

1. För var och en av följande olikheter, beskriv mängden av reella tal som uppfyller olikheten.

(a) $|3x - 2| > 1$.

(b) $|x + 1| < 2x$.

(c) $|x - 1| > |x + 3|$.

(d)

$$\frac{x+1}{4} > \frac{1}{x-2}.$$

Ni bör klara av a-delen och b-delen; öva mer annars. c-delen är inte så svår om man tänker sig vad den säger om punkters avstånd från två givna punkter på den reella tallinjen. (d) är lite svårare.

2. (a) Förenkla följande uttryck till ett heltal:

$$3^{\log_5(25^{10}) - \log_2(16^5)}.$$

(b) Förenkla följande uttryck till ett heltal:

$$\log_2 \left(2^{\log_6 18} \cdot 2^{\log_6 2} \right).$$

OBS! Jag har ändrat uppgiften i b-delen eftersom den ursprungliga inte gick att förenkla till ett heltal. Ursäkta mitt misstag.

(c) Finn alla lösningar till ekvationen

$$\log_{25}(x+2) = \log_5 x.$$

(d) Finna alla lösningar till ekvationen

$$(e^{2x} - 1)(\ln(2x+3) - 2\ln(x+1)) = 0.$$

‘ln’ betyder samma sak som ‘log_e’. (Om talet e kan ni läsa i *Calculus: A complete course*.)

Ni bör klara av a-delen och b-delen; öva mer annars. De två andra delarna är lite svårare.

Lycka till!

lösningsförslag på nästa sida

Lösningsförslag

1. Jag visar två sätt att lösa (a) och (b); ett sätt som använder definitionen av absolutbelopp, och ett sätt som använder en "räkneregel" för absolutbelopp och olikheter (som finns i *Calculus* och i mina föreläsninganteckningar).

(a) **Alternativ 1.** Använder definitionen av absolutbelopp och ger två fall.

FALL 1: Antag $3x - 2 \geq 0$. Då gäller att $|3x - 2| = 3x - 2$, så $|3x - 2| > 1 \iff 3x - 2 > 1 \iff x > 1$. Men vi får bara ta med de x som uppfyller vårt antagade¹ $3x - 2 \geq 0 \iff x \geq 2/3$. Eftersom alla x som är större än 1 givetvis också är större än $2/3$ så blev lösningarna i detta fall $x > 1$. (Men ibland kan man få minska ner lösningsmängden pga vissa lösningar till den ena olikheten inte är lösningar till den andra. Detta händer in b-uppgiften.)

FALL 2: Antag $3x - 2 < 0$. Då gäller att $|3x - 2| = -(3x - 2) = -3x + 2$, så $|3x - 2| > 1 \iff -3x + 2 > 1 \iff x < 1/3$. Antagandet $3x - 2 < 0$ ger $x < 2/3$, och eftersom $1/3 \leq 2/3$ så får vi lösningarna $x < 1/3$ i detta fall.

Slutligen tar vi alla lösningarna från båda fallen. Så x är en lösning till $|3x - 2| > 1$ om och endast om $x > 1$ eller $x < 1/3$. På intervallform så ser lösningsmängden ut så här: $(-\infty, 1/3) \cup (1, \infty)$.

Alternativ 2. Använder en av räknereglerna för absolutbelopp och olikheter; ger kortare lösning, men det är viktigt att man har koll på åt vilket håll olikheten "gapar"; det påverkar *vilken* räkneregel som skall användas.

$$\begin{aligned} |3x - 2| > 1 &\iff \\ 3x - 2 > 1 \text{ eller } 3x - 2 < -1 &\iff \\ x > 1 \text{ eller } x < 1/3. \end{aligned}$$

(b) **Alternativ 1.** FALL 1: Antag $x + 1 \geq 0$. Detta ger $|x + 1| < 2x \iff x + 1 < 2x \iff x > 1$. Antagandet ger $x \geq -1$. Eftersom $-1 \leq 1$ så får vi lösningarna $x > 1$ i detta fall.

FALL 2: Antag $x + 1 < 0$. Detta ger $|x + 1| < 2x \iff -(x + 1) < 2x \iff x > -1/3$. Antagandet ger $x < -1$. Så lösningarna x i fall 2 måste uppfylla både att $x < -1$ och $x > -1/3$. Finns det något sådant tal x ? Nej, inget tal på tallinjen kan samtidigt ligga både till vänster om -1 och till höger om $-1/3$ (eftersom $-1 < -1/3$). Alltså får vi *inga* lösningar i detta fall.

Lösningarna till $|x + 1| < 2x$ är alltså mängden av reella tal x sådana att $x > 1$. Mängden av lösningar kan på intervallform uttryckas $(1, \infty)$.

Alternativ 2. Observera att i jämförelse med a-uppgiften så "gapar" olikheten bort ifrån uttrycket med absolutbelopp så vi använder en annan av räknereglerna.

$$\begin{aligned} |x + 1| < 2x &\iff \\ -2x < x + 1 < 2x &\iff \\ -2x < x + 1 \text{ och } x + 1 < 2x &\iff \\ x > 1 \text{ och } x > -1/3 &\iff \\ x > 1 \text{ eftersom } 1 \geq -1/3. \end{aligned}$$

Sålunda är x en lösning till $|x + 1| < 2x$ om och endast om $x > 1$.

(c) Man kan lösa denna uppgift genom att använda definitionen av absolutbelopp eller med hjälp av räkneregler, som i a- och b-delen. Men det blir betydligt krångligare för denna uppgift. Vi kan i stället avända oss av faktumet att olikheten har en ganska enkel tolkning som ett påstående om avstånd på tallinjen. Olikheten $|x - 1| > |x + 3|$ säger samma sak som

$$|x - 1| > |x - (-3)|$$

¹När man antar något så måste man också ta i beaktning *alla* konsekvenserna.

och denna olikhet påstår att avståndet från x till 1 är större än avståndet från x till -3 . (Kan vara till hjälp att rita upp en tallinje med dessa punkter utmärkta.) Var någonstans är avståndet från x lika stort till 1 som till -3 ? Jo, i punkten som ligger mitt emellan 1 och -3 . Denna punkt är -1 . Om $x < -1$ (dvs. x är till vänster om -1) så är x närmare -3 än 1. Om $x > -1$ (dvs. x är till höger om -1) så är x närmare 1 än -3 . Så avståndet från x till 1 är större än avståndet till -3 om (och endast om) $x < -1$. Det betyder att x är en lösning till olikheten om och endast om $x < -1$. På intervallform kan lösningsmängden skrivas som $(-\infty, -1)$.

(d) Vi skriver om olikheten $\frac{x+1}{4} > \frac{1}{x-2}$ så att ena ledet är 0.

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{4} &> \frac{1}{x-2} \iff \\ \frac{x+1}{4} - \frac{1}{x-2} &> 0 \iff \\ \frac{(x+1)(x-2) - 4}{4(x-2)} &> 0 \iff \\ \frac{x^2 - x - 6}{4(x-2)} &> 0 \iff \\ \frac{(x-3)(x+2)}{4(x-2)} &> 0.\end{aligned}$$

För att ta reda på för vilka x som vänsterledet blir positivt (dvs. löser olikheten) så använder vi *teckentabell* (se mina föreläsningsanteckningar). Jag beskriver här med ord hur ni gör och vad resultatet blir, så får ni själva rita teckentabellen. Lägg märke till var någonstans faktorerna $(x-3)$, $(x+2)$ och $(x-2)$ i vänsterledet blir noll. Vi ser att "nollställena" är 3, -2 och 2. Skriv upp dessa tal på en tallinje (med lite mellanrum). Gör sedan en kolumn längst till vänster om det minsta talet, -2 . I kolumnen skriver ni, uppifrån ner, $(x+2)$, $(x-2)$, $(x-3)$ (ordningen är inte viktig). På raden med $(x+2)$ så noterar vi var någonstans (alternativen är $x < -2$, $-2 < x < 2$, $2 < x < 3$, $3 < x$) som $x+2$ är positiv, respektive negativ. Gör likadant för $(x-2)$ och $(x-3)$. Slutligen kollar ni var någonstans som $\frac{(x-3)(x+2)}{4(x-2)}$ blir positiv, respektive negativ. På detta sätt kommer man fram till att lösningarna till olikheten är (precis) de x som uppfyller att $-2 < x < 2$ eller $x > 3$. På intervallform kan lösningsmängden skrivas $(-2, 2) \cup (3, \infty)$.

2. (a)

$$3^{\log_5(25^{10}) - \log_2(16^5)} = 3^{10 \log_2(25) - 5 \log_2(16)} = 3^{10 \cdot 2 - 5 \cdot 4} = 3^0 = 1.$$

(b) **OBS!** Notera att jag har ändrat uppgiften.

$$\log_2 \left(2^{\log_6 18} \cdot 2^{\log_6 2} \right) = \log_2 \left(2^{\log_6 18 + \log_6 2} \right) = \log_2 \left(2^{\log_2(18 \cdot 2)} \right) = \log_2 \left(2^{\log_2 36} \right) = \log_2(2^2) = 2.$$

(c) Vi använder "basbytet": $\log_{25}(x+2) = \frac{\log_5(x+2)}{\log_5(25)}$.

$$\begin{aligned}\log_{25}(x+2) &= \log_5 x \implies \\ \frac{\log_5(x+2)}{\log_5(25)} &= \log_5 x \implies \\ \frac{\log_5(x+2)}{2} &= \log_5 x \implies \\ \log_5(x+2) &= 2 \log_5 x = \log_5(x^2) \implies \\ 5^{\log_5(x+2)} &= 5^{\log_5(x^2)} \implies \\ x+2 &= x^2 \implies \\ x^2 - x - 2 &= 0.\end{aligned}$$

Andragradsekvationen kan lösas med “p-q-formeln” och ger $x = 2$ eller $x = -1$. Men endast $x = 2$ löser den ursprungliga ekvation eftersom $\log_5 x$ inte är definierad för $x = -1$. Logaritmer är endast definierade för positiva tal.

(d) Se lösningen till uppgift 2 på tentan 2007-10-12, som finns nästan längst ner på kurshemsidan.