

1. Beräkna kvot och rest

(a) då $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$ delas med $x - 2$, och

(b) då $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 3$ delas med $x^2 - x - 2$.

Denna uppgift bör ni klara av; öva mer annars.

2. (a) En rot till ekvationen $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ är $x = 2$. Finn alla rötter till ekvationen.

(b) En rot till ekvationen $x^3 - x^2 + 3x + 5 = 0$ är $x = -1$. Finn alla rötter till ekvationen.

Denna uppgift bör ni klara av; öva mer annars.

3. (a) En rot till ekvationen $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4 = 0$ är $x = 1 - i$. Finn alla rötter till ekvationen.

(b) Skriv polynomet $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4$ som en produkt av polynom av grad 1.

(c) Skriv polynomet $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4$ som en produkt av *reellt* irreducibla faktorer.

(d) Bestäm samtliga lösningar till $x^3 + x^2 + ax - a^2 = 0$ om man vet att $x = 1$ är en lösning. Ledning: börja med att sätta in $x = 1$ i ekvationen och betäm vilka möjligheter för a som finns.

Lycka till!

svar på nästa sida

Svar och i vissa fall lösningsförslag

1. Med hjälp av divisionsmetoden som beskrivs i mina föreläsningssanteckningar på kurshemsidan får man:

(a) Kvot: $x^3 - x^2 + 2$. Rest: 3.

(b) Kvot: $x^2 - 2x + 2$. Rest: $-3x + 1$.

2. (a) En rot till ekvationen $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ är $x = 2$. Detta medför att $x^3 - 3x^2 + 4$ delas jämnt av $x - 2$ (dvs. resten blir noll). Division av $x^3 - 3x^2 + 4$ med $x - 2$ ger kvoten $x^2 - x - 2$ och resten 0, så

$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x - 2)(x^2 - x - 2).$$

Lägg märke till att uttrycket ovan är noll endast om någon av faktorerna i högerledet är noll. De övriga lösningarna till $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ (förutom $x = 2$) är alltså lösningar till

$$x^2 - x - 2 = 0,$$

vilket är en andragradsekvation. Med hjälp av (exempelvis) 'p-q-formeln' så får man fram lösningarna $x = -1$ och $x = 2$ till $x^2 - x - 2 = 0$. Samtliga lösningar till $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ är alltså $x = -1$ och $x = 2$.

(b) En rot till ekvationen $x^3 - x^2 + 3x + 5 = 0$ är $x = -1$. Alltså är $x^3 - x^2 + 3x + 5$ jämnt delbar med $x - (-1) = x + 1$. Division av $x^3 - x^2 + 3x + 5$ med $x + 1$ ger kvoten $x^2 - 2x + 5$ och resten 0, så

$$x^3 - x^2 + 3x + 5 = (x + 1)(x^2 - 2x + 5).$$

Lösningarna till $x^2 - 2x + 5 = 0$ är $x = 1 \pm 2i$. Så samtliga lösningar till $x^3 - x^2 + 3x + 5 = 0$ är $x = -1$ och $x = 1 \pm 2i$.

3. (a) Vi söker alla lösningar till $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4 = 0$. Eftersom $x = 1 - i$ är en rot/lösning till ekvationen, som har reella koefficienter, så är även $x = 1 + i$ en rot/lösning till samma ekvation. Detta betyder att både $(x - (1 - i))$ och $(x - (1 + i))$ delar $f(x)$ jämnt, eller med andra ord, är faktorer till $f(x)$. Då är även produkten $(x - (1 - i))(x - (1 + i)) = x^2 - 2x + 2$ en faktor till $f(x)$. Division av $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4$ med $x^2 - 2x + 2$ ger kvoten $x^2 - x - 2$ och resten 0, så

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - x - 2).$$

De övriga lösningarna till ekvationen $f(x) = 0$ är alltså lösningar till $x^2 - x - 2 = 0$. I uppgift 2(a) såg vi att lösningarna till $x^2 - x - 2 = 0$ är $x = -1$ och $x = 2$. Så samtliga lösningar/rötter till $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4 = 0$ är $x = 1 \pm i$, $x = -1$ och $x = 2$.

(b) Från (a)-delen följer att

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4 = (x - (1 - i))(x - (1 + i))(x + 1)(x - 2),$$

där alla faktorerna i högerledet har grad 1.

(c) Faktorerna $(x - (1 - i))$ och $(x - (1 + i))$ är inte reella eftersom koefficienterna $1 \pm i$ inte är reella tal. Men om vi multiplicerar ihop dessa två faktorer så får vi $x^2 - 2x + 2$ vilket är ett polynom med endast reella koefficienter; och eftersom $x^2 - 2x + 2 = 0$ saknar reella rötter så är $x^2 - 2x + 2$ ett *reellt irreducibelt* polynom. Alla reella polynom av grad 1 är, per definition, reellt irreducibla, så svaret till uppgiften blir

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4 = (x^2 - 2x + 2)(x + 1)(x - 2).$$

(d) Lösningsskiss: Vi får veta att $x = 1$ är en rot till ekvationen. Insättning av $x = 1$ i $x^3 + x^2 + ax - a^2 = 0$ ger

$$a^2 - a - 2 = 0$$

som har lösningarna $a = -1$ och $a = 2$. Vi undersöker nu vilka lösningar man får för respektive fall: $a = -1$ och $a = 2$.

Insättning av $a = -1$ i $x^3 + x^2 + ax - a^2 = 0$ ger

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$$

som har en lösning $x = 1$. På samma sätt som i uppgift 2 finner man att samtliga lösningar till $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ ges av $x = \pm 1$.

Insättning av $a = 2$ i $x^3 + x^2 + ax - a^2 = 0$ ger

$$x^3 + x^2 + 2x - 4 = 0$$

som har en lösning $x = 1$. På samma sätt som i uppgift 2 finner man att samtliga lösningar till $x^3 + x^2 + 2x - 4 = 0$ ges av $x = 1, -1 \pm \sqrt{3}$.