

1. Hur många "ord" kan bildas genom att kasta om bokstäverna i *VALHALLA om*
- (a) "ordet" måste börja med ett *L*?
 - (b) "ordet" måste innehålla bokstavsföljden *AL* (något *A* måste följas av ett *L*)?
 - (c) följden *AL* *inte* får förekomma i ordet?

Om ni inte klarar av a-delen behöver ni öva mer. De övriga två delarna är lite svårare (kräver en liten extra tanke).

2. (a) Hur många 5-siffriga positiva heltal kan bildas med siffrorna 1, 2, 3, 4, 5, 6 ?
- (b) Samma fråga som i a-delen *men* vi kräver nu att ingen siffra förekommer mer än en gång i talet.
- (c) Samma fråga som i a-delen *men* siffran 1 måste förekomma exakt två gånger.
- (d) Hur många utfall finns om 4 tärningar kastas? Exempel på 'utfall' är: en tärning visar 5 prickar, två tärningar visar 3 prickar och en tärning visar 2 prickar. Vi tänker oss alltså att de 4 tärningarna *inte* har någon ordning sinsemellan.

Ni bör klara av (a)–(c); öva mer annars. Sista delen är lite svårare.

3. (a) En talföljd definieras rekursivt genom $a_0 = 8$, $a_{n+1} = 2a_n - 3$. Formulera vad som skall visas i basfallet och i induktionssteget i ett induktionsbevis av påståendet att $a_n = 5 \cdot 2^n + 3$ är en sluten formel för talföljden. (Om ni tycker att det praktiska utförandet är enklare än själva formuleringen av vad man gör, så gör först (b)-delen och beskriv sedan vad du visade i basfallet och induktionssteget.)
- (b) Genomför induktionsbeviset som nämns i (a)-delen.

Öva mer om ni inte klarar a-delen. Det är viktigt att ni förstår själva principen med ett induktionsbevis; alltså vad som skall visas i basfallet och i induktionssteget för ett givet induktionsproblem.

Lycka till!

lösningsförslag på nästa sida

Lösningsförslag

1. (a) Vi tänker oss 8 platser, från vänster till höger, där de bokstäverna i VALHALLA skall placeras ut. Alla A:n betraktas som identiska, så det är bara vilka platser som de befinner sig på som har betydelse; och samma sak för alla L:en. Eftersom vi måste ha ett L på första platsen (enligt uppgiftsformuleringen) så har vi kvar 2 L, 3 A, 1 V och 1 H, att placera ut på de kvarvarande 7 platserna. Två platser bland 7 för de två kvarvarande L:en kan väljas på $\binom{7}{2}$ sätt. Sedan kan tre platser bland 5 lediga för de tre A:na väljas på $\binom{5}{3}$. Sedan kan en plats bland 2 lediga för V:et väljas på $\binom{2}{1} = 2$ sätt; och H:et måste ta de sista lediga platsen (bara 1 sätt). Enligt multiplikationsprincipen får vi att det sökta antalet är

$$\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot 2 = \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} \cdot 2 = 420.$$

(b) Den här uppgiften blev svårare än jag ursprungligen tänkte mig. Om uppgiften hade handlat om bokstavsföljden AH i stället för AL så hade uppgiften varit enklare (för att högst ett A kan följas av ett H, eftersom vi bara har ett H). Jag kommer i fortsättningen ibland kalla en bokstavsföljd AL för ett 'AL-block'. Vi kan tänka oss ett AL-block som en enda "bokstav" eftersom A:et och L:et i blocket inte får "klippas isär".

Med "ord" menar jag hela tiden sådana bokstavskombinationer som kan bildas genom att omfördela bokstäverna i VALHALLA. Jag börjar med att låta x vara antalet ord som innehåller (exakt) tre AL-block. Så x är antalet ord som kan bildas genom att, på olika sätt, fördela 3 AL-block samt bokstäverna V och H på 5 platser. Detta kan göras på $\binom{5}{3} \binom{2}{1} = 20$ sätt, så $x = 20$.

Sedan låter jag y vara antalet ord som innehåller *exakt två* AL-block. Jag tänker mig nu att vi har 6 platser där två AL-block, ett A, ett L, ett V och ett H skall placeras ut. Man kan välja platser för de två AL-blocken på $\binom{6}{2}$ sätt; sedan kan platser för de återstående bokstäverna A, L, V, H väljas på $4!$ sätt (notera att $4! = \binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{1}{1}$). Så man skulle nu kunna tro att $y = \binom{6}{2} \cdot 4!$. Men i detta uttryck så har vi även räknat med de ord som innehåller 3 AL-block, eftersom det tredje A:et och tredje L:et kan råka bilda ett tredje AL-block. Inte nog med det, vi har dessutom räknat varje ord med 3 AL-block tre gånger. För att inse detta, betrakta ordet ALALHALV med 3 AL-block. Ordet kunde ha fått, enligt den konstruktionsmetod som ovanstående uträkning baseras på, genom att först välja platserna 1 och 2 för två AL-block (ALALHALV); men vi kunde också först ha valt platserna 1 och 5 för AL-blocken ALALHALV; eller så kunde vi först ha valt platserna 3 och 5 för AL-blocken (ALALHALV). Därför får vi $y = \binom{6}{2} \cdot 4! - 3x = 360 - 3 \cdot 20 = 300$.

Låt nu z vara antalet ord som innehåller *minst ett* AL-block. Vi tänker oss 7 platser där vi placerar ut ett AL-block, två A, två L, ett V och ett H. Detta kan göras på $\binom{7}{1} \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{1}$ sätt. Men då har vi räknat varje ord med 3 AL-block 3 gånger och varje ord med exakt 2 AL-block 2 gånger (vilket inses på liknande sätt som vi resonerade ovan). Så $z = \binom{7}{1} \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{1} - 2x - y = 840 - 40 - 300 = 500$, vilket är det sökta antalet i (b)-uppgiften.

(c) Antalet ord som kan bildas genom omfördelning av bokstäverna i VALHALLA är $\binom{8}{3} \binom{5}{3} \binom{2}{1} = 1120$. Antalet ord som *inte* innehåller något AL-block blir då $1120 - z = 1120 - 500 = 620$.

2. (a) Vi har 5 platser att placera ut siffror på. På varje plats har vi 6 valmöjligheter, eftersom varje plats får innehålla vilken som helst av siffrorna 1, 2, 3, 4, 5, 6. Sålunda kan, enligt multiplikationsprincipen, 6^5 olika positiva 5-siffriga heltal bildas med dessa siffror.

(b) Vi har 6 val för den första platsen, 5 val för den andra (eftersom varje siffra för förekomma högst en gång), 4 val för den tredje platsen, 3 val för den fjärde och 2 för den femte. Enligt multiplikationsprincipen så kan $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ olika 5-siffriga tal med de givna siffrorna bildas om varje siffra får förekomma högst en gång.

(c) Det finns $\binom{5}{2}$ sätt att välja två platser bland fem möjliga för de två ettorna. Sedan har vi 3 platser kvar, och på varje sådan har vi 5 valmöjligheter (vi får inte välja en etta igen) oberoende av tidigare val. Enligt multiplikationsprincipen så är det sökta antalet $\binom{5}{2} 5^3 = 1250$.

(d) Varje utfall kan kodas som en följd bestående av 4 ettor och 5 nollor, i någon ordning (tex. 100101100). En sådan följd kodar ett utfall på följande sätt. Antalet ettor till vänster om första (från vänster räknat) nollan motsvarar antalet tärningar som visar 1 prick. Antalet ettor mellan första och andra nollan motsvarar antalet tärningar som visar 2 prickar. Antalet ettor mellan andra och tredje nollan motsvarar antalet tärningar som visar 3 prickar. Och så vidare på samma sätt. Exempelvis kodar följden 100101100 följande utfall: en tärning visar 1 prick, en tärning visar 3 prickar, och 2 tärningar visar 4 prickar. Antalet följder bestående av 4 ettor och 5 nollor är detsamma som antalet sätt att välja 4 platser för ettorna bland $4 + 5 = 9$ möjliga platser, och detta antal är $\binom{9}{4} = (9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6)/(4 \cdot 3 \cdot 2) = 126$.

3.(a) I basfallet skall man visa att formeln $a_n = 5 \cdot 2^n + 3$ stämmer för $n = 0$. I induktionssteget skall man visa att *om* $a_n = 5 \cdot 2^n + 3$ stämmer för något n (bland $0, 1, 2, \dots$) så stämmer också $a_{n+1} = 5 \cdot 2^{n+1} + 3$; eller med andra ord, *om* $a_n = 5 \cdot 2^n + 3$ stämmer för något n så stämmer formeln också när man byter ut n mot nästa naturliga tal, som ju är $n + 1$.

(b) *Basfall*: Vi har $5 \cdot 2^0 + 3 = 5 \cdot 1 + 3 = 8 = a_0$, så $a_n = 5 \cdot 2^n + 3$ stämmer för $n = 0$.

Induktionssteg: Antag (som 'induktionsantagande/induktionshypotes') att

(IA) $a_n = 5 \cdot 2^n + 3$ stämmer för något n .

Vi skall nu bevisa att då stämmer även $a_{n+1} = 5 \cdot 2^{n+1} + 3$. (påståendet " $a_{n+1} = 5 \cdot 2^{n+1} + 3$ stämmer" kallas ibland induktionspåståendet). I det här fallet är det enklast att börja med att titta på a_{n+1} och använda definitionen av talföljden. Detta ger

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n - 3 \quad (\text{enligt definitionen}) \\ &= 2(5 \cdot 2^n + 3) - 3 \quad (\text{enligt (IA)}) \\ &= 2 \cdot 5 \cdot 2^n + 2 \cdot 3 - 3 \\ &= 5 \cdot 2 \cdot 2^n + 3 \\ &= 5 \cdot 2^{n+1} + 3, \quad \text{vilket skulle bevisas.} \end{aligned}$$

Enligt induktionsaxiomet så följer att den slutna formeln $a_n = 5 \cdot 2^n + 3$ stämmer för *alla* $n = 0, 1, 2, \dots$