f och g kan man vidare definiera *faltning* $f * g$ genom formeln

$$f * g(x) = \int_G f(x-y)g(y) dy,$$

och den så erhållna funktionen $f * g$ ligger också i $L^1(G)$, och uppfyller normolikheten $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

På rummet $L^1(G)$ av funktioner har vi nu tre intressanta operationer – multiplikation med skalär, addition av funktioner och faltning – med ett antal egenskaper, exempelvis $(f+g)*h = f*h + g*h$, $f*(g*h) = (f*g)*h$ och $f*g = g*f$. Rummet $L^1(G)$ är kort sagt en kommutativ *Banachalgebra*.

Ett annat mycket viktigt rum är inre produktrummet $L^2(G)$, som består av alla (mätbara) funktioner f på gruppen som uppfyller

$$\|f\|_2 = \left(\int_G |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty$$

och med

$$\langle f, g \rangle = \int_G f(x) \overline{g(x)} dx$$

som inre produkt. Även rummet $L^2(G)$ är fullständigt, dvs. varje Cauchyföljd av funktioner i rummet har ett gränsvärde som tillhör rummet, så rummet är ett s. k. *Hilbertrum*.

9.2 Fouriertransformen

I fortsättningen antas G vara en godtycklig lokalt kompakt abelsk grupp. Generaliseringen av fourieranalysen till sådana grupper kallas harmonisk analys.

Det första steget i en sådan abstrakt analys är att finna motsvarigheterna till de harmoniska svängningarna, som i fallet $G = \mathbf{T}$ är funktionerna e^{int} . De

två egenskaper hos dessa funktioner som låter sig generaliseras till allmänna grupper är att $|e^{int}| = 1$ och $e^{imt} \cdot e^{int} = e^{i(m+n)t}$.

Karaktärer och den duala gruppen

Med en *karaktär* χ på G menas en kontinuerlig funktion $\chi: G \rightarrow \mathbf{C}$ med följande två egenskaper:

- (i) $|\chi(a)| = 1$ för alla $a \in G$;
- (ii) $\chi(a + b) = \chi(a) \cdot \chi(b)$ för alla $a, b \in G$.

Direkt ur karaktärsdefinitionen följer att karaktärerna på en grupp G har följande egenskaper:

- (a) Om χ_1 och χ_2 är karaktärer, så är också deras produkt $\chi_1 \cdot \chi_2$ en karaktär.
- (b) Den konstanta funktionen 1 är en karaktär.
- (c) Om χ är en karaktär, så är funktionen $\bar{\chi} (= 1/\chi)$ också en karaktär.

Vidare är uppenbarligen $\chi_1 \cdot \chi_2 = \chi_2 \cdot \chi_1$ och $\chi_1 \cdot (\chi_2 \cdot \chi_3) = (\chi_1 \cdot \chi_2) \cdot \chi_3$, eftersom detta är egenskaper som alla funktioner har.

Karaktärerna till en lokalt kompakt abelsk grupp G bildar med andra ord en abelsk grupp, om vi använder oss av multiplikation av funktioner som gruppoperation. Denna grupp kallas den *duala gruppen* till G och brukar betecknas \widehat{G} .

Fouriertransformen

För $f \in L^1(G)$ och $\chi \in \widehat{G}$ sätter man

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(x) \chi(-x) dx$$

vilket är väldefinierat eftersom $|\chi(-x)| = 1$, och därigenom definieras en komplexvärd funktion \hat{f} med den duala gruppen \widehat{G} som definitionsmängd. Funktionen $\hat{f}: \widehat{G} \rightarrow \mathbf{C}$ kallas *fouriertransformen* till f .

Triangelolikheten för integraler ger med en gång att

$$(9.2.1) \quad |\hat{f}(\chi)| \leq \|f\|_1$$

för alla $\chi \in \widehat{G}$. Fouriertransformen till en L^1 -funktion är med andra ord en begränsad funktion på \widehat{G} .

Kan man säga mer – är fouriertransformen \hat{f} en kontinuerlig funktion? För att besvara den frågan måste man först precisera topologin på den duala gruppen – än så länge har vi bara sagt att \widehat{G} är en grupp och inte nämnt

någonting om dess topologi. Vi inför nu en sådan genom att som omgivning i \widehat{G} ta med precis så många mängder som behövs för att fouriertransformerna till samtliga $L^1(G)$ -funktioner skall bli kontinuerliga. Man kan visa att detta definierar en topologi på den duala gruppen som gör den till en lokalt kompakt abelsk grupp, och i denna topologi blir fouriertransformen per definition kontinuerlig. Fouriertransformen \hat{f} tillhör med andra ord rummet $\mathcal{C}(\widehat{G})$ av alla kontinuerliga funktioner på \widehat{G} .

Man kan visa mer, nämligen att $\hat{f}(\chi)$ går mot 0 i oändligheten, vilket svarar mot Riemann–Lebesgues lemma i fallet $G = \mathbf{R}$. I det allmänna abstrakta fallet säger man att en funktion $\varphi \in \mathcal{C}(\widehat{G})$ går mot 0 i oändligheten om det för varje $\epsilon > 0$ finns en kompakt delmängd K av \widehat{G} så att $|\varphi(\chi)| < \epsilon$ för alla χ som inte tillhör K , och rummet av alla kontinuerliga funktioner som går mot 0 i oändligheten betecknas $\mathcal{C}_0(\widehat{G})$. (För kompakta grupper \widehat{G} blir per definition $\mathcal{C}_0(\widehat{G}) = \mathcal{C}(\widehat{G})$.)

Rummet $\mathcal{C}_0(\widehat{G})$ är en algebra med addition av funktioner, multiplikation med skalär och multiplikation av funktioner som algebraoperationer, och med normen

$$\|\varphi\| = \max_{\chi \in \widehat{G}} |\varphi(\chi)|$$

blir rummet en fullständig normerad algebra, dvs. en Banachalgebra.

Eftersom fouriertransformen \hat{f} till en $L^1(G)$ -funktion ligger i $\mathcal{C}_0(\widehat{G})$, får man en operator $\mathcal{F}: L^1(G) \rightarrow \mathcal{C}_0(\widehat{G})$ genom att sätta

$$\mathcal{F}(f) = \hat{f}.$$

De viktigaste egenskaperna hos operatoren \mathcal{F} är sammanfattade i följande sats.

Sats 9.2.1 *Fouriertransformeringsoperatoren $\mathcal{F}: L^1(G) \rightarrow \mathcal{C}_0(\widehat{G})$ har följande egenskaper:*

- (i) *Den är linjär, dvs. $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g)$.*
- (ii) *Den är multiplikativ, dvs. $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$.*
- (iii) *Den är begränsad, dvs. $\|\mathcal{F}(f)\| \leq \|f\|_1$.*
- (iv) *Den är injektiv, dvs. $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g) \Rightarrow f = g$.*
- (v) *Givet att Haarmåttet dx på G är fixerat finns det en normalisering av Haarmåttet $d\chi$ på \widehat{G} så att följande inversionsformel gäller:
För alla $L^1(G)$ -funktioner f med fouriertransform \hat{f} i $L^1(\widehat{G})$ är*

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \hat{f}(\chi) \chi(x) d\chi,$$

där likheten skall tolkas som likhet för $L^1(G)$ -funktioner, dvs. nästan överallt. Speciellt råder likhet överallt om funktionen f är kontinuerlig.

Anmärkning. Däremot är operatoren \mathcal{F} i allmänhet inte surjektiv, dvs. det finns $\mathcal{C}_0(\widehat{G})$ -funktioner som inte är fouriertransformer.

Bevis. Linearitetsegenskapen, dvs. att $(\alpha f + \beta g)^\wedge = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$, följer av att integralen är linjär, och multiplikativiteten, dvs. att $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$, följer genom omkastning av integrationsordningen precis som i fallet $G = \mathbf{R}$. Begränsningen är en omedelbar konsekvens olikheten (9.2.1).

Beviset för injektivitet och för inversionsformeln måste vi utelämna här. \square

9.3 De klassiska grupperna

Låt oss nu gå igenom våra fyra klassiska grupper för att se vad de abstrakta begreppen blir i dessa fall.

Gruppen \mathbf{T}

Karaktärerna på gruppen \mathbf{T} utgörs av funktionerna $\chi_n(t) = e^{int}$, där n är ett godtyckligt heltal. Eftersom $\chi_n(t) \cdot \chi_m(t) = \chi_{n+m}(t)$ är vidare den avbildning $\varphi: \mathbf{Z} \rightarrow \widehat{\mathbf{T}}$, som fås genom att sätta $\varphi(n) = \chi_n$, en 1-1-avbildning som respekterar gruppoperationerna i respektive grupper. Sådana avbildningar kallas (*grupp*)*isomorfier*.

Isomorfin φ innebär att man "räknar med" $\widehat{\mathbf{T}}$ som man räknar med \mathbf{Z} och gör att man kan identifiera den duala gruppen till \mathbf{T} med just gruppen \mathbf{Z} och skriva $\widehat{\mathbf{T}} = \mathbf{Z}$.

Om man normaliserar Haarmåttet på \mathbf{T} så att ett intervall av längd ℓ får mått $\ell/2\pi$, så blir fouriertransformen

$$\hat{f}(\chi_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt,$$

där dt är det vanliga (Lebesgue-)måttet på \mathbf{T} . Genom att skriva $\hat{f}(n)$ istället för $\hat{f}(\chi_n)$ har vi således återfått vår ursprungliga definition av fouriertransformen till en $L^1(\mathbf{T})$ -funktion.

Inversionsformeln

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$$

för $L^1(\mathbf{T})$ -funktioner med absolutkonvergent fourierserie (och där likheten skall uppfattas som likhet för L^1 -funktioner), som är en konsekvens av sats 4.6.2, visar att den korrekta normaliseringen av Haarmåttet på den duala gruppen \mathbf{Z} består i att ge varje punkt måttet 1.

Gruppen \mathbf{Z}

För varje reellt tal t är funktionen $\chi_t(n) = e^{itn}$ en karaktär på \mathbf{Z} , och alla karaktärer på \mathbf{Z} har den formen. Eftersom $\chi_{t_1} = \chi_{t_2}$ om $t_1 - t_2$ är en multipel av 2π , måste vi emellertid begränsa t -värdena till $\mathbf{T} = [0, 2\pi[$ för att avbildningen $\varphi: \mathbf{T} \rightarrow \widehat{\mathbf{Z}}$, definierad av att $\varphi(t) = \chi_t$, skall vara bijektiv. Avbildningen bevarar vidare gruppoperationerna och är därför en gruppisomorfi, vilket innebär att vi kan identifiera karaktärsgruppen $\widehat{\mathbf{Z}}$ med \mathbf{T} .

En L^1 -funktion f på \mathbf{Z} är detsamma som en följd $(f(n))_{n=-\infty}^{\infty}$ med absolutkonvergent summa, och med Haarmåttet på \mathbf{Z} normaliserat på det naturliga sättet, dvs. så att varje enpunktsmängd får mått 1, blir

$$\hat{f}(t) = \hat{f}(\chi_t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n) e^{-itn}.$$

Eftersom serien är likformigt konvergent, är fouriertransformen \hat{f} en kontinuerlig funktion, och genom att kasta om ordningen mellan summation och integration får vi som resultat

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}(t) e^{itn} dt$$

vilket är den konkreta versionen av inversionsformeln för gruppen \mathbf{Z} .

Gruppen \mathbf{R}

För varje reellt tal ω är funktionen $\chi_\omega(t) = e^{i\omega t}$ en karaktär på \mathbf{R} , och alla karaktärer har den formen. Genom att sätta $\varphi(\omega) = \chi_\omega$ erhåller man en isomorfi $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \widehat{\mathbf{R}}$, som gör att man kan identifiera den duala gruppen $\widehat{\mathbf{R}}$ med gruppen \mathbf{R} själv.

Fouriertransformen

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

och inversionsformeln för funktioner med fouriertransform tillhörande $L^1(\mathbf{R})$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

visar, att om man väljer det vanliga Lebesguemåttet dt som Haarmått på \mathbf{R} så måste man välja normaliseringsfaktorn $1/2\pi$ för att få "rätt" Haarmått på den duala gruppen. (Om man ändrade definitionen av Fouriertransformen genom att multiplicera integralen med $1/\sqrt{2\pi}$, så skulle man få samma normaliseringsfaktor i inversionsformeln.)

Gruppen \mathbf{Z}_N

Karaktärerna på den ändliga gruppen \mathbf{Z}_N består av de N funktionerna $\chi_k(n) = e^{2\pi i kn/N}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, och eftersom $\chi_k(n) \cdot \chi_m(n) = \chi_{k+m}(n)$, där additionen $k+m$ sker i \mathbf{Z}_N , definierar avbildningen $k \mapsto \chi_k$ en isomorfi mellan \mathbf{Z}_N och den duala gruppen $\widehat{\mathbf{Z}_N}$. Detta innebär att $\widehat{\mathbf{Z}_N} = \mathbf{Z}_N$.

Fouriertransformen till en funktion $f = (f(n))_{n=0}^{N-1}$ på \mathbf{Z}_N är

$$\hat{f}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-2\pi i kn/N},$$

vilket är den diskreta fouriertransformen som vi studerade i kapitel 6. Inversionsformeln för den diskreta fouriertransformen har formen

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}(k) e^{2\pi i kn/N}.$$

Faktorn $1/N$ visar att om man normaliserar Haarmåttet på \mathbf{Z}_N så att varje enpunktsmängd får mått 0, så skall man normalisera Haarmåttet på den duala gruppen $\widehat{\mathbf{Z}_N} = \mathbf{Z}_N$ så att hela gruppen får mått 1 för att inversionsformeln skall bli korrekt.

Dualitet

Den duala gruppen \widehat{G} till en lokalt kompakt abelsk grupp G är själv en lokalt kompakt abelsk grupp och har som sådan i sin tur också en dual grupp. Karakteriseringen ovan av de duala grupperna till våra fyra klassiska grupper \mathbf{T} , \mathbf{R} , \mathbf{Z} och \mathbf{Z}_N visar att i samtliga dessa fall är den duala gruppen till den duala gruppen av en grupp G gruppen G själv. Detta är en egenskap som gäller generellt – för alla lokalt kompakta abelska grupper G gäller att $\widehat{\widehat{G}} = G$.

Vidare är den duala gruppen till en kompakt grupp (som exempelvis grupperna \mathbf{T} och \mathbf{Z}_N) alltid diskret, och den duala gruppen till en diskret grupp (som \mathbf{Z} och \mathbf{Z}_N) alltid kompakt.

9.4 L^2 -teorin

$L^2(G)$ är (för icke-kompakta grupper G) inte en delmängd till $L^1(G)$, så därför är fouriertransformen \hat{f} inte apriori definierad för L^2 -funktioner. Däremot är naturligtvis fouriertransformen definierad för alla funktioner f som ligger i snittet $L^1(G) \cap L^2(G)$, eftersom detta är en delmängd av $L^1(G)$, och

man kan visa att det finns en *entydig linjär utvidgning* av fouriertransformen till hela $L^2(G)$. Den precisa formuleringen ges av *Plancherels sats*, som kan formuleras på följande vis.

Sats 9.4.1 *Det finns en unik bijektiv linjär operator*

$$\mathcal{F}: L^2(G) \rightarrow L^2(\widehat{G})$$

med egenskapen att $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ för alla $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Om Haarmåttet på G och den duala gruppen \widehat{G} normaliseras så att inversionsformeln i sats 9.2.1 gäller, så är operatoren \mathcal{F} en isometri, dvs.

$$(9.4.1) \quad \|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$$

för alla $f \in L^2(G)$.

Parsevals formel för grupperna \mathbf{T} , \mathbf{R} och \mathbf{Z}_N är förstas specialfall av formel (9.4.1).

Övningsuppgifter till kapitel 9

- 9.1 Låt $G = \{0, a, b, c\}$ vara en grupp med fyra element och följande additionsregler (utöver regeln $x + 0 = 0 + x = x$):

$$a + a = b + b = c + c = 0,$$

$$a + b = b + a = c,$$

$$a + c = c + a = b,$$

$$b + c = c + b = a.$$

Bestäm gruppens karaktärer och karakterisera den duala gruppen.

(G och \mathbf{Z}_4 är de enda grupperna med fyra element, och en konkret realisering av gruppen G får man genom att betrakta en kvadrat med hörn A, B, C, D , låta a beteckna spegling i diagonalen AC , b spegling i diagonalen BD och c rotation 180 grader kring kvadratens mittpunkt, samt låta $+$ betyda att operationerna utförs efter varandra.)

- 9.2 Visa att varje karaktär χ på gruppen \mathbf{R} (resp. \mathbf{T}) har formen $\chi(t) = e^{it\omega}$, där $\omega \in \mathbf{R}$ (resp. $\omega \in \mathbf{Z}$).

Kapitel 10

Wavelets på \mathbf{Z}_N

För att lagra eller överföra svartvita bilder digitalt delar man in bilderna i små rutor, kallade pixlar, med säg 200×200 rutor per cm^2 . Varje pixel tilldelas ett gråskalevärde, som beror på hur mörk den är, på en skala från 0 till 255. För att lagra en enda bild som är 1 dm^2 behöver man således lagra 4 miljoner tal i form av en vektor, där varje komponent är ett 8-bits heltal. Ett praktiskt problem är datamängdens storlek. Begränsningar i lagringsutrymme och överföringshastighet kräver att man komprimerar informationen.

Ett sätt att komprimera information, som är lagrad i form av en vektor i \mathbf{R}^n (för stora dimensionstal n), går ut på att välja en lämplig bas för \mathbf{R}^n och sedan bara behålla de säg 10% största koordinaterna hos vektorn i den valda basen. Naturligtvis kan man sedan inte rekonstruera den ursprungliga informationen exakt, men om basen väljs listigt kanske den rekonstruerade informationens kvalitet ändå är tillräckligt bra. För att metoden skall vara användbar måste vektorns koordinater också kunna beräknas på ett ekonomiskt sätt.

Waveletbaser, som vi skall studera i det här kapitlet, har dessa goda egenskaper.

10.1 Lokalisering

Vi tänker oss att N är ett stort tal och betraktar funktioner $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$. Låt I vara en konsekutiv följd av tal i \mathbf{Z}_N innehållande elementet n_0 . Vi säger att funktionen f är *lokaliserad* till omgivningen I av $n_0 \in \mathbf{Z}_N$ om funktionsvärdena $f(n)$ är lika med 0, eller åtminstone små, för alla n som inte tillhör I .

Antag nu att e_0, e_1, \dots, e_{N-1} är en ortogonal bas för $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ och att varje basvektor e_k är lokaliserad till någon omgivning I_k , dvs. att $|e_k(n)|$ är 0 eller

litet för $n \notin I_k$. Låt f vara en funktion i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ och betrakta utvecklingen

$$(10.1.1) \quad f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e_k(n),$$

där

$$(10.1.2) \quad a_k = \frac{\langle f, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \overline{e_k(n)} \|e_k\|^{-2}.$$

Om vi känner koordinaterna a_k och önskar rekonstruera funktionsvärdet $f(n)$, så kan vi förstås i summan (10.1.1) stryka alla termer där $e_k(n) = 0$ (eller $|e_k(n)|$ är försumbart litet) utan att summan ändras (resp. påverkas signifikant). Om omgivningarna I_k är "jämnt utspridda" över indexmängden $\{0, 1, \dots, N-1\}$, kan summan i (10.1.1) således för varje n ersättas av en summa med betydligt färre termer.

Av (10.1.2) framgår vidare att koordinaten a_k bara beror av funktionen f :s värden $f(n)$ för n i den omgivning I_k , där basvektorn e_k är lokaliserad. Om exempelvis $f(n) = 0$ för alla $n \in I_k$, så är $a_k = 0$ (eller åtminstone litet). Koordinaterna a_k är med andra ord 0 (eller små) för alla basfunktioner e_k som är lokaliserade till omgivningar där $f(n) = 0$.

Om två funktioner $f = \sum_k a_k e_k$ och $g = \sum_k b_k e_k$ är lika utanför en mängd A , så är därför koefficienterna a_k och b_k lika (eller nästan lika) för alla basvektorer e_k som är lokaliserade till omgivningar I_k som inte skär A . Om vi har beräknat koefficienterna a_k för funktionen f och vill beräkna koefficienterna b_k för g , så behöver vi således bara göra en ny beräkning för de koefficienter som svarar mot funktioner e_k som är lokaliserade i omgivningar som skär M . Vi sparar således mycket beräkningsarbete genom att använda oss av baser där basfunktionerna är lokaliserade till "små" omgivningar.

I $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ har vi redan studerat en viktig ortogonal bas, nämligen *fourierbasen*, som består av karaktärerna $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{N-1}$ till gruppen \mathbf{Z}_N . Denna bas är emellertid inte lokaliserad, eftersom $|\chi_k(n)| = 1$ i alla punkter n och för alla k .

Om vi utvecklar en funktion $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ i fourierbasen,

$$(10.1.3) \quad f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}(k) \chi_k(n)$$

och vill studera funktionen f i en omgivning av n_0 , behöver vi ta med samtliga termer i summan (10.1.3). Och om vi ändrar ett enda funktionsvärde $f(n)$, så måste vi också göra en ny beräkning av varje fourierkoefficient

$$\hat{f}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \overline{\chi_k(n)}.$$

Detta gör att fourierbasen inte är bra för att hantera följder av likartade funktioner, exempelvis rörliga bilder, där varje filmruta skiljer sig väldigt lite från den föregående.

Låt $\mathcal{B} = \{f_k\}_{k=0}^{N-1}$ vara en ortogonal bas för $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$. Den ”duala” basen $\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{f}_k\}_{k=0}^{N-1}$ är då på grund av Parsevals sats också en ortogonal bas för $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$. Det är brukligt att uppfatta \mathcal{B} som en bas för ”tidsrummet” och $\hat{\mathcal{B}}$ som en bas för ”frekvensrummet”.

Antag att funktionerna i de båda baserna är väl lokaliserade, vilket vi kommer att uttrycka genom att säga att funktionerna i \mathcal{B} är väl lokaliserade i såväl tids- som frekvensrummet. Då får både utvecklingen $f = \sum_{k=0}^{N-1} a_k f_k$ av en godtycklig funktion $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ i basen \mathcal{B} och utvecklingen $\hat{f} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \hat{f}_k$ av funktionens fouriertransform \hat{f} i basen $\hat{\mathcal{B}}$ de goda egenskaper som beskrivits ovan.

Standardbasen $\{\mathbf{e}_k\}_{k=0}^{N-1}$ är förstås perfekt lokaliserad i tidsrummet, eftersom varje basvektor bara är skild från 0 i en enda punkt, men den är så långt ifrån att vara lokaliserad i frekvensrummet som den kan vara, eftersom $|\hat{\mathbf{e}}_k(n)| = 1$ för alla n .

Att konstruera baser \mathcal{B} för $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ som är såväl tidsmässigt som frekvensmässigt lokaliserade är en huvuduppgiften i det här kapitlet.

10.2 Karaktärsegenskaper

I det här avsnittet skall vi studera sambandet mellan karaktärerna $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{N-1}$ till gruppen \mathbf{Z}_N och karaktärerna $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{M-1}$ till gruppen \mathbf{Z}_M i de fall då M är en delare till N .

Antag därför fortsättningsvis att M är en delare till N och kalla kvoten P så att

$$N = MP.$$

Enligt sats 6.2.2 ges karaktärerna av följande explicita formler:

$$\chi_k(n) = e^{2\pi i k n / N} \quad \text{och} \quad \eta_k(n) = e^{2\pi i k n / M},$$

och med dessa numreringar av dem gäller följande samband.

Sats 10.2.1 (i) För $k, m \in \mathbf{Z}_M$ och $p \in \mathbf{Z}_P$ är

$$\chi_{kP}(m + pM) = \eta_k(m).$$

(ii) För $n \in \mathbf{Z}_N$ är

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}_M} \chi_{kP}(n) = \begin{cases} M & \text{om } M \mid n \\ 0 & \text{om } M \nmid n \end{cases}$$

och

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}_P} \chi_{kM}(n) = \begin{cases} P & \text{om } P \mid n \\ 0 & \text{om } P \nmid n. \end{cases}$$

Bevis. (i) följer enkelt genom insättning i de explicita formelnerna för karakterärerna.

(ii) Skriv talet n på formen $n = m + pM$ med $0 \leq m \leq M - 1$ och $0 \leq p \leq P - 1$. På grund av (i) är då

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}_M} \chi_{kP}(n) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_M} \chi_{kP}(m + pM) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_M} \eta_k(m),$$

och enligt lemma 6.2.3 tillämpad på gruppen \mathbf{Z}_M är

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}_M} \eta_k(m) = \begin{cases} M, & \text{om } m = 0 \\ 0, & \text{om } m = 1, 2, \dots, M - 1. \end{cases}$$

Detta bevisar den första av formelnerna i (ii), och den andra formeln följer av symmetriskäl genom att låta M och P byta roll. \square

Sats 10.2.2 Antag att $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ och definiera $F \in \ell^2(\mathbf{Z}_M)$ genom att sätta

$$F(m) = \sum_{p \in \mathbf{Z}_P} f(m + pM) \quad \text{för } m \in \mathbf{Z}_M.$$

Då är

$$\hat{F}(k) = \hat{f}(kP)$$

för $k \in \mathbf{Z}_M$.

Bevis. Genom att utnyttja sambandet $\eta_k(m) = \chi_{kP}(m + pM)$ mellan karakterärerna till grupperna \mathbf{Z}_M och \mathbf{Z}_N samt definitionen av fouriertransform fås

$$\begin{aligned} \hat{F}(k) &= \sum_{m \in \mathbf{Z}_M} F(m) \overline{\eta_k(m)} = \sum_{m \in \mathbf{Z}_M} \left(\sum_{p \in \mathbf{Z}_P} f(m + pM) \overline{\eta_k(m)} \right) \\ &= \sum_{m \in \mathbf{Z}_M} \left(\sum_{p \in \mathbf{Z}_P} f(m + pM) \overline{\chi_{kP}(m + pM)} \right) = \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} f(n) \overline{\chi_{kP}(n)} = \hat{f}(kP). \end{aligned} \quad \square$$

10.3 Upp- och nedsampling

Vi fortsätter med vårt antagande att $N = MP$ och generaliserar nu begreppen upp- och nedsampling från avsnitt 6.6.

Definition Nedsamlingsoperatorn $D : \ell^2(\mathbf{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_M)$ och uppsamlingsoperatorn $U : \ell^2(\mathbf{Z}_M) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ definieras av att

$$Df(m) = f(mP) \quad \text{för } m \in \mathbf{Z}_M;$$

$$Ug(n) = \begin{cases} g(n/P), & \text{om } P \mid n, \quad n \in \mathbf{Z}_N, \\ 0, & \text{om } P \nmid n, \quad n \in \mathbf{Z}_N. \end{cases}$$

Uppenbarligen är $DU = I$, identitetsoperatorn på $\ell^2(\mathbf{Z}_M)$. Däremot är förstå inte UD lika med identitetsoperatorn på $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$.

Upp- och nedsamlingsoperatorernas egenskaper med avseende på translation, faltning och fouriertransformering beskrivs av följande tre satser.

Sats 10.3.1 För $k \in \mathbf{Z}_M$ är $R_k D = D R_{kP}$ och $U R_k = R_{kP} U$.

Bevis. Likheterorna följer av följande räkningar:

$$R_k Df(m) = Df(m - k) = f(mP - kP) = R_{kP} f(mP) = D R_{kP} f(m)$$

och

$$R_{kP} U g(n) = U g(n - kP) = \begin{cases} g(n/P - k), & \text{om } P \mid n \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} R_k g(n/P), & \text{om } P \mid n \\ 0, & \text{annars} \end{cases} = U R_k g(n).$$

□

Sats 10.3.2 Antag att $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ och $g, h \in \ell^2(\mathbf{Z}_M)$. Då är

- (i) $U(g * h) = U g * U h$
- (ii) $D(f * U g) = D f * g$.

Bevis. Genom att operera med den linjära operatorn U på relationen

$$g * h = \sum_{k \in \mathbf{Z}_M} g(k) R_k h$$

samt utnyttja föregående sats erhåller man

$$\begin{aligned} U(g * h) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}_M} g(k) U(R_k h) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_M} g(k) R_{kP}(Uh) = \sum_{P|n, n \in \mathbf{Z}_N} g\left(\frac{n}{P}\right) R_n(Uh) \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} U g(n) R_n(Uh) = U g * Uh. \end{aligned}$$

Detta bevisar formel (i).

För att visa formel (ii) applicerar vi istället operatoren D på likheten

$$f * U g = U g * f = \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} U g(n) R_n f = \sum_{P|n, n \in \mathbf{Z}_N} g\left(\frac{n}{P}\right) R_n f = \sum_{k \in \mathbf{Z}_M} g(k) R_{kP} f$$

samt utnyttjar sats 10.3.1, vilket ger oss det önskade resultatet

$$D(f * U g) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_M} g(k) D(R_{kP} f) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_M} g(k) R_k(D f) = g * D f = D f * g.$$

□

Sats 10.3.3 För $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$, $g \in \ell^2(\mathbf{Z}_M)$, $m \in \mathbf{Z}_M$ och $p \in \mathbf{Z}_P$ är

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \widehat{U g}(m + pM) = \hat{g}(m) \\ \text{(ii)} \quad & \widehat{D f}(m) = \frac{1}{P} \sum_{p \in \mathbf{Z}_P} \hat{f}(m + pM). \end{aligned}$$

Bevis. Likheten (i) följer av följande kalkyl:

$$\begin{aligned} \widehat{U g}(m + pM) &= \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} U g(n) \overline{\chi_n(m + pM)} = \sum_{P|n, n \in \mathbf{Z}_N} g(n/P) \overline{\chi_n(m + pM)} \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}_M} g(k) \overline{\chi_{kP}(m + pM)} = \sum_{k \in \mathbf{Z}_M} g(k) \overline{\eta_k(m)} = \hat{g}(m). \end{aligned}$$

För att visa identiteten (ii) börjar vi med att utveckla högerledet:

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \mathbf{Z}_P} \hat{f}(m + pM) &= \sum_{p \in \mathbf{Z}_P} \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} f(n) \overline{\chi_n(m + pM)} \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} \sum_{p \in \mathbf{Z}_P} f(n) \overline{\chi_n(m)} \overline{\chi_n(pM)} = \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} f(n) \overline{\chi_n(m)} \sum_{p \in \mathbf{Z}_P} \overline{\chi_n(pM)} \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} f(n) \overline{\chi_n(m)} \sum_{p \in \mathbf{Z}_P} \overline{\chi_{pM}(n)}. \end{aligned}$$

Den sistnämnda summan $\sum_{p \in \mathbf{Z}_P} \overline{\chi_{pM}(n)}$ är enligt sats 10.2.2 lika med P om talet n är delbart med P och lika med 0 för övriga n . Insättning av detta i uttrycket ovan ger därför

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \mathbf{Z}_P} \hat{f}(m + pM) &= \sum_{P|n, n \in \mathbf{Z}_N} f(n) \overline{\chi_n(m)} P = P \sum_{k \in \mathbf{Z}_M} f(kP) \overline{\chi_{kP}(m)} \\ &= P \sum_{k \in \mathbf{Z}_M} Df(k) \overline{\eta_k(m)} = P \cdot \widehat{Df}(m). \end{aligned}$$

□

10.4 Ortogonalitetsrelationer

Den enklaste av alla ON-baser i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$, standardbasen $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{N-1}$, består av alla translaten $R_k \mathbf{e}_0$ av en enda funktion \mathbf{e}_0 . I det här avsnittet ska vi undersöka vad som krävs av en funktion $u \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ för att dess translat $R_k u$ skall bilda en ON-bas. För sammansatta tal N skall vi vidare konstruera ON-baser som består av translat av typen $R_{kP} u_i$ för olika delare P till N och lämpliga funktioner u_i .

Den inre produkten i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ kan uttryckas som en faltning, och vi skall strax ge några formler som vi kommer att använda oss av flitigt i fortsättningen. Vi påminner därvid om notationen \tilde{g} för den funktion som definieras av att

$$\tilde{g}(n) = \overline{g(-n)}.$$

Notera vidare att

$$\widetilde{R_k g} = R_{-k} \tilde{g}.$$

Sats 10.4.1 *Antag att M är en delare till N och skriv som tidigare $N = MP$, och låt f, g och h vara funktioner i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$. Då är*

- (i) $\langle f, g \rangle = (f * \tilde{g})(0)$
- (ii) $\langle f, R_k g \rangle = (f * \tilde{g})(k) \quad (k \in \mathbf{Z}_N)$
- (iii) $\langle R_j f, R_k g \rangle = (f * \tilde{g})(k - j) \quad (j, k \in \mathbf{Z}_N)$
- (iv) $\langle f, R_{kP} g \rangle = D(f * \tilde{g})(k) \quad (k \in \mathbf{Z}_M)$
- (v) $\sum_{k \in \mathbf{Z}_M} \langle f, R_{kP} g \rangle R_{kP} h = D(f * \tilde{g}) * h.$

Bevis. Formel (i) följer omedelbart ur definitionen av inre produkt och faltning:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} f(n) \overline{g(n)} = \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} f(n) \tilde{g}(0 - n) = (f * \tilde{g})(0).$$

Genom att i (i) ersätta f med $R_j f$ och g med $R_k g$ får vi vidare

$$\begin{aligned}\langle R_j f, R_k g \rangle &= (R_j f * \widetilde{R_k g})(0) = (R_j f * R_{-k} \tilde{g})(0) = R_j(f * R_{-k} \tilde{g})(0) \\ &= R_j R_{-k}(f * \tilde{g})(0) = R_{j-k}(f * \tilde{g})(0) = (f * \tilde{g})(k - j),\end{aligned}$$

dvs. formel (iii), och formel (ii) är förstås ett specialfall av (iii).

Genom att i (ii) byta k mot kP får vi

$$\langle f, R_{kP} g \rangle = (f * \tilde{g})(kP) = D(f * \tilde{g})(k),$$

vilket visar (iv).

Slutligen är på grund av (iv)

$$\begin{aligned}\sum_{k \in \mathbf{Z}_M} \langle f, R_{kP} g \rangle R_{kP} h &= \sum_{k \in \mathbf{Z}_M} D(f * \tilde{g})(k) R_{kP} h = \sum_{P|n, n \in \mathbf{Z}_N} D(f * \tilde{g})\left(\frac{n}{P}\right) R_n h \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}_N} U D(f * \tilde{g})(n) R_n h = U D(f * \tilde{g}) * h.\end{aligned}$$

□

Vi kan nu formulera ett användbart kriterium för att translat till en funktion skall bilda en ON-mängd.

Sats 10.4.2 *Antag att $N = MP$ och låt v vara en funktion i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$. Då är följande tre påståenden ekvivalenta:*

- (i) $\{R_{kP} v\}_{k=0}^{M-1}$ är en ortonormerad mängd.
- (ii) $D(v * \tilde{v}) = \mathbf{e}_0$, där \mathbf{e}_0 är $(1, 0, \dots, 0)$ i $\ell^2(\mathbf{Z}_M)$.
- (iii) $\sum_{p \in \mathbf{Z}_P} |\hat{v}(m + pM)|^2 = P$ för alla $m \in \mathbf{Z}_M$.

Bevis. Enligt föregående sats är $\langle R_{jP} v, R_{kP} v \rangle = D(v * \tilde{v})(k - j)$. Translaten $\{R_{kP} v\}_{k=0}^{M-1}$ bildar därför en ortonormerad mängd i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ om och endast om

$$D(v * \tilde{v})(m) = \begin{cases} 1 & \text{för } m = 0, \\ 0 & \text{för } m = 1, 2, \dots, M - 1, \end{cases}$$

dvs. om och endast om $D(v * \tilde{v}) = \mathbf{e}_0$. Detta visar ekvivalensen mellan (i) och (ii).

Eftersom fouriertransformering är en bijektiv operation, gäller (ii) om och endast om $\widehat{D(v * \tilde{v})}(m) = \widehat{\mathbf{e}_0}(m)$ för alla $m \in \mathbf{Z}_m$. Men enligt sats 10.3.3 är

$$\widehat{D(v * \tilde{v})}(m) = \frac{1}{P} \sum_{p \in \mathbf{Z}_P} \widehat{(v * \tilde{v})}(m + pM) = \frac{1}{P} \sum_{p \in \mathbf{Z}_P} |\hat{v}(m)|^2,$$

medan $\widehat{\mathbf{e}_0}(m) = 1$ för alla m . Detta visar att de båda påståendena (ii) och (iii) är ekvivalenta. □

Genom att i föregående sats speciellt välja $M = N$ får vi följande nödvändiga och tillräckliga villkor för att translaten till en funktion i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ skall bilda en ON-bas.

Korollarium 10.4.3 Låt $u \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$. Mängden $\{R_k u\}_{k=0}^{N-1}$, bestående av de N translaten till u , är en ON-bas för $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ om och endast om $|\hat{u}(n)| = 1$ för alla $n \in \mathbf{Z}_N$.

Sats 10.4.4 Antag att $N = MP$, låt v vara en funktion i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ vars translat $\{R_{kP}v\}_{k=0}^{M-1}$ bildar en ortonormerad mängd, och låt V beteckna det linjära delrum som spänns upp av translaten. Då gäller följande påståenden.

(i) Den ortogonala projektionen $\mathcal{P}: \ell^2(\mathbf{Z}_N) \rightarrow V$ ges av formeln

$$\mathcal{P}f = UD(f * \tilde{v}) * v.$$

(ii) En funktion $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ tillhör V om och endast om $f = UD(f * \tilde{v}) * v$.

(iii) Antag $f \in V$ och sätt $x = D(f * \tilde{v})$. Då har f koordinaterna $(x(k))_{k=0}^{M-1}$ med avseende på basen $(R_{kP}v)_{k=0}^{M-1}$.

(iv) För varje funktion $h \in \ell^2(\mathbf{Z}_M)$ ligger funktionen $Uh * v$ i V .

(v) Avbildningen $T: \ell^2(\mathbf{Z}_M) \rightarrow V$, som definieras genom att sätta

$$Th = Uh * v,$$

är en isometri, vars invers uppfyller $T^{-1}f = D(f * \tilde{v})$ för alla $f \in V$.

Bevis. Den ortogonala projektionen ges av formeln

$$\mathcal{P}f = \sum_{k \in \mathbf{Z}_M} \langle f, R_{kP}v \rangle R_{kP}v,$$

så påstående (i) följer omedelbart av identiteten (v) i sats 10.4.1.

Påstående (ii) är en omedelbar konsekvens av (i) eftersom f tillhör V om och endast om $\mathcal{P}f = f$.

Den k :te koordinaten för en funktion $f \in V$ kan på grund av sats 10.4.1 skrivas som

$$\langle f, R_{kP}v \rangle = D(f * \tilde{v})(k) = x(k),$$

vilket bevisar (iii).

För $f = Uh * v$ är på grund av satserna 10.3.2 och 10.4.2

$$\begin{aligned} UD(f * \tilde{v}) * v &= UD(Uh * v * \tilde{v}) * v = U(h * D(v * \tilde{v})) * v \\ &= U(h * \mathbf{e}_0) * v = Uh * v = f, \end{aligned}$$

och enligt påstående (ii) betyder detta att $Uh * v$ tillhör delrummet V .

Att T är en isometri följer av räkningen

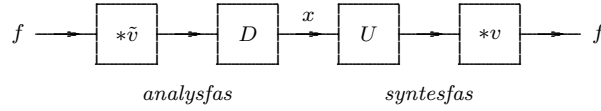
$$\begin{aligned}
 \langle Th_1, Th_2 \rangle &= \langle Uh_1 * v, Uh_2 * v \rangle = (Uh_1 * v) * \widetilde{(Uh_2 * v)}(0) \\
 &= (Uh_1 * v * U\tilde{h}_2 * \tilde{v})(0) = (Uh_1 * U\tilde{h}_2) * (v * \tilde{v})(0) \\
 &= U(h_1 * \tilde{h}_2) * (v * \tilde{v})(0) = U(h_1 * \tilde{h}_2) * (v * \tilde{v})(0 \cdot P) \\
 &= D(U(h_1 * \tilde{h}_2) * (v * \tilde{v}))(0) = ((h_1 * \tilde{h}_2) * D(v * \tilde{v}))(0) \\
 &= (h_1 * \tilde{h}_2 * \mathbf{e}_0)(0) = (h_1 * \tilde{h}_2)(0) = \langle h_1, h_2 \rangle.
 \end{aligned}$$

Slutligen är

$$D(Th * \tilde{v}) = D(Uh * v) * \tilde{v} = D(Uh * v * \tilde{v}) = h * D(v * \tilde{v}) = h * \mathbf{e}_0 = h,$$

vilket visar att inversen till T har den i (v) angivna formen. \square

Förutom att beskriva hur koordinaterna x till en funktion $f \in V$ fås som en faltning ger sats 10.4.4 också ett recept för att rekonstruera funktionen f ur koordinatfunktionen x med hjälp av en faltning. Hela proceduren, analysfasen att bestämma koordinaterna x och syntesfasen att bestämma f ur x , beskrivs schematiskt av följande figur.



Figur 10.1.

Antag att $N = MP$ och att v och w är två funktioner i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$. Sats 10.4.2 talar om när translaten $\{R_{kPv}\}_{k \in \mathbf{Z}_M}$ och $\{R_{kPw}\}_{k \in \mathbf{Z}_M}$ är ON-system, men när är deras union ett ON-system? Svaret ges av nästa sats.

Sats 10.4.5 *Antag att v och w är två funktioner i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$, och låt V och W vara de linjära delrum som spänns upp av translaten R_{kPv} resp. R_{kPw} . Då är följande villkor ekvivalenta:*

- (i) *Delrummen V och W är ortogonala mot varandra.*
- (ii) *$D(v * \tilde{w}) = 0$*
- (iii) *$\sum_{p \in \mathbf{Z}_P} \hat{v}(m + pM) \overline{\hat{w}(m + pM)} = 0$ för $m = 0, 1, \dots, M - 1$.*

Bevis. Delrummen är ortogonala om och endast om de genererande vektorerna är ortogonala mot varandra, dvs. om och endast om

$$\langle R_{jPv}, R_{kPw} \rangle = 0$$

för $j, k \in \mathbf{Z}_M$. Men $\langle R_{jP}v, R_{kP}w \rangle = D(v * \tilde{w})(k - j)$, så de aktuella inre produkterna är noll för alla $j, k \in \mathbf{Z}_M$ om och endast om $D(v * \tilde{w}) = 0$.

Ekvivalensen mellan (ii) och (iii) följer genom Fouriertransformering. \square

Genom att kombinera satserna 10.4.2 och 10.4.5 erhåller vi följande resultat:

Sats 10.4.6 *Antag att $N = MP$, och låt v_0, v_1, \dots, v_{M-1} vara funktioner i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$. Sätt*

$$\mathcal{B} = \{R_{kP}v_0\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{kP}v_1\}_{k=0}^{M-1} \cup \dots \cup \{R_{kP}v_{P-1}\}_{k=0}^{M-1}.$$

Då är följande tre påståenden ekvivalenta:

- (i) \mathcal{B} är en ON-bas för $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$.
- (ii) För varje $m \in \mathbf{Z}_m$ bildar de P stycken funktionerna

$$p \mapsto \frac{1}{\sqrt{P}} \hat{v}_i(m + pM), \quad i = 0, 1, \dots, P-1,$$

en ON-bas för rummet $\ell^2(\mathbf{Z}_P)$.

(iii) Matriserna

$$\begin{aligned} A(m) &= \frac{1}{\sqrt{P}} \left[\hat{v}_i(m + pM) \right]_{p,i=0}^{P-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{P}} \begin{bmatrix} \hat{v}_0(m) & \dots & \hat{v}_{P-1}(m) \\ \hat{v}_0(m+M) & \dots & \hat{v}_{P-1}(m+M) \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{v}_0(m+(P-1)M) & \dots & \hat{v}_{P-1}(m+(P-1)M) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

är unitära för alla m .

Om \mathcal{B} är en bas, så är vidare

$$(10.4.1) \quad f = \sum_{j=0}^{P-1} U D(f * \tilde{v}_j) * v_j.$$

för alla funktioner $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$.

Matriserna $A(m)$ kallas *systemmatriserna* till funktionerna v_0, v_1, \dots, v_{P-1} .

Bevis. \mathcal{B} är en ON-bas om och endast om dels translaten $\{R_{kP}v_j\}_{k=0}^{M-1}$ till varje funktion v_j är en ON-följd, dels de linjära delrum V_j som spänns upp

av dessa translat är parvis ortogonala. Ekvivalensen mellan (i) och (ii) följer därför direkt av satserna 10.4.2 och 10.4.5.

En kvadratisk matris av ordning P kallas unitär om dess kolonner bildar en ON-bas för \mathbf{C}^P med avseende på standardskalärprodukten. Påstående (iii) är därför bara en omformulering av (ii).

Om \mathcal{B} är en ON-bas för $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$, så är vidare $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ en ortogonal direkt summa av delrummen $V_j = \text{span}\{R_{kP} \mid k = 0, 1, \dots, M-1\}$. Om \mathcal{P}_j betecknar den ortogonala projektionen på V_j , så är därför $f = \sum_{j=0}^{P-1} \mathcal{P}_j f$ för varje $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$, och enligt sats 10.4.4 är $\mathcal{P}_j f = UD(f * \tilde{v}_j) * v_j$. Detta bevisar formel (10.4.1). \square

Om vi sätter

$$x_j = D(f * \tilde{v}_j)$$

så innehåller vektorerna x_0, x_1, \dots, x_{P-1} koordinaterna för f med avseende på basen \mathcal{B} , och vi kan skriva (10.4.1) på formen

$$f = \sum_{j=0}^{P-1} Ux_j * v_j.$$

10.5 Waveletbaser

Vi skall nu använda resultaten i föregående avsnitt för att konstruera speciella ON-baser i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ i de fall de N är delbart med någon tvåpotens 2^p .

Vi kommer därvid att behöva arbeta med ned- och uppsamlingsoperatorerna mellan $\ell^2(\mathbf{Z}_{N/2^{j-1}})$ och $\ell^2(\mathbf{Z}_{N/2^j})$ för $j = 1, 2, \dots, p$, och för att inte i onödan tynga beteckningarna kommer vi att använda samma symbol D för alla nedsamlingsoperatorerna $\ell^2(\mathbf{Z}_{N/2^{j-1}}) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_{N/2^j})$ och samma symbol U för alla uppsamlingsoperatorerna $\ell^2(\mathbf{Z}_{N/2^j}) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_{N/2^{j-1}})$. Operatorernas definitionsrum kommer alltid att framgå av sammanhanget.

Vidare kommer vi att använda D^j som beteckning för nedsamlingsoperatorn $\ell^2(\mathbf{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_{N/2^j})$ och U^j som beteckning för motsvarande uppsamlingsoperator $\ell^2(\mathbf{Z}_{N/2^j}) \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z}_N)$.

Beteckningarna är naturliga eftersom vi kan uppfatta D^j som en produkt $DD \cdots D$ av j stycken nedsamlingsoperatorer, där den sistnämnda operatorn D går från $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ till $\ell^2(\mathbf{Z}_{N/2})$, den nästsistnämnda går från $\ell^2(\mathbf{Z}_{N/2})$ till $\ell^2(\mathbf{Z}_{N/2^2})$, osv, och den första i ordningen från $\ell^2(\mathbf{Z}_{N/2^{j-1}})$ till $\ell^2(\mathbf{Z}_{N/2^j})$. På motsvarande sätt kan U^j på ett naturligt sätt uppfattas som en produkt $UU \cdots U$ av j stycken uppsamlingsoperatorer.

Vi kompletterar slutligen våra beteckningar genom att låta U^0 och D^0 stå för identitetsavbildningen på $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$.

Observera att med ovanstående beteckningar blir

$$D^j = DD^{j-1} \quad \text{och} \quad U^j = U^{j-1}U;$$

där operatoren D går från $\ell^2(\mathbf{Z}_{N/2^{j-1}})$ till $\ell^2(\mathbf{Z}_{N/2^j})$, medan förstås U går åt motsatta hållet.

De ON-baser som vi har i åtanke beskrivs i följande definition

Definition Antag att N är delbart med 2^p , där p är ett positivt heltal. En ON-bas \mathcal{B} för $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ kallas en *p:te etappens waveletbas* om den har formen

$$\mathcal{B} = \{R_{2^k}f_1\}_{k=0}^{N/2-1} \cup \{R_{4^k}f_2\}_{k=0}^{N/4-1} \cup \dots \cup \{R_{2^p k}f_p\}_{k=0}^{N/2^p-1} \cup \{R_{2^p k}g_p\}_{k=0}^{N/2^p-1},$$

där $f_1, f_2, \dots, f_p, g_p$ är funktioner i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$. Dessa funktioner kallas waveletbasens *generatorer*.

Första etappens waveletbaser

Vi kommer att göra en iterativ konstruktion av våra waveletbaser och börjar därför med första etappens waveletbaser. För jämna tal N genererar funktionerna v och w enligt sats 10.4.6 en första etappens waveletbas

$$\mathcal{B} = \{R_{2^k}v\}_{k=0}^{N/2-1} \cup \{R_{2^k}w\}_{k=0}^{N/2-1},$$

om och endast om systemmatriserna

$$A(m) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \hat{v}(m) & \hat{w}(m) \\ \hat{v}(m + N/2) & \hat{w}(m + N/2) \end{bmatrix}$$

är unitära för $m = 0, 1, \dots, N/2 - 1$. I så fall är vidare

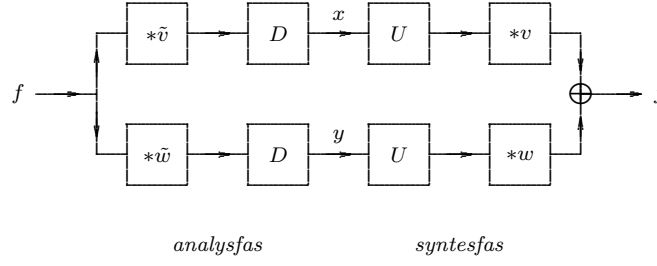
$$f = UD(f * \tilde{v}) * v + UD(f * \tilde{w}) * w,$$

och om vi sätter

$$x = D(f * \tilde{v}) \quad \text{och} \quad y = D(f * \tilde{w}),$$

så är $(x(0), x(1), \dots, x(N/2 - 1), y(0), y(1), \dots, y(N/2 - 1))$ koordinaterna för funktionen f i basen \mathcal{B} , dvs.

$$f = \sum_{k=0}^{N/2-1} x(k)R_{2^k}v + \sum_{k=0}^{N/2-1} y(k)R_{2^k}w.$$



Figur 10.2.

Figur 10.2 beskriver schematiskt analysfasen att bestämma koordinaterna x och y till f genom två faltningar, och syntesfasen att rekonstruera f från koordinaterna x och y genom två faltningar.

En funktion $w \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$, vars jämna translater bildar en ortonormerad mängd, kan alltid kompletteras med en funktion v så att paret tillsammans genererar en första etappens waveletbas. Följande sats visar hur man kan göra.

Sats 10.5.1 *Antag att N är jämnt och att $w \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ är en funktion med egenskapen att $\{R_{2^k}w\}_{k=0}^{N/2-1}$ är en ortonormerad mängd. Då genererar w tillsammans med funktionen*

$$v = R_1(\chi_{N/2}\tilde{w})$$

en första etappens waveletbas.

Här är förstas $\chi_{N/2}$ karaktären $\chi_{N/2}(n) = (-1)^n$, vilket innebär att

$$v(n) = (-1)^{n-1}\overline{w(1-n)}$$

för alla $n \in \mathbf{Z}_N$.

Bevis. Fouriertransformering ger

$$\mathcal{F}v = \overline{\chi_1}\mathcal{F}(\chi_{N/2}\tilde{w}) = \overline{\chi_1}R_{N/2}(\mathcal{F}\tilde{w}) = \overline{\chi_1}R_{N/2}(\overline{\mathcal{F}w}).$$

Detta innebär att

$$\hat{v}(n) = \overline{\chi_1(n)\hat{w}(n-N/2)} = \overline{\chi_1(n)\hat{w}(n+N/2)}$$

och att

$$\hat{v}(n+N/2) = \overline{\chi_1(n+N/2)\hat{w}(n)} = -\overline{\chi_1(n)\hat{w}(n)}.$$

Följaktligen är

$$\begin{aligned} |v(n)|^2 + |v(n + N/2)|^2 &= |\overline{\chi_1(n) \hat{w}(n + N/2)}|^2 + |-\overline{\chi_1(n) \hat{w}(n)}|^2 \\ &= |w(n + N/2)|^2 + |w(n)|^2 = 2, \end{aligned}$$

där den sista likheten gäller på grund av sats 10.4.2, och

$$\begin{aligned} \hat{v}(n) \overline{\hat{w}(n)} + \hat{v}(n + N/2) \overline{\hat{w}(n + N/2)} \\ = \overline{\chi_1(n) \hat{w}(n + N/2)} \overline{\hat{w}(n)} - \overline{\chi_1(n) \hat{w}(n)} \overline{\hat{w}(n + N/2)} = 0. \end{aligned}$$

Systemmatriserna $A(n)$ till funktionerna v och w är därför unitära för alla n , vilket enligt sats 10.4.6 medför att de genererar en första etappens waveletbas. \square

Här följer nu några exempel på första etappens waveletbaser.

EXEMPEL 10.5.1 (Första etappens *Haarbas*) Antag att N är jämnt, och definiera $v, w \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ genom att sätta

$$\begin{aligned} v &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0 \right) \\ w &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0 \right). \end{aligned}$$

I det här fallet verifierar man enkelt direkt att funktionerna v och w genererar en ON-bas $\mathcal{B} = \{R_{2k}v\}_{k=0}^{N/2-1} \cup \{R_{2k}w\}_{k=0}^{N/2-1}$ för $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$.

Alternativt kan man förstås visa att systemmatriserna är unitära. Eftersom

$$\chi_{N/2}(n) = (-1)^n$$

är speciellt $\chi_1(n + N/2) = \chi_1(n)\chi_1(N/2) = \chi_1(n)\chi_{N/2}(1) = -\chi_1(n)$, och det följer att

$$\begin{aligned} \hat{v}(n) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \overline{\chi_1(n)}), & \hat{w}(n) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \overline{\chi_1(n)}), \\ \hat{v}(n + N/2) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \overline{\chi_1(n)}), & \hat{w}(n + N/2) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \overline{\chi_1(n)}). \end{aligned}$$

Systemmatriserna har därför formen

$$A(n) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \overline{\chi_1(n)} & 1 + \overline{\chi_1(n)} \\ 1 + \overline{\chi_1(n)} & 1 - \overline{\chi_1(n)} \end{bmatrix},$$

och dessa matriser är som man lätt kontrollerar unitära för alla n . \square

EXEMPEL 10.5.2 (Första etappens *Shannonbas*) Antag att talet N är delbart med 4, och sätt

$$A = \{\frac{N}{4}, \frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{3N}{4} - 2, \frac{3N}{4} - 1\} \quad \text{och} \\ B = \mathbf{Z}_N \setminus A = \{0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1\} \cup \{\frac{3N}{4}, \frac{3N}{4} + 1, \dots, N - 1\}.$$

Notera att A och B båda innehåller $N/2$ element och att

$$(10.5.1) \quad n \in A \Leftrightarrow n + N/2 \in B.$$

Definiera nu funktionerna $v, w \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ genom att sätta

$$\hat{v}(n) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{för } n \in A \\ 0 & \text{för } n \in B \end{cases} \quad \text{och} \quad \hat{w}(n) = \begin{cases} 0 & \text{för } n \in A \\ \sqrt{2} & \text{för } n \in B. \end{cases}$$

På grund av ekvivalensen (10.5.1) blir systemmatriserna

$$A(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \hat{v}(n) & \hat{w}(n) \\ \hat{v}(n + N/2) & \hat{w}(n + N/2) \end{bmatrix}$$

lika med

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

för $0 \leq n \leq N/4 - 1$ resp. $N/4 \leq n \leq N/2 - 1$. Systemmatriserna är således unitära för alla $n \in \mathbf{Z}_{N/2}$, vilket innebär att v och w genererar en första etappens waveletbas. Denna bas kallas *Shannonbasen*.

Vi beräknar nu v genom invers fouriertransformering:

$$v = \check{\mathcal{F}}v = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{v}(k) \chi_k = \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{k=N/4}^{3N/4-1} \chi_k = \frac{\sqrt{2}}{N} \chi_{N/4} \sum_{k=0}^{N/2-1} \chi_k$$

Eftersom $\chi_k(n) = e^{2\pi i k n / N}$ och speciellt $\chi_{N/4}(n) = e^{\pi i n / 2}$, är således

$$v(n) = \frac{\sqrt{2}}{N} e^{\pi i n / 2} \sum_{k=0}^{N/2-1} e^{2\pi i k n / N},$$

och genom att summera den geometriska serien fås

$$\begin{aligned} v(0) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{och} \\ v(n) &= \frac{\sqrt{2}}{N} e^{\pi i n / 2} \frac{e^{\pi i n} - 1}{e^{2\pi i n / N} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{N} \frac{e^{-\pi i n / 2} - e^{\pi i n / 2}}{e^{\pi i n / N} (e^{\pi i n / N} - e^{\pi i n / N})} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{N} e^{-i\pi n / N} \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{\sin \frac{\pi n}{N}} = -\frac{\sqrt{2}}{N} \sin \frac{\pi n}{2} \left(\cot \frac{\pi n}{N} - i \right) \end{aligned}$$

för $n = 1, 2, \dots, N - 1$.

För att bestämma w noterar vi att

$$\hat{v}(n) + \hat{w}(n) = \sqrt{2} = \sqrt{2} \hat{e}_0(n)$$

för alla n , vilket betyder att $v + w = \sqrt{2} \mathbf{e}_0$. Således är $w(0) = \sqrt{2} - v(0)$ och $w(n) = -v(n)$ för $1 \leq n \leq N - 1$, vilket ger oss följande explicita formler:

$$w(0) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$w(n) = \frac{\sqrt{2}}{N} \sin \frac{\pi n}{2} \left(\cot \frac{\pi n}{N} - i \right)$$

för $n = 1, 2, \dots, N - 1$.

Per definition är $|\hat{v}(n)| = 0$ för frekvenserna n i mängden B , dvs. för de $N/2$ lägsta frekvenserna i frekvensområdet $0 \leq n \leq N - 1$. Funktionen v innehåller med andra ord inga frekvenser från den lägre halvan av frekvensskalan, och eftersom $\widehat{R_{2k}v}(n) = \bar{\chi}_{2k}(n) \hat{v}(n)$ gäller detsamma för alla translaten $R_{2k}v$. På motsvarande sätt innehåller w och dess translat bara frekvenser från den lägre halvan av frekvensskalan. I representationen

$$f = \sum_{k=0}^{N/2-1} \langle f, R_{2k}v \rangle R_{2k}v + \sum_{k=0}^{N/2-1} \langle f, R_{2k}w \rangle R_{2k}w$$

av en godtycklig funktion $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ är således den högre halvan frekvenser hos f inkluderad i den första summan och den lägre halvan frekvenser inkluderad i den andra summan. \square

Shannonbasen är enkel men den har en nackdel – basfunktionerna är inte reella. Koefficienterna i utvecklingen av en reell funktion f kommer därför att vara komplexa tal. Om man, vilket är fallet i flertalet tillämpningar, arbetar med reella funktioner är det en fördel om basfunktionerna är reella.

En funktion f är reell om och endast om $f = \bar{f}$, dvs. om och endast om

$$(10.5.2) \quad \hat{f}(n) = \hat{\bar{f}}(n) = \overline{\hat{f}(-n)} = \overline{\hat{f}(N - n)}$$

för alla $n \in \mathbf{Z}_N$. För generatorerna v och w i Shannonbasen är detta villkor uppfyllt utom för $n = N/4$ och $n = 3N/4$. Genom att modifiera definitionen av $\hat{v}(n)$ och $\hat{w}(n)$ för dessa värden på n kan vi tillverka en waveletbas bestående av reella funktioner.

EXEMPEL 10.5.3 (Första etappens *reella Shannonbas*) Antag att N är delbart med 4, och definiera $v, w \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ genom att sätta

$$\hat{v}(n) = \begin{cases} 0 & \text{för } n = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \text{ och } n = \frac{3N}{4} + 1, \frac{3N}{4} + 1, \dots, N - 1 \\ 1 & \text{för } n = \frac{N}{4} \text{ och } n = \frac{3N}{4} \\ \sqrt{2} & \text{för } n = \frac{N}{4} + 1, \frac{N}{4} + 2, \dots, \frac{3N}{4} - 2, \frac{3N}{4} - 1 \end{cases}$$

och

$$\hat{w}(n) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{för } n = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \text{ och } n = \frac{3N}{4} + 1, \frac{3N}{4} + 1, \dots, N - 1 \\ i & \text{för } n = \frac{N}{4} \\ -i & \text{för } n = \frac{3N}{4} \\ 0 & \text{för } n = \frac{N}{4} + 1, \frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{3N}{4} - 2, \frac{3N}{4} - 1. \end{cases}$$

Man verifierar omedelbart att \hat{v} och \hat{w} uppfyller symmetrivillkor (10.5.2), så funktionerna v och w är reella. För $n = N/4$ är systemmatrisen

$$A(N/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}$$

unitär. För alla övriga n i intervallet $0 \leq n \leq N/2 - 1$ är systemmatrisen förstås också unitär, eftersom den är identisk med systemmatrisen till funktionerna i Shannonbasen. De reella funktionerna v och w genererar således en första etappens waveletbas.

De höga och de låga frekvenserna är fortfarande fördelade mellan v och w men med en överlappning då $n = N/4$ eller $3N/4$. \square

Övning. Bestäm explicita uttryck för funktionerna u och v i den reella Shannonbasen.

Iterationssteget

Antag att N är delbart med 2^p , där $p \geq 2$. En första etappens waveletbas är, som namnet antyder, bara första steget i konstruktionen av en waveletbas för $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$.

Den iterativa konstruktionen fortskrider nu på följande vis. Antag att vi redan konstruerat en $p-1$:a etappens waveletbas med $f_1, f_2, \dots, f_{p-1}, g_{p-1}$ som generatorer. Sätt

$$\begin{aligned} W_j &= \text{span}\{R_{2^j k} f_j \mid k = 0, 1, \dots, N/2^j - 1\}, & j = 1, 2, \dots, p-1 \\ V_{p-1} &= \text{span}\{R_{2^j k} g_{p-1} \mid k = 0, 1, \dots, N/2^{p-1} - 1\}. \end{aligned}$$

Rummet $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ är då per definition en ortogonal direkt summa av delrummen W_1, W_2, \dots, W_{p-1} och V_{p-1} :

$$\ell^2(\mathbf{Z}_N) = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_{p-1} \oplus V_{p-1}.$$

Betrakta nu delrummet V_{p-1} ; enligt sats 10.4.4 är avbildningen T , som definieras av att

$$Th = U^{p-1}h * g_{p-1},$$

en isomorfi mellan $\ell^2(\mathbf{Z}_{N/2^{p-1}})$ och V_{p-1} . Eftersom isomorfismer avbildar ON-baser på ON-baser kommer därför bilden under T av en ON-bas i $\ell^2(\mathbf{Z}_{N/2^{p-1}})$ att vara en ON-bas för V_{p-1} .

Antag därför att funktionerna v_p och w_p i $\ell^2(\mathbf{Z}_{N/2^{p-1}})$ är generatorer för en första etappens waveletbas i $\ell^2(\mathbf{Z}_{N/2^{p-1}})$, dvs. att

$$\{R_{2^k}v_p\}_{k=0}^{N/2^p-1} \cup \{R_{2^k}w_p\}_{k=0}^{N/2^p-1}$$

är en ON-bas för $\ell^2(\mathbf{Z}_{N/2^{p-1}})$. Då är således bilden under avbildningen T , dvs.

$$\{U^{p-1}R_{2^k}v_p * g_{p-1}\}_{k=0}^{N/2^p-1} \cup \{U^{p-1}R_{2^k}w_p * g_{p-1}\}_{k=0}^{N/2^p-1}$$

en ON-bas för V_{p-1} .

Notera nu att $U^{p-1}R_{2^k} = R_{2^pk}U^{p-1}$. Genom att sätta

$$f_p = U^{p-1}v_p * g_{p-1} \quad \text{och} \quad g_p = U^{p-1}w_p * g_{p-1}$$

får vi alltså funktioner f_p och g_p i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ med egenskapen att

$$\{R_{2^pk}f_p\}_{k=0}^{N/2^p-1} \cup \{R_{2^pk}g_p\}_{k=0}^{N/2^p-1}$$

är en ON-bas för delrummet V_{p-1} . Om vi kompletterar denna ON-bas för V_{p-1} med ON-baserna för delrummen W_1, W_2, \dots, W_{p-1} får vi således en ON-bas för hela $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$. Följaktligen genererar funktionerna f_1, f_2, \dots, f_p och g_p en p :te etappens waveletbas för $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$.

För att kunna sammanfatta ovanstående konstruktion på ett bekvämt sätt behöver vi först följande definition.

Definition Antag att N är delbart med 2^p . En följd $v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_p, w_p$ av funktioner kallas en p :te etappens waveletfilterföljd om för varje j funktionerna v_j och w_j tillhör $\ell^2(\mathbf{Z}_{N/2^{j-1}})$ och där genererar en första etappens waveletbas.

Konstruktionen ovan kan nu formuleras så här.

Sats 10.5.2 Antag att N är delbart med 2^p , och att $v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_p, w_p$ är en p :te etappens waveletfilterföljd. Definiera funktionerna f_1, f_2, \dots, f_p och g_1, g_2, \dots, g_p i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ rekursivt genom att sätta

$$g_0 = \mathbf{e}_0, \\ f_j = g_{j-1} * U^{j-1}v_j \quad \text{och} \quad g_j = g_{j-1} * U^{j-1}w_j$$

för $j = 1, 2, \dots, p$. Då är

$$\mathcal{B} = \{R_{2^k}f_1\}_{k=0}^{N/2-1} \cup \{R_{4^k}f_2\}_{k=0}^{N/4-1} \cup \dots \cup \{R_{2^{p-k}}f_p\}_{k=0}^{N/2^p-1} \cup \{R_{2^{p-k}}g_p\}_{k=0}^{N/2^p-1}$$

en p :te etappens waveletbas för $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$.

Bevis. Följer omedelbart av konstruktionen ovan. □

Den rekursiva definitionen innebär att

$$\begin{aligned} f_1 &= g_0 * U^0v_1 = v_1, & g_1 &= g_0 * U^0w_1 = w_1, \\ f_2 &= g_1 * U^1v_2 = w_1 * U^1v_2, & g_2 &= g_1 * U^1w_2 = w_1 * U^1w_2, \\ f_3 &= g_2 * U^2v_3 = w_1 * U^1w_2 * U^2v_3, & g_3 &= g_2 * U^2w_3 = w_1 * U^1w_2 * U^2w_3, \end{aligned}$$

etc. och allmänt

$$\begin{aligned} f_j &= w_1 * U^1w_2 * U^2w_3 * \dots * U^{j-2}w_{j-1} * U^{j-1}v_j, \\ g_j &= w_1 * U^1w_2 * U^2w_3 * \dots * U^{j-2}w_{j-1} * U^{j-1}w_j. \end{aligned}$$

Det är ofta enklast att beräkna funktionerna $f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_p$ i sats 10.5.2 via deras fouriertransformer. Vi har nämligen

Sats 10.5.3 Låt funktionerna f_1, f_2, \dots, f_p och g_1, g_2, \dots, g_p i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ vara definierade som i sats 10.5.2. Då är

$$\begin{aligned} \hat{f}_j(n) &= \hat{w}_1(n) \hat{w}_2(n) \dots \hat{w}_{j-1}(n) \hat{v}_j(n) \quad \text{och} \\ \hat{g}_j(n) &= \hat{w}_1(n) \hat{w}_2(n) \dots \hat{w}_{j-1}(n) \hat{w}_j(n) \end{aligned}$$

för $j = 1, 2, \dots, p$ och alla $n \in \mathbf{Z}_N$.

Bevis. Genom att utgå från de rekursiva definitionerna av f_j och g_j , fouriertransformera samt utnyttja sats 10.3.3, erhåller man följande rekursiva samband.

$$\begin{aligned} \hat{f}_j(n) &= \hat{g}_{j-1}(n) \widehat{(U^{j-1}v_j)}(n) = \hat{g}_{j-1}(n) \hat{v}_j(n), \\ \hat{g}_j(n) &= \hat{g}_{j-1}(n) \widehat{(U^{j-1}w_j)}(n) = \hat{g}_{j-1}(n) \hat{w}_j(n). \end{aligned}$$

Eftersom $\hat{g}_0(n) = \hat{\mathbf{e}}_0(n) = 1$, följer nu formlerna i satsen genom induktion. □

Nästa sats beskriver hur man beräknar koordinaterna rekursivt.

Sats 10.5.4 *Antag att N är delbart med 2^p , och låt $v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_p, w_p$ vara en p :te etappens waveletfilterföljd. Definiera funktionerna $f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_p$ och waveletbasen \mathcal{B} som i sats 10.5.2.*

Definiera för $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ funktionerna $x_j, y_j \in \ell^2(\mathbf{Z}_{N/2^j})$ rekursivt genom att sätta

$$y_0 = f, \quad x_j = D(y_{j-1} * \tilde{v}_j) \quad \text{och} \quad y_j = D(y_{j-1} * \tilde{w}_j)$$

för $j = 1, 2, \dots, p$. Då är

$$f = \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^{N/2^j-1} x_j(k) R_{2^j k} f_j + \sum_{k=0}^{N/2^p-1} x_p(k) R_{2^p k} g_p,$$

vilket innebär att f har koordinaterna

$$(x_1(0), x_1(1), \dots, x_1(\frac{N}{2} - 1), x_2(0), x_2(1), \dots, x_2(\frac{N}{4} - 1), \dots, \\ x_p(0), x_p(1), \dots, x_p(\frac{N}{2^p} - 1), y_p(0), y_p(1), \dots, y_p(\frac{N}{2^p} - 1))$$

i basen \mathcal{B} .

Bevis. Koordinaterna framför basvektorerna $R_{2^j k} f_j$ och $R_{2^p k} g_p$ är enligt sats 10.4.1 lika med $D^j(f * \tilde{f}_j)(k)$ resp. $D^p(f * \tilde{g}_p)(k)$. Satsen följer därför om vi visar att

$$(10.5.3) \quad x_j = D^j(f * \tilde{f}_j) \quad \text{och} \quad y_j = D^j(f * \tilde{g}_j)$$

för $j = 1, 2, \dots, p$.

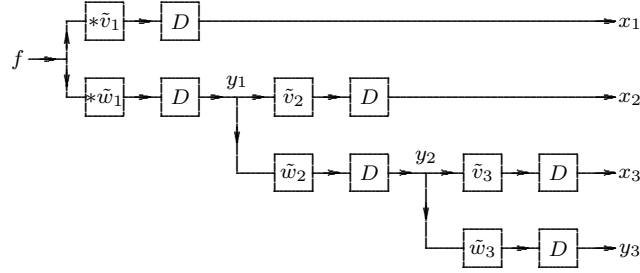
Eftersom $f_1 = v_1$ och $g_1 = u_1$, är

$$x_1 = D(y_0 * \tilde{v}_1) = D(f * \tilde{f}_1) \quad \text{och} \quad y_1 = D(y_0 * \tilde{w}_1) = D(f * \tilde{g}_1).$$

Likheterna (10.5.3) gäller därför för $j = 1$. Antag nu att de gäller för ett visst j . Genom att utnyttja induktionsantagandet och den rekursiva definitionen av f_j får vi då

$$\begin{aligned} x_{j+1} &= D(y_j * \tilde{v}_{j+1}) = D(D^j(f * \tilde{g}_j) * \tilde{v}_{j+1}) = D(D^j(f * \tilde{g}_j * U^j \tilde{v}_{j+1})) \\ &= D^{j+1}(f * \widetilde{(g_j * U^j v_{j+1})}) = D^{j+1}(f * \tilde{f}_{j+1}), \end{aligned}$$

vilket visar att den första likheten i (10.5.3) också gäller för $j + 1$, och den andra likheten visas analogt. Därmed är induktionsbeviset komplett. \square



Figur 10.3.

Figur 10.3 visar schematiskt hur man erhåller koordinatfunktionerna som faltningar följda av nedsamlingar.

Sambandet mellan en vektors koordinater i två baser beskrivs av övergångsmatrisen; vi får kolonnmatrisen för de nya koordinaterna genom att multiplicera övergångsmatrisen med kolonnmatrisen av de gamla koordinaterna. För ett N -dimensionellt vektorrum innebär detta att det behövs N^2 multiplikationer för att beräkna de nya koordinaterna på detta vis. En funktions koordinater med avseende på waveletbasen kan beräknas på ett mycket billigare sätt.

Sats 10.5.5 *Antag att N är en heltalspotens av 2, och låt \mathcal{B} vara waveletbasen i sats 10.5.2, och antag att fouriertransformerna till waveletfilterföljden har beräknats och lagrats. En godtycklig funktions koordinater i waveletbasen \mathcal{B} kan då beräknas med högst $4N + N \log_2 N$ komplexa multiplikationer.*

Bevis. För att beräkna koordinatfunktionerna $x_1, x_2, \dots, x_p, y_p$ beräknar vi först fouriertransformerna $\hat{y}_0, \hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2, \dots, \hat{x}_p, \hat{y}_p$.

Eftersom $x_j = D(y_{j-1} * \tilde{v}_j)$ och $y_j = D(y_{j-1} * \tilde{u}_j)$, är

$$\begin{aligned}\hat{x}_j(n) &= \hat{y}_{j-1}(n) \overline{\hat{v}_j(n)} + \hat{y}_{j-1}(n + N/2^j) \overline{\hat{v}_j(n + N/2^j)} & \text{och} \\ \hat{y}_j(n) &= \hat{y}_{j-1}(n) \overline{\hat{u}_j(n)} + \hat{y}_{j-1}(n + N/2^j) \overline{\hat{u}_j(n + N/2^j)}\end{aligned}$$

för $n = 0, 1, \dots, N/2^j - 1$.

Om vi redan har beräknat \hat{y}_{j-1} behövs det därför ytterligare två multiplikationer för att beräkna varje funktionsvärde $\hat{x}_j(n)$ och således totalt $N/2^{j-1}$ multiplikationer för att beräkna hela \hat{x}_j . Naturligtvis behövs det lika många multiplikationer för att beräkna \hat{y}_j . För att beräkna både \hat{x}_j och \hat{y}_j krävs det således ytterligare högst $2N/2^{j-1}$ multiplikationer.

Vi börjar därför med att beräkna $\hat{y}_0 = \hat{f}$, vilket enligt sats 6.7.2 kräver högst $\frac{N}{2} \log_2 N$ multiplikationer. Därefter beräknas \hat{x}_1 och \hat{y}_1 , vilket kräver ytterligare $2N$ multiplikationer. Därefter beräknas \hat{x}_2 och \hat{y}_2 med ytterliga-

re $2N/2$ multiplikationer, osv. Slutligen beräknas \hat{x}_p och \hat{y}_p med $2N/2^{p-1}$ multiplikationer.

Samtliga fouriertransformer kan således beräknas med

$$\frac{N}{2} \log_2 N + 2(N + N/2 + N/4 + \dots + N/2^{p-1}) \leq \frac{N}{2} \log_2 N + 4N$$

multiplikationer.

Slutligen beräknas de relevanta koordinatfunktionerna $x_1, x_2, \dots, x_p, y_p$ genom invers fouriertransformering. Detta kräver högst

$$\begin{aligned} & \frac{N}{4} \log_2 \frac{N}{2} + \frac{N}{8} \log_2 \frac{N}{4} + \dots + \frac{N}{2^{p+1}} \log_2 \frac{N}{2^p} + \frac{N}{2^{p+1}} \log_2 \frac{N}{2^p} \\ & \leq N \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^{p+1}} \right) \log_2 N = \frac{N}{2} \log_2 N \end{aligned}$$

multiplikationer.

Samtliga koordinater i waveletbasen kan således beräknas med högst

$$\frac{N}{2} \log_2 N + 4N + \frac{N}{2} \log_2 N = 4N + N \log_2 N$$

multiplikationer. □

I vår definition av waveletfilterföljder kräver vi inte att det skall finnas något samband mellan paren v_j, w_j på de olika nivåerna j . Ett sådant samband är emellertid önskvärt om man vill bygga in någon form av regelbundenhet i waveletbasen. Nästa sats visar hur man får waveletfilterföljder genom iteration.

Sats 10.5.6 *Låt N vara delbart med 2^p . Antag att de två funktionerna $v, w \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ genererar en första etappens waveletbas för $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$, dvs. att funktionernas systemmatris $A(n)$ är unitär för $n = 0, 1, \dots, N/2 - 1$. Definiera för $j = 1, 2, \dots, p$ funktionerna $v_j, w_j \in \ell^2(\mathbf{Z}_{N/2^{j-1}})$ genom att sätta*

$$\begin{aligned} v_j(n) &= \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} v\left(n + \frac{kN}{2^{j-1}}\right) \\ w_j(n) &= \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} w\left(n + \frac{kN}{2^{j-1}}\right) \end{aligned}$$

Då är $v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_p, w_p$ en p :te etappens waveletfilterföljd, och vi säger att vi erhållit följderna genom iteration av v, w .

Bevis. Enligt sats 10.2.1 är $\hat{v}_j(n) = \hat{v}(2^{j-1}n)$ och $\hat{w}_j(n) = \hat{w}(2^{j-1}n)$. Funktionerna v_j, w_j har därför systemmatrisen

$$\begin{aligned} A_j(n) &= \begin{bmatrix} \hat{v}_j(n) & \hat{w}_j(n) \\ \hat{v}_j(n + \frac{N}{2^j}) & \hat{w}_j(n + \frac{N}{2^j}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{v}(2^{j-1}n) & \hat{w}(2^{j-1}n) \\ \hat{v}(2^{j-1}n + \frac{N}{2}) & \hat{w}(2^{j-1}n + \frac{N}{2}) \end{bmatrix} = A(2^{j-1}n), \end{aligned}$$

och enligt förutsättningarna är den sistnämnda matrisen unitär för $n = 0, 1, \dots, N/2^j - 1$. Funktionerna v_j och w_j genererar därför en första etappens waveletbas i $\ell^2(\mathbf{Z}_{N/2^{j-1}})$, och detta innebär att $v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_p, w_p$ är en p :te etappens waveletfilterföljd. \square

För waveletfilterföljder $v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_p, w_p$ som genereras genom iteration av första etappens filter v, w som i föregående sats, får formlerna i sats 10.5.3 följande utseende:

$$(10.5.4) \quad \hat{f}_j(n) = \hat{g}_{j-1}(n) \hat{v}(2^{j-1}n) = \hat{w}(n) \hat{w}(2n) \cdots \hat{w}(2^{j-2}n) \hat{v}(2^{j-1}n)$$

och

$$(10.5.5) \quad \hat{g}_j(n) = \hat{g}_{j-1}(n) \hat{w}(2^{j-1}n) = \hat{w}(n) \hat{w}(2n) \cdots \hat{w}(2^{j-2}n) \hat{w}(2^{j-1}n).$$

Vi inför nu nya förenklade beteckningar för basvektorer i waveletbasen.

Definition Antag att N är delbart med 2^p , låt $v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_p, w_p$ vara en p :te etappens waveletfilterföljd och definiera $f_1, g_1, f_2, g_2, \dots, f_p, g_p$ som i sats 10.5.2. Sätt för $j = 1, 2, \dots, p$ och $k = 0, 1, \dots, N/2^j - 1$

$$\begin{aligned} \varphi_{j,k} &= R_{2^j k} f_j, & W_j &= \text{span}\{\varphi_{j,k}\}_{k=0}^{N/2^j-1}, \\ \psi_{j,k} &= R_{2^j k} g_j, & V_j &= \text{span}\{\psi_{j,k}\}_{k=0}^{N/2^j-1}. \end{aligned}$$

De ortogonala projektionerna av $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ på delrummen W_j och V_j betecknas \mathcal{Q}_j resp. \mathcal{P}_j . Projektionen \mathcal{P}_j kallas den *partiella rekonstruktionen på nivå j* .

Med de nya beteckningarna får waveletbasen i sats 10.5.2 formen

$$\mathcal{B} = \{\varphi_{1,k}\}_{k=0}^{N/2-1} \cup \{\varphi_{2,k}\}_{k=0}^{N/4-1} \cup \cdots \cup \{\varphi_{p,k}\}_{k=0}^{N/2^p-1} \cup \{\psi_{p,k}\}_{k=0}^{N/2^p-1}.$$

Den iterativa konstruktionen av waveletbasen \mathcal{B} visar att V_{j-1} är en ortogonal direkt summa av delrummen W_j och V_j : $V_{j-1} = W_j \oplus V_j$. Följaktligen är

$$(10.5.6) \quad \mathcal{P}_{j-1} = \mathcal{Q}_j + \mathcal{P}_j$$

för $j = 1, 2, \dots, p$. (Här är $P_0 = I$, den identiska avbildningen.) Vidare är

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_j f &= \sum_{k=0}^{N/2^j-1} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} = \sum_{k=0}^{N/2^j-1} x_j(k) \varphi_{j,k}, \\ \mathcal{P}_j f &= \sum_{k=0}^{N/2^j-1} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} = \sum_{k=0}^{N/2^j-1} y_j(k) \varphi_{j,k},\end{aligned}$$

där koordinaterna x_j och y_j ges av sats 10.5.4.

Genom att iterera formel (10.5.6) erhålles sambandet

$$I = \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2 + \dots + \mathcal{Q}_j + \mathcal{P}_j.$$

Man kan tolka de partiella rekonstruktionerna \mathcal{P}_j och formel (10.5.4) på följande sätt. Den partiella rekonstruktionen $\mathcal{P}_p f$ är en mycket grov approximation till f . Funktionen $\mathcal{P}_p f$ har bara med $N/2^p$ stycken av termerna i funktionen f 's waveletutveckling, och vi ser därför bara detaljer i f på skalnivån 2^p . Genom att addera $\mathcal{Q}_p f$ till denna approximation erhåller vi den partiella rekonstruktionen $\mathcal{P}_{p-1} f$, som innehåller $N/2^{p-1}$, dvs. dubbelt så många termer, och som därför är en bättre approximation. Nu kan vi se detaljer i f på skalnivån 2^{p-1} . Allmänt gäller att den partiella rekonstruktionen $\mathcal{P}_j f$ innehåller $N/2^j$ termer från f 's waveletutveckling och att den är en approximation till f på skalnivån 2^j . Efter att slutligen ha adderat $\mathcal{Q}_1 f$ till $\mathcal{P}_1 f$ erhåller vi f exakt.

10.6 Exempel

Haarbasen

Antag att N är delbart med 2^p , där $p \geq 1$.

I exempel 10.5.1 studerade vi första etappens Haarbas, som genereras av de båda funktionerna v , w , där

$$\begin{aligned}v(n) &= \begin{cases} 2^{-1/2} & \text{för } n = 0, \\ -2^{-1/2} & \text{för } n = 1, \\ 0 & \text{för } n = 3, \dots, N-1; \end{cases} \\ w(n) &= \begin{cases} 2^{-1/2} & \text{för } n = 0, 1 \\ 0 & \text{för } n = 3, \dots, N-1. \end{cases}\end{aligned}$$

Genom att iterera v , w får man en p :te etappens waveletfilterföljd och motsvarande waveletbas kallas p :te etappens Haarbas.

Haarbasens generatorer beräknas med hjälp av formlerna (10.5.4) och (10.5.5) i föregående avsnitt. Eftersom $\hat{w}(2^{j-1}n) = 2^{-1/2}(1 + \bar{\chi}_1(2^{j-1}n)) = 2^{-1/2}(1 + \bar{\chi}_{2^{j-1}}(n))$, är

$$\begin{aligned}\hat{g}_j(n) &= \hat{g}_{j-1}(n) \hat{w}(2^{j-1}n) = 2^{-1/2} \hat{g}_{j-1}(n) (1 + \bar{\chi}_{2^{j-1}}(n)) \\ &= 2^{-1/2} (\hat{g}_{j-1}(n) + \bar{\chi}_{2^{j-1}}(n) \hat{g}_{j-1}(n)) = 2^{-1/2} (\hat{g}_{j-1}(n) + \widehat{R_{2^{j-1}} g_{j-1}}(n)).\end{aligned}$$

Det följer att $g_j = 2^{-1/2}(g_{j-1} + R_{2^{j-1}}g_{j-1})$, dvs.

$$g_j(n) = 2^{-1/2}(g_{j-1}(n) + g_{j-1}(n - 2^{j-1})).$$

Genom att utnyttja att $\hat{v}(2^{j-1}n) = 2^{-1/2}(1 - \bar{\chi}_{2^{j-1}}(n))$ erhåller man på motsvarande sätt sambandet

$$f_j(n) = 2^{-1/2}(g_{j-1}(n) - g_{j-1}(n - 2^{j-1})).$$

Rekursionsformlerna för g_j och f_j , som startar med $g_0 = \mathbf{e}_0$, leder slutligen till följande formler för $j = 1, 2, \dots, p$:

$$g_j(n) = \begin{cases} 2^{-j/2} & \text{för } n = 0, 1, \dots, 2^j - 1, \\ 0 & \text{för övriga } n \in \mathbf{Z}_N; \end{cases}$$

och

$$f_j(n) = \begin{cases} 2^{-j/2} & \text{för } n = 0, 1, \dots, 2^{j-1} - 1, \\ -2^{-j/2} & \text{för } n = 2^{j-1}, 2^{j-1} + 1, \dots, 2^j - 1, \\ 0 & \text{för övriga } n \in \mathbf{Z}_N. \end{cases}$$

Haarbasen i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$ består således av funktionerna

$$\{\varphi_{1,k}\}_{k=1}^{N/2-1} \cup \{\varphi_{2,k}\}_{k=1}^{N/4-1} \cup \dots \cup \{\varphi_{p,k}\}_{k=1}^{N/2^p-1} \cup \{\psi_{p,k}\}_{k=1}^{N/2^p-1},$$

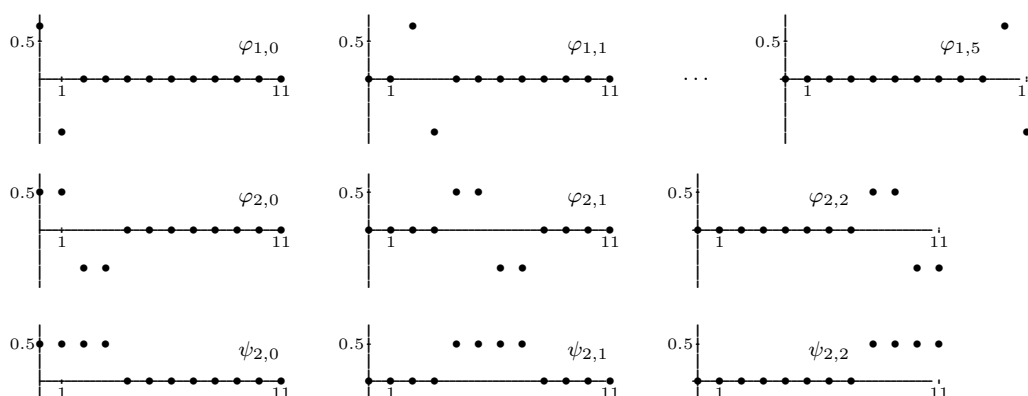
där

$$\varphi_{j,k}(n) = R_{2^j k} f_j(n) = \begin{cases} 2^{-j/2} & \text{för } 2^j k \leq n \leq 2^j k + 2^{j-1} - 1, \\ -2^{-j/2} & \text{för } 2^j k + 2^{j-1} \leq n \leq 2^j(k+1) - 1, \\ 0 & \text{för övriga } n \in \mathbf{Z}_N \end{cases}$$

och

$$\psi_{j,k}(n) = R_{2^j k} g_j(n) = \begin{cases} 2^{-j/2} & \text{för } 2^j k \leq n \leq 2^j(k+1) - 1, \\ 0 & \text{för övriga } n \in \mathbf{Z}_N. \end{cases}$$

Figur 10.4 illustreras Haarbasen i fallet $N = 12$, $p = 2$.



Figur 10.4. Nio av de tolv basfunktionerna i $\ell^2(\mathbf{Z}_{12})$:s Haarbas.

Haarbasen är konstruerad så att basfunktionerna skall vara lokaliserade i tidsrummet. För att undersöka lokaliseringen i frekvensrummet studerar vi deras fouriertransformer, och för den skull inför vi följande hjälpfunktioner för att förenkla våra beteckningar:

$$\begin{aligned} G_1(x) &= 2^{1/2} e^{-\pi i x} \cos \pi x, & F_1(x) &= i 2^{1/2} e^{-\pi i x} \sin \pi x, \\ G_j(x) &= G_{j-1}(x) G_1(2^{j-1}x) \quad \text{och} \\ F_j(x) &= G_{j-1}(x) F_1(2^{j-1}x) \quad \text{för } j = 2, 3, \dots, p. \end{aligned}$$

Med induktion visar man så lätt att för $0 < x < 1$ är

$$(10.6.1) \quad \begin{aligned} G_j(x) &= 2^{-j/2} e^{-(2^j-1)\pi i x} \frac{\sin(2^j \pi x)}{\sin \pi x} \quad \text{och} \\ F_j(x) &= i 2^{-(j-2)/2} e^{-(2^j-1)\pi i x} \frac{\sin^2(2^{j-1} \pi x)}{\sin \pi x}. \end{aligned}$$

Vi observerar nu att $2^{1/2} G_1(x) = 1 + e^{-2\pi i x}$ och $2^{1/2} F_1(x) = 1 - e^{-2\pi i x}$, och därför är

$$\hat{w}(n) = 2^{-1/2} (1 + \overline{\chi_1(n)}) = 2^{-1/2} (1 + e^{-2\pi i n/N}) = G_1(n/N).$$

På motsvarande sätt är

$$\hat{v}(n) = F_1(n/N).$$

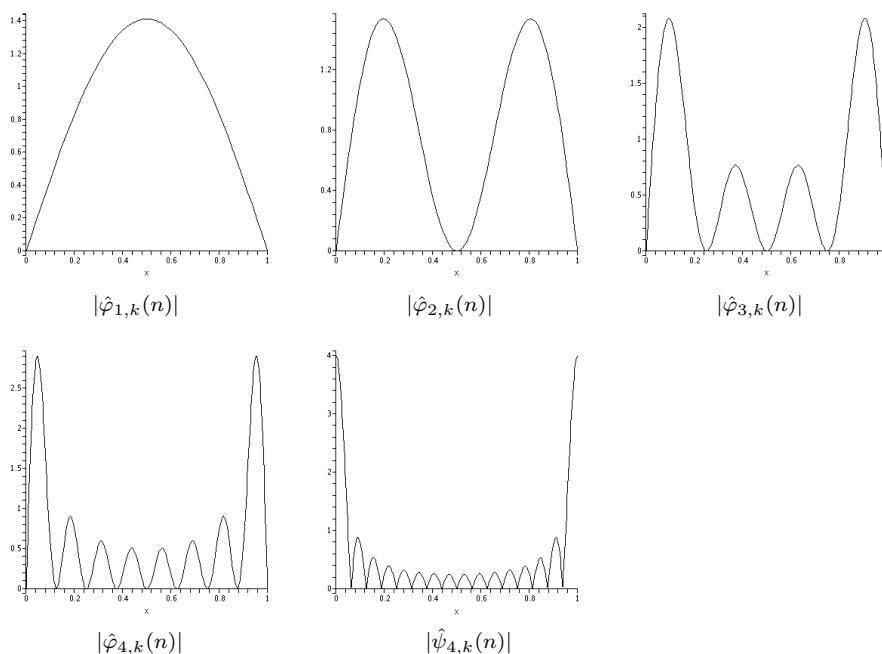
Genom att jämföra rekursionsformlerna för \hat{f}_j och \hat{g}_j med rekursionsformlerna ovan för F_j och G_j får man omedelbart att

$$\hat{f}_j(n) = F_j(n/N) \quad \text{och} \quad \hat{g}_j(n) = G_j(n/N).$$

För absolutbeloppen av \hat{f}_j och \hat{g}_j gäller alltså

$$(10.6.2) \quad \begin{aligned} |\hat{f}_j(n)| &= |F_j(n/N)| = 2^{-(j-2)/2} \frac{\sin^2(2^{j-1}\pi n/N)}{\sin(\pi n/N)} \quad \text{och} \\ |\hat{g}_j(n)| &= |G_j(n/N)| = 2^{-(j-2)/2} \frac{|\sin(2^j\pi n/N)|}{\sin(\pi n/N)}. \end{aligned}$$

Graferna till funktionerna $|\hat{\varphi}_{j,k}|$ ($= |\hat{f}_j|$) och $|\hat{\psi}_{p,k}|$ ($= |\hat{g}_p|$) illustreras i figur 10.5 för $j = 1, 2, 3, 4$ och $p = 4$. Det framgår av dem att Haarbasen är hyggligt lokaliserad i frekvensrummet.



Figur 10.5. Figuren visar absolutbeloppet av fouriertransformerna till funktionerna i Haarbasen. Observera att skalan på x -axeln anger n/N .

För Haarbasen har de partiella rekonstruktionerna \mathcal{P}_j en mycket enkel tolkning. Låt $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$; då är

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle = 2^{-j/2} \sum_{\ell=0}^{2^j-1} f(2^j k + \ell),$$

varför

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{-j,k}(n) = \begin{cases} 2^{-j} \sum_{\ell=0}^{2^j-1} f(2^j k + \ell) & \text{för } 2^j k \leq n \leq 2^j(k+1) - 1, \\ 0 & \text{för alla övriga } n. \end{cases}$$

Eftersom intervallen $[2^j k, 2^j(k+1) - 1]$ är disjunkta för olika k , följer det att

$$\mathcal{P}_j f(n) = \sum_{k=0}^{2^j-1} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(n) = 2^{-j} \sum_{\ell=0}^{2^j-1} f(2^j k + \ell)$$

för alla n i intervallet $[2^j k, 2^j(k+1) - 1]$. För ett sådant n är med andra ord den partiella rekonstruktionen $\mathcal{P}_j f$ lika med funktionen f :s medelvärde i intervallet.

EXEMPEL 10.6.1 Låt $f \in \ell^2(\mathbf{Z}_{12})$ vara funktionen

$$f = (7, 3, 4, 2, 5, 1, 2, 0, 3, 3, 4, 2).$$

Då är

$$\mathcal{P}_2 f = (4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3) \quad \text{och}$$

$$\mathcal{P}_1 f = (5, 5, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 3, 3, 3, 3).$$

Eftersom $\mathcal{Q}_j = \mathcal{P}_{j-1} - \mathcal{P}_j$, är vidare

$$\mathcal{Q}_2 f = (1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 0, 0, 0, 0) \quad \text{och}$$

$$\mathcal{Q}_1 f = (2, -2, 1, -1, 2, -2, 1, -1, 0, 0, 1, 1). \quad \square$$

Shannonbasen

Antag att N är delbart med 2^{p+1} , där $p \geq 1$. Första etappens Shannonbas (se exempel 10.5.2) genereras av funktionerna v, w , där

$$\hat{v}(n) = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 \leq n \leq N/4 - 1 \text{ och } 3N/4 \leq n \leq N - 1, \\ \sqrt{2} & \text{för } N/4 \leq n \leq 3N/4 - 1; \end{cases}$$

$$\hat{w}(n) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{för } 0 \leq n \leq N/4 - 1 \text{ och } 3N/4 \leq n \leq N - 1, \\ 0 & \text{för } N/4 \leq n \leq 3N/4 - 1. \end{cases}$$

Observera att

$$(10.6.3) \quad \hat{v}(n) + \hat{w}(n) = \sqrt{2}$$

för alla n , och att v innehåller de $N/2$ högsta frekvenserna, medan w innehåller de $N/2$ lägsta frekvenserna i frekvensområdet $0 \leq n \leq N - 1$.

Genom att iterera v, w erhålls en p :te etappens waveletfilterföljd $v_1, w_1, v_2, w_2, \dots, v_p, w_p$. Motsvarande waveletbas kallas p :te etappens Shannonbas.

Eftersom $\hat{w}_j(n) = \hat{w}(2^{j-1}n)$, är

$$\hat{w}_j(n) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{för } 0 \leq n \leq N/2^{j+1} - 1 \text{ och } 3N/2^{j+1} \leq n \leq N/2^{j-1} - 1, \\ 0 & \text{för } N/2^{j+1} \leq n \leq 3N/2^{j+1} - 1, \end{cases}$$

och med hjälp av rekursionsformel (10.5.5) får man nu följande explicita uttryck för $\hat{g}_j(n)$:

$$\hat{g}_j(n) = \begin{cases} 2^{j/2} & \text{för } 0 \leq n \leq N/2^{j+1} - 1 \text{ och } N - N/2^{j+1} \leq n \leq N - 1, \\ 0 & \text{för } N/2^{j+1} \leq n \leq N - N/2^{j+1} - 1. \end{cases}$$

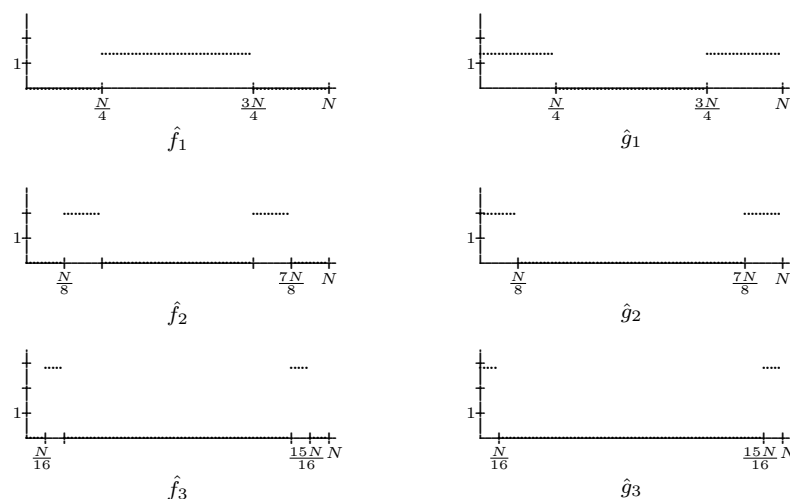
Genom att kombinera rekursionsformlerna (10.5.4) och (10.5.5) med ekvation (10.6.3) får vi vidare sambandet

$$\begin{aligned} \hat{f}_j(n) + \hat{g}_j(n) &= \hat{g}_{j-1}(n)(\hat{v}_j(n) + \hat{w}_j(n)) = \hat{g}_{j-1}(n)(\hat{v}(2^{j-1}n) + \hat{w}(2^{j-1}n)) \\ &= \sqrt{2} \hat{g}_{j-1}(n), \end{aligned}$$

vilket innebär att

$$(10.6.4) \quad f_j(n) = \sqrt{2} g_{j-1}(n) - g_j(n).$$

Figur 10.6 illustrerar transformerna \hat{f}_j , \hat{g}_j för $j = 1, 2$ och 3 .



Figur 10.6. Fouriertransformer till Shannonbasens generatorer.

Genom invers fouriertransformering kan man förstås skaffa sig explicita uttryck för Shannonbasens generatorer. Enklast är nog att först beräkna $g_j(n)$ genom invers fouriertransformering och sedan sätta in det erhållna explicita uttrycket i formel (10.6.4). Efter lite räkningar får man följande formler:

$$(10.6.5) \quad \begin{aligned} g_j(n) &= \frac{2^{j/2} e^{-\pi i n/N} \sin(\pi n/2^j)}{N \sin(\pi n/N)} \\ f_j(n) &= (2 \cos(\pi n/2^j) - 1) g_j(n). \end{aligned}$$

För alla j och k är förstås $|\hat{\varphi}_{j,k}(n)| = |\hat{\varphi}_{j,0}(n)| = \hat{f}_j(n)$ och $|\hat{\psi}_{p,k}(n)| = |\hat{\psi}_{k,0}(n)| = \hat{g}_k(n)$. Shannonbasen är därför bra lokaliserad i frekvensrummet. Den är också ganska bra lokaliserad i tidsrummet. Jämför formlerna (10.6.5) för Shannonbasens generatorer med formlerna (10.6.2) för Haarbasgeneratorernas fouriertransformer.

Den *reella Shannonbasen* konstrueras genom iteration av första etappens reella Shannonbas (se exempel 10.5.3).

Daubechies D6-wavelets

Antag att N är delbart med 2^p för något positivt heltal p och att $N/2^p \geq 6$.

Shannonbasens (och den reella Shannonbasens) funktioner är per definition mycket bra lokaliserade i frekvensrummet. Ingrid Daubechies konstruerade reella waveletfamiljer som istället är mycket bra lokaliserade i tidsrummet, och i det här avsnittet skall vi studera hennes s. k. D6-bas.

Vi utgår från identiteten

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)^5 = 1$$

och utvecklar vänsterledet med hjälp av binomialsatsen, vilket leder till identiteten

$$\begin{aligned} \cos^{10} x + 5 \cos^8 x \sin^2 x + 10 \cos^6 x \sin^4 x + 10 \cos^4 x \sin^6 x + 5 \cos^2 x \sin^8 x \\ + \sin^{10} x = 1. \end{aligned}$$

Sätt nu

$$b(x) = \cos^{10} x + 5 \cos^8 x \sin^2 x + 10 \cos^6 x \sin^4 x;$$

eftersom $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$ och $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$, blir då

$$b(x + \frac{\pi}{2}) = \sin^{10} x + 5 \sin^8 x \cos^2 x + 10 \sin^6 x \cos^4 x,$$

och det följer av identiteten ovan att

$$b(x) + b(x + \frac{\pi}{2}) = 1$$

för alla reella tal x .

Om vi väljer $w \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ så att

$$(10.6.6) \quad |\hat{w}(n)|^2 = 2b(\pi n/N),$$

blir alltså

$$|\hat{w}(n)|^2 + |\hat{w}(n + N/2)|^2 = 2 \quad \text{för } n = 0, 1, \dots, N/2 - 1,$$

vilket innebär att de jämna translaten av w bildar ett ortonormerat system med $N/2$ vektorer.

För att uppfylla (10.6.6) kan vi naturligtvis helt enkelt definiera $\hat{w}(n) = \sqrt{2b(\pi n/N)}$, men detta fungerar inte om w 's translat också skall vara lokaliserade i tidsrummet. Vi måste välja $\hat{w}(n)$ med större omsorg och skriver därför om $b(x)$ på formen

$$\begin{aligned} b(x) &= \cos^6 x [\cos^4 x + 5 \cos^2 x \sin^2 x + 10 \sin^4 x] \\ &= \cos^6 x [(\cos^2 x - \sqrt{10} \sin^2 x)^2 + (5 + 2\sqrt{10}) \cos^2 x \sin^2 x]. \end{aligned}$$

Sätt nu

$$c(x) = \sqrt{2} e^{-5ix} \cos^3 x [(\cos^2 x - \sqrt{10} \sin^2 x) + i\sqrt{5 + 2\sqrt{10}} \cos x \sin x];$$

då är tydligen

$$|c(x)|^2 = 2b(x).$$

Med hjälp av Eulers formler för $\cos x$ och $\sin x$ kan vi uttrycka $c(x)$ som ett polynom i e^{ix} och e^{-ix} . För att förenkla beteckningarna sätter vi

$$a = 1 - \sqrt{10}, \quad b = 1 + \sqrt{10} \quad \text{och} \quad c = \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}$$

och får då

$$\begin{aligned} c(x) &= \frac{\sqrt{2}}{32} e^{-5ix} (e^{ix} + e^{-ix})^3 [(e^{ix} + e^{-ix})^2 + \sqrt{10} (e^{ix} - e^{-ix})^2 \\ &\quad + \sqrt{5 + 2\sqrt{10}} (e^{ix} + e^{-ix})(e^{ix} - e^{-ix})] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{32} e^{-5ix} [e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}] [(b+c)e^{2ix} + 2a + (b-c)e^{-2ix}] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{32} [(b+c) + (2a+3b+3c)e^{-2ix} + (6a+4b+2c)e^{-4ix} \\ &\quad + (6a+4b-2c)e^{-6ix} + (2a+3b-3c)e^{-8ix} + (b-c)e^{-10ix}]. \end{aligned}$$

Vi ser nu poängen med faktorn e^{-5ix} i definitionen av $c(x)$; den är med för att $c(x)$ skall bli ett polynom i e^{-2ix} .

Definiera slutligen $w \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ genom att sätta

$$\hat{w}(n) = c(\pi n/N);$$

då uppfylls (10.6.6), vilket betyder att de jämna translaten av u bildar en ON-följd i $\ell^2(\mathbf{Z}_N)$. Eftersom funktionen w är entydigt bestämd av att

$$\hat{w}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} w(k) e^{-2\pi i k n / N},$$

visar en jämförelsen med det explicita uttrycket för $c(x)$ att $w(k) = 0$ för $6 \leq k \leq N-1$ samt att

$$\begin{aligned} w(0) &= \frac{\sqrt{2}}{32} (b + c), & w(1) &= \frac{\sqrt{2}}{32} (2a + 3b + 3c), & w(2) &= \frac{\sqrt{2}}{32} (6a + 4b + 2c), \\ w(3) &= \frac{\sqrt{2}}{32} (6a + 4b - 2c), & w(4) &= \frac{\sqrt{2}}{32} (2a + 3b - 3c), & w(5) &= \frac{\sqrt{2}}{32} (b - c). \end{aligned}$$

Funktionen w är med andra ord reell och skild från 0 i exakt sex punkter.

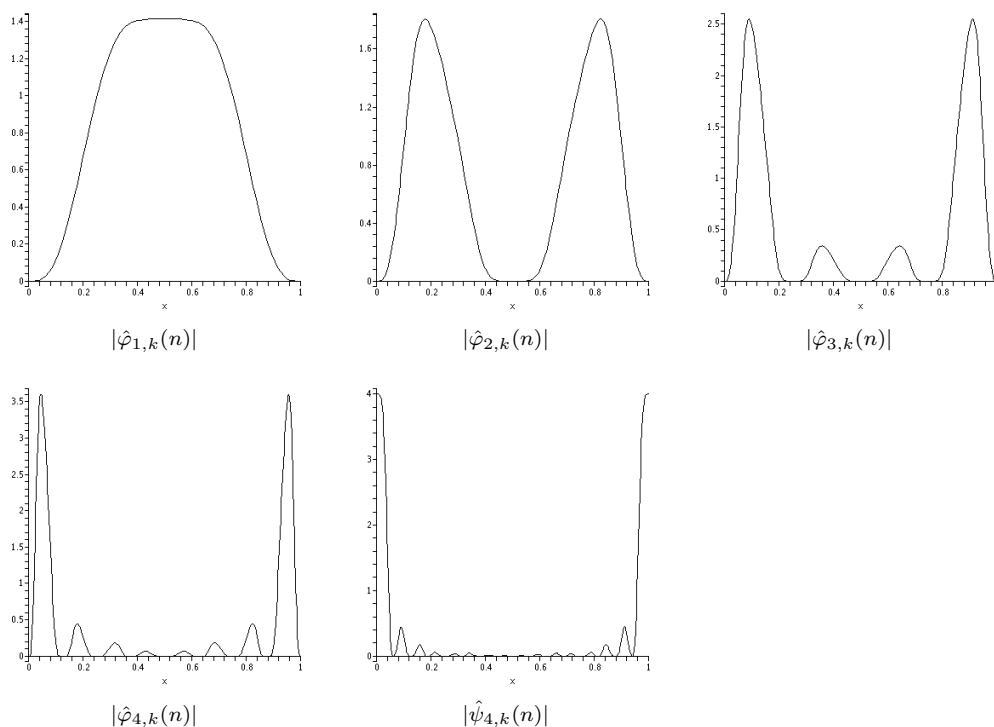
För att erhålla generatorer v och w till en första etappens waveletbas använder vi nu sats 10.5.1 och definierar funktionen $v \in \ell^2(\mathbf{Z}_N)$ genom att sätta $v(k) = (-1)^{k-1} \overline{w(1-k)} = (-1)^{k-1} w(1-k)$. Det följer att

$$\hat{v}(n) = \sum_{k=-4}^1 (-1)^{k-1} u(1-k) e^{-2\pi i k n / N} = e^{8\pi i n / N} \sum_{k=0}^5 (-1)^{k-1} u(5-k) e^{-2\pi i k n / N}.$$

Med utgångspunkt från funktionerna u och v konstruerar vi nu en p :te etappens waveletbas genom att följa recepten i satserna 10.5.6 och 10.5.2; den erhållna ON-basen kallas Daubechies *D6-waveletbas*, där sexan syftar på antalet nollskilda komponenter i funktionerna u och v .

Fouriertransformen till funktionerna i waveletfilterföljden har formen

$$\begin{aligned} \hat{w}_j(n) &= \hat{w}(2^{j-1}n) = \sum_{k=0}^5 a_k e^{-2\pi i k 2^{j-1}n / N} \\ \hat{v}_j(n) &= \hat{v}(2^{j-1}n) = e^{2\pi i 2^{j-1}n / N} \sum_{k=0}^5 (-1)^{k-1} a_{5-k} e^{-2\pi i k 2^{j-1}n / N} \end{aligned}$$



Figur 10.7. Figuren visar absolutbeloppet av fouriertransformerna till funktionerna i D6-basen. Observera att skalan på x -axeln anger n/N .

där $a_k = w(k)$ för $k = 0, 1, \dots, 5$. Det följer därför genom ihopmultiplikation att

$$\hat{g}_j(n) = \hat{w}_1(n)\hat{w}_2(n)\cdots\hat{w}_j(n) = \sum_{k=0}^{5r} b_k e^{-2\pi i k n/N} = \sum_{k=0}^{N-1} g_j(k) e^{-2\pi i k n/N} \quad \text{och}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_j(n) &= \hat{w}_1(n)\hat{w}_2(n)\cdots\hat{w}_{j-1}(n)\hat{v}_j(n) = \sum_{k=2^{j-1}}^{5r+2^{j-1}} c_k e^{-2\pi i k n/N} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} f_j(k) e^{-2\pi i k n/N} \end{aligned}$$

där $r = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{j-1} = 2^j - 1$. Härav kan vi dra slutsatsen att funktionerna f_j och g_j är nollskilda i högst $5r+1 = 5 \cdot 2^j - 4 = 6 + (2^{j-1} - 1) \cdot 10$ punkter.

Första generationens basvektorer $\varphi_{1,k}$ i D6-basen har 6 nollskilda komponenter, andra generationens basvektorer $\varphi_{2,k}$ har 16 nollskilda komponenter, tredje generationen har 36 nollskilda komponenter, fjärde generationen

har 76 nollskilda koefficienter, osv. D6-basen är bättre lokaliserad i tidsrummet än (den reella) Shannonbasen, men den är inte lika bra lokaliserad i frekvensrummet som Shannonbaserna. Se figur 10.7

Svar till övningsuppgifter

- 2.1 a) Absolutkonvergent b) Absolutkonvergent för alla $t \in \mathbf{R}$.
- 2.2 a) Konvergent för $-1 < x \leq 1$; likformigt konvergen på alla slutna delintervall $[a, b]$ av $] -1, 1[$.
b) Konvergent för $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$; likformigt konvergent på alla slutna delintervall av $] -\sqrt{2}, 0[$ och $] 0, \sqrt{2}[$.
c) Konvergent för $x \geq 0$; likformigt konvergent på $[0, \infty[$.
d) Konvergent för alla $x \in \mathbf{R}$; likformigt konvergent på alla slutna delintervall av $] -\infty, 0[$ och $] 0, \infty[$.
- 2.3 a) Nej b) Ja c) Ja
- 2.4 a) Nej b) 0
- 2.5 1
- 2.6 $\frac{\pi}{8}$
- 2.7 $\frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}$
- 2.8 Integralens värde är π .
- 2.9 Serien är likformigt konvergent på \mathbf{R} (Weierstrass majorantsats).
- 2.10 Serien är likformigt konvergent på $[0, \infty[$ (Weierstrass majorantsats).
- 2.11 a) För alla $x \in \mathbf{R}$. b) Nej c) Ja
- 2.12 a) Likformigt konvergent på \mathbf{R} . b) Likformigt konvergent på \mathbf{R} .
- 2.14 Integralen är lika med 1.
- 2.15 $f'(1) = \frac{e}{(e+1)^2}$.
- 2.16 Integrera först partiellt och använd sedan Riemann–Lebesgues lemma.

$$3.1 \quad \text{a) } \frac{z}{z+2} \quad \text{b) } \frac{3z}{(z-3)^2} \quad \text{c) } \frac{2z^2+4z}{(z-2)^3}$$

$$3.2 \quad \text{a) } \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{b) } a_n = \begin{cases} 0 & \text{om } n \neq 1 \\ 1 & \text{om } n = 1 \end{cases} \quad \text{c) } a_n = n \cdot 2^{n+1} + 3 \cdot (-1)^n.$$

$$3.3 \quad a_n = n + 5 - 3 \cdot 2^n$$

$$3.4 \quad a_n = n + 1 + \frac{i^n - (-i)^n}{2i} = n + 1 + \sin \frac{\pi}{2} n$$

$$3.5 \quad a_n = \frac{2}{5} \cdot 4^n + \frac{3}{5} \cdot (-1)^n, \quad b_n = -\frac{4}{5} \cdot 4^n + \frac{9}{5} \cdot (-1)^n$$

$$3.6 \quad \text{a) } x_0 = 1, x_n = \frac{5}{6} \cdot 2^n \text{ för } n \geq 1 \\ \text{b) } x_n = \frac{1}{5} (2^n + 4 \cos \frac{\pi}{2} n - 2 \sin \frac{\pi}{2} n)$$

$$4.1 \quad \hat{g}(n) = e^{-3(n-2)i} \hat{f}(n-2)$$

$$4.2 \quad f(t) = C e^{2it}$$

$$4.3 \quad \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{\pi} \cos t$$

$$4.4 \quad \text{a) } \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{b) } (C,1)\text{-summa saknas}$$

$$4.6 \quad \text{a) } f(t) \sim \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{(-1)^n}{1 - in} e^{int} \quad \text{b) } \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{e^\pi - e^{-\pi}} - \frac{1}{2}.$$

$$4.7 \quad \text{a) } f(t) \sim \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2 - 1} \\ \text{b) } \text{Serien konvergerar mot } f(t) \text{ för alla } t. \\ \text{c) } \frac{1}{2}$$

$$4.8 \quad \text{a) } f(t) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \neq 0} \frac{2 \cdot (-1)^n}{n^2} e^{int} \\ \text{b) } \text{Fourierserien konvergerar likformigt mot } f(t) \text{ på hela } \mathbf{R}. \\ \text{c) } -\frac{\pi^2}{12}$$

$$4.9 \quad \text{a) } f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} \\ \text{b) } \text{Sinusserien konvergerar mot } f(t) \text{ för } 0 < t < \pi. \\ \text{c) } \frac{\pi}{4}$$

$$4.10 \quad f(t) \sim 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}$$

b) Cosinusserien konvergerar mot $f(t)$ för alla t .

c) $\frac{\pi^2}{8}$

$$4.11 \quad f(t) \sim \frac{\pi}{8} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(4n+2)t}{(4n+2)^2}.$$

Serien konvergerar mot $f(t)$ för alla t .

$$4.12 \quad f(t) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{(-1)^n \sin \alpha \pi}{\alpha - n} e^{int}$$

$$4.13 \quad u(x, t) = e^{-t} \sin x + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-(2n+1)^2 t} \sin(2n+1)x$$

$$4.14 \quad u(x, t) = 1 + 3e^{-16t} \cos 4x$$

$$4.15 \quad u(x, t) = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} e^{-(2n+1)^2 t} \cos(2n+1)x$$

$$4.16 \quad \text{a) } u(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{-(2n+1)^2 t} \sin(2n+1)x$$

$$\text{b) } u(x, t) = \frac{8e^{-2t}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{-(2n+1)^2 t} \sin(2n+1)x$$

$$4.17 \quad u(x, t) = \frac{x}{\pi} + \sin x - e^{-t} \sin x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2 t} \sin nx$$

$$4.19 \quad \text{b) Visa först att } \int_0^{\pi} \frac{|\sin(N + \frac{1}{2})t|}{\sin \frac{1}{2}t} dt = 2 \int_0^{\pi} \frac{|\sin(N + \frac{1}{2})t|}{t} dt + O(1) =$$

$$2 \int_0^{N\pi} \frac{|\sin u|}{u} du + O(1). \quad \text{Utnyttja sedan att för } k \geq 3 \text{ är}$$

$$\frac{2}{\pi} \int_k^{k+1} \frac{du}{u} \leq \frac{2}{k\pi} \leq \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \leq \frac{2}{(k-1)\pi} \leq \frac{2}{\pi} \int_{k-2}^{k-1} \frac{du}{u}.$$

$$4.21 \quad \frac{1}{4}$$

$$5.1 \quad \text{a) } \frac{\pi^2 - 8}{16} \quad \text{b) } \frac{\pi^4}{90} \quad \text{c) } \frac{\pi^2}{8} \quad \text{d) } \frac{\pi^4}{96} \quad \text{e) } \frac{\pi^2}{\sin^2 \alpha \pi}$$

$$5.2 \quad f(t) \sim \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin 2nt. \quad S = \frac{\pi^2}{64}.$$

$$5.3 \quad \text{Ortogonal polynom: } 1, t, t^2 - \frac{1}{2}. \quad \text{Minimerande polynom: } \frac{4}{5}t^2 + \frac{4}{15}.$$

$$5.4 \quad \frac{3}{4}(11e^{-1} - e) - 3e^{-1}t + \frac{15}{4}(e - 7e^{-1})t^2$$

$$5.5 \quad \text{Minimum} = -\frac{7}{2}e^2 + 20e - \frac{57}{2}.$$

Minimerande polynom: $(18 - 6e)t + 4e - 10$.

$$5.6 \quad \text{Ortogonal polynom: } 1, t, t^2 - \frac{1}{5}. \quad \text{Minimerande polynom: } \frac{35}{32}t^2 + \frac{5}{32}.$$

$$5.7 \quad \text{Ortogonal polynom: } 1, t, t^2 - \frac{3}{7}. \quad \text{Minimerande polynom: } \frac{77}{128}t^2 + \frac{63}{128}.$$

$$6.1 \quad \text{a) } \hat{f} = (10, -2 + 2i, -2, -2 - 2i) \quad \text{b) } \hat{f} = (2i, -4i, 6, -2 + 2i)$$

$$\text{c) } \hat{f} = (21, -3 + 3\sqrt{3}i, -3 + \sqrt{3}i, -3, -3 - \sqrt{3}i, -3 - 3\sqrt{3}i)$$

$$6.3 \quad \text{a) } (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \quad \text{b) } (0, 0, 1, 0)$$

$$6.4 \quad f = (1, \frac{i\sqrt{3}}{3}, -\frac{i\sqrt{3}}{3}), \quad \hat{g} = (0, 0, 3) \quad \text{och} \quad f * g = (0, 0, 0).$$

$$6.5 \quad f = (1, 2, -1, 0)$$

$$6.6 \quad \text{a) } f = (c, c, \dots, c)$$

b) Alla b med $\sum_{k=0}^N b_k = 0$. Lösningen är ej entydig.

$$6.7 \quad \text{Egenvärdena är } 8, -1 + i, 2 \text{ och } -1 - i.$$

$$6.8 \quad \text{a)}$$

$$\begin{bmatrix} i & -2 - i & 3 & 0 \\ 0 & i & -2 - i & 3 \\ 3 & 0 & i & -2 - i \\ -2 - i & 3 & 0 & i \end{bmatrix}$$

b) Egenvärden: $1, -2 - i, 5 + 2i$ och $-4 + 3i$. Motsvarande egenvektorer: $(1, 1, 1, 1), (1, i, -1, -i), (1, -1, 1, -1)$ och $(1, -i, -1, i)$.

$$6.12 \quad \text{a) } \hat{a} = (8, -2i, -4, 2i), \quad \hat{b} = (10, -2 + 2i, -2, -2 - 2i)$$

$$\text{b) } (18, (\sqrt{8} - 2)i, -4 + 2i, (\sqrt{8} + 2)i, -2, -(\sqrt{8} + 2)i, -4 - 2i, (2 - \sqrt{8})i)$$

$$6.13 \quad v = \frac{\sqrt{2}}{4}(-1 + \sqrt{2}, 1, -1 - \sqrt{2}, 1)$$

$$7.1 \quad \hat{f}(\omega) = 2i \frac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\omega^2}$$

$$7.2 \quad \frac{\pi}{b} e^{-ab} \quad (= \mathcal{F}\left[\frac{1}{b^2 + x^2}\right](a))$$

$$7.3 \quad \hat{f}(\omega) = 2 \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 4}, \quad I = \pi.$$

$$7.4 \quad \hat{f}(\omega) = 2\pi \frac{\sin \omega}{\omega} e^{-|\omega|}$$

$$7.5 \quad \text{a) } \hat{\varphi}_{\mu, \sigma}(\omega) = e^{-i\mu\omega - \sigma^2\omega^2/2}$$

b) $\varphi_{\mu_1, \sigma_1} * \varphi_{\mu_2, \sigma_2} = \varphi_{\mu_1 + \mu_2, \sigma}$, där $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. I sannolikhetssteoretiska termer betyder detta att summan av oberoende normalfördelade stokastiska variabler är normalfördelad och att summans medelvärde resp. varians är lika med summan av medelvärdena resp. varianserna hos de i summan ingående stokastiska variablerna.

$$7.7 \quad \text{a) } \hat{f}(\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$$

$$7.9 \quad f * g(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$$

$$7.11 \quad \text{a) } \hat{f}(\omega) = 4 \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} \quad \text{b) } \frac{2\pi}{3}$$

$$7.12 \quad \text{a) } \hat{f}(\omega) = 4 \frac{\sin \omega - \omega \cos \omega}{\omega^3} \quad \text{b) } \frac{2}{15}\pi$$

$$7.13 \quad \text{a) } \frac{\pi}{2} \quad \text{b) } \hat{g}(\omega) = \frac{e^{1+i\omega} - e^{-(1+i\omega)}}{(1+i\omega)^2} \quad \text{c) } \hat{f}(\omega) = \frac{1}{(1+i\omega)^2} \quad \text{d) } \frac{1}{2}$$

$$7.14 \quad \text{a) } \hat{f}(\omega) = 2 \frac{\cos \omega - \cos 2\omega}{\omega^2} \quad (= 4 \frac{\sin^2 \omega - \sin^2(\omega/2)}{\omega^2})$$

$$\text{b) } \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{c) } 4 \arctan 2 - \frac{\pi}{2} - \ln \frac{5}{2} \quad (\text{Använd Parsevals formel på polär form.})$$

$$7.15 \quad \text{a) } f * f(t) = (1 + |t|)e^{-|t|} \quad \text{b) } y(t) = -\frac{1}{2}(1 + |t|)e^{-|t|}$$

$$7.16 \quad f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}e^x & \text{om } x < 0 \\ \frac{4}{3}e^{-x/2} & \text{om } x > 0. \end{cases}$$

7.18 b) $\hat{f}(\omega) = \pi(e^{-|\omega|} - 1)$ c) $\pi(e - 1)$

8.1 a) $1 - e^{-t}$ b) $\frac{1}{5}e^{-2t} \sin 5t$ c) $(3t + 1)e^{2t} - e^{-t} \cos t$
 d) $\frac{1}{2}(t - 1) \sin(t - 1) \cdot H(t - 1)$ e) $(e^{2(t-1)} - e^{t-1})H(t - 1)$
 f) $\frac{e^{-3t} - e^{-2t}}{t}$

8.2 a) $\frac{1 - e^{-s}}{s}$ b) $\frac{1 - e^{-s}(s + 1)}{s^2}$ c) $\frac{1 - e^{-s}(s + 1)}{s^2(1 - e^{-s})}$

8.3 $f(t) = 2 \cos t - t \sin t$

8.4 $x(t) = -t + e^t - e^{-t}$, $y(t) = -1 + e^t + e^{-t}$

8.5 $f(t) = 4 - 3 \cos t$

8.6 $x(t) = 2e^t + \sin t$, $y(t) = \cos t$

8.7 $y(t) = z(t) = e^{2t}$

8.8 $y(t) = t + 2 + (2t - 2)e^t$

8.9 $\tilde{f}(s) = \arctan \frac{1}{s}$

8.10 $\tilde{f}(s) = \frac{1}{s} \ln(1 + \frac{1}{s})$

8.11 $\tilde{f}(s) = Cs^{-(a+1)}$, där $C = \int_0^\infty e^{-t} t^a dt = \Gamma(a + 1)$.

9.1 Den duala gruppen \widehat{G} består av fyra element χ_1 , χ_A , χ_B och χ_C som definieras av tabellen

x	0	a	b	c
$\chi_1(x)$	1	1	1	1
$\chi_A(x)$	1	1	-1	-1
$\chi_B(x)$	1	-1	1	-1
$\chi_C(x)$	1	-1	-1	1

Avbildningen $0 \mapsto \chi_1$, $a \mapsto \chi_A$, $b \mapsto \chi_B$, $c \mapsto \chi_C$ är en isomorfi mellan G och \widehat{G} , så de båda grupperna G och \widehat{G} är isomorfa.

9.2 Visa först att om $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ är en kontinuerlig icke-trivial multiplikativ funktion, dvs. om f uppfyller

(1) $f(s + t) = f(s)f(t)$ och $f(0) = 1$,

så är f automatiskt deriverbar med

$f'(t) = f'(0)f(t)$. Deriverbarheten följer genom att välja $\delta > 0$ så litet att $a(\delta) = \int_0^\delta f(s) ds \neq 0$ (här används att f är kontinuerlig och $f(0) = 1$) och sedan integrera identiteten i (1) med avseende på s över intervallet $[0, \delta]$, vilket efter ett variabelbyte leder till

$$f(t) = a(\delta)^{-1} \int_t^{t+\delta} f(u) du.$$

Sakregister

- Abels kriterium, 21, 33
- abelsk grupp, 193
- Abelsummation, 71
- absolutkonvergent, 18
- amplitud, 59
- amplitud-fasvinkelform, 59

- Bessels olikhet, 102

- $(C,1)$ -summa, 70
- Cauchyföljd, 14
- Cauchys konvergensprincip, 14, 17
- Cauchy–Schwarz olikhet, 95
- Cesàrosummation, 70
- cyklisk matris, 132

- Daubechies D6-wavelets, 235
- Diracmåttet, 185
- Dirichletkärna, 68, 151
- Dirichlets kriterium, 21, 33
- diskret grupp, 195
- dual grupp, 198

- entydighetssatsen, 42, 78, 155, 178
- exponentiellt växande, 168

- faltning, 51, 66, 129, 172, 197
- fasvinkel, 59
- Fejérkärnan, 72, 151
- fourierkoefficient, 57
- fourierserie, 57
- fouriertransformen, 144, 146, 159, 198
 - diskreta, 123
 - snabba, 136
- fullständig ON-mängd, 104

- fundamentallösning, 188

- Gibbs fenomen, 86
- Gram–Schmidts metod, 101
- grundvinkelfrekvens, 62
- grupp, 193
 - abelsk, 193
 - diskret, 195
 - dual, 198
 - lokalt kompakt, 195
 - topologisk, 194

- harmonisk analys, 197
- harmonisk svängning, 59
- Haarbas, 219, 229
- Haarmått, 195
- Heavisidefunktion, 184
- Hermitepolynom, 110

- impulssvar, 53
- inre produkt, 94
- inre produktrum, 94
- integralkriteriet, 20
- invers fouriertransform, 124
- inversionssatsen, 124, 144, 154

- jämförelsekriteriet, 19

- karakteristiska funktionen, 146
- karaktär, 120, 198
- kausalitet, 52
- konvergensabscissa, 168
- konvergensradie, 35
- kvotkriteriet, 19

- L^1 , 9, 197
- L^2 , 98, 197
- ℓ^2 , 96
- Laguerrepolyinom, 110
- Laplacetransformen, 169
- Lebesgues sats om
 - dominerad konvergens, 29
- Legendrepolyinom, 110
- likformig konvergens, 25, 26
- lokalisering, 205
- lokaliseringsprincipen, 83
- lokalt kompakt grupp, 195
- multiplikativitet, 120
- nedsamplingsoperator, 134, 209
- nollmängd, 10
- norm, 94
- normerad, 99
- ortogonal, 99
- ortonormal, 99
- oändlighetsnormen, 11
- Parsevals formel, 106, 127, 145, 159
- partiell rekonstruktion, 228
- Plancherels sats, 161, 203
- potensserie, 34
- Pythagoras sats, 100
- Riemann-Lebesgues lemma, 13
- rotkriteriet, 19
- Shannonbas, 220, 233
 - reell, 222
- snabba fouriertransformen, 136
- summationskärna, 74, 151
- svart låda, 52
- systemmatris, 215
- tidsinvarians, 52
- Tjebysjovpolyinom, 110
- topologisk grupp, 194
- translat, 65, 119, 194
- translation, 49, 119, 194
- translationsinvariant, 130
- triangelolikheten, 9, 95
- trigonometrisk form, 58
- uppsamplingsoperator, 134, 209
- variabelseparation, 2
- viktfunktion, 109, 182
- vinkelfrekvens, 59
- wavelet
 - bas, 217
 - filterföljd, 223, 227
 - generator, 217
- Weierstrass approximationssats, 87
- Weierstrass majorantsats, 26
- z-transformen, 41
- överföringsfunktion, 181