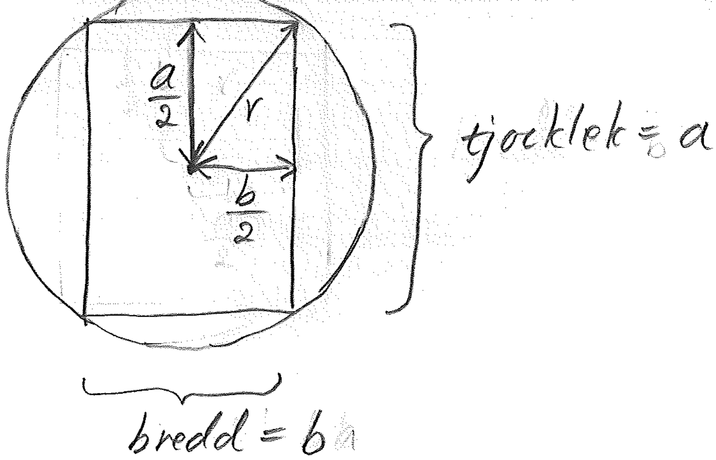
Problem där man söker extremvärden

Problem 1 En trädstam har formen av en cirkulär cylinder med radien r. Ur denna vill man såga ut en balk med rektangulär genomskärning och med så stor bärighet som möjligt. Bärigheten hos en balk är proportionell mot produkten av tjockleken gånger kuben av bredden. Vilket format bör ett tvärsnitt av balken ha?

Lösning.



För att maximera bärigheten så använder man så mycket som möjligt av trädstammen, vilket ger sambandet $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = r^2$.
Dessutom gäller, enligt information i uppgiften,

att för någon konstant $k > 0$ så är bärigheten $B = kba^3 =$

$\boxed{b = \sqrt{4r^2 - a^2}}$ $= k\sqrt{4r^2 - a^2} \cdot a^3$.

Vi söker det största värdet som $B(b)$ antar på intervallet $0 \leq a \leq 2r$ (eftersom $0 \leq \frac{\text{balkens tjocklek}}{2} \leq r$).

På detta intervall är $B(a) \geq 0$, och $B(a) = 0 \iff a = 0$ eller $a = 2r$.

$$B'(a) = \frac{-2ka}{2\sqrt{4r^2 - a^2}} \cdot a^3 + k\sqrt{4r^2 - a^2} \cdot 3a^2$$

$$= 3ka^2\sqrt{4r^2 - a^2} - \frac{ka^4}{\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

$$B'(a) = 0 \iff 3ka^2\sqrt{4r^2 - a^2} = \frac{ka^4}{\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

$$\iff 3ka^2(4r^2 - a^2) = ka^4$$

$$\iff 12kr^2a^2 - 3ka^4 = ka^4$$

$$\iff 12r^2 = 4a^2$$

$$\iff a^2 = 3r^2$$

$$\iff a = \sqrt{3}\,r$$

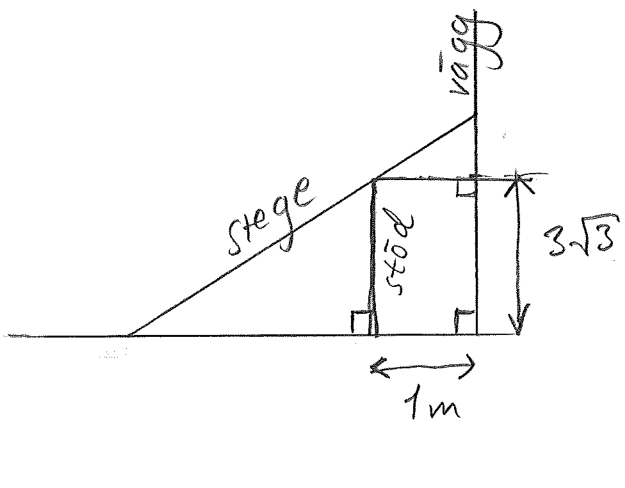
eftersom $a \geq 0$.

Eftersom $B(a)$ är kontinuerlig på $[0, 2r]$ så antar $B(a)$ ett största värde på intervallet i någon punkt a där $B'(a) = 0$ och enda möjligheten är $a = \sqrt{3} \cdot r$.

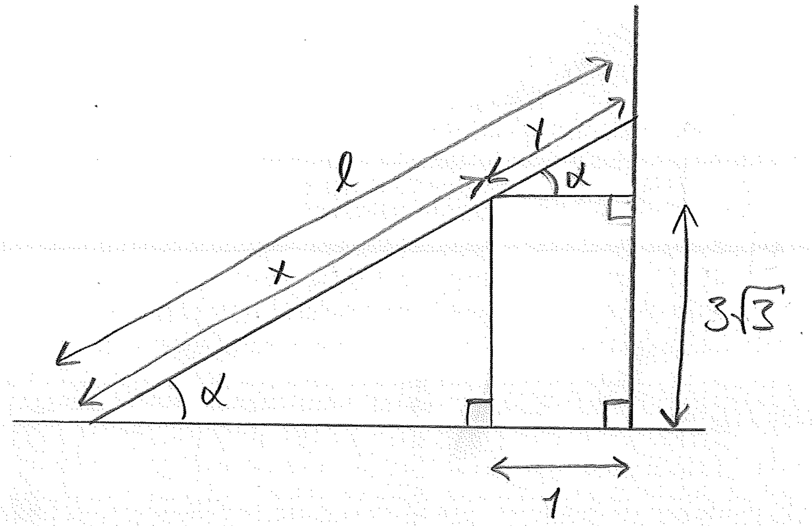
Störst bärighet uppnår man om tjockleken är $a = \sqrt{3}\, r$ och bredden är $b = \sqrt{4r^2 - (\sqrt{3}\, r)^2} =$

$$= \sqrt{4r^2 - 3r^2} = r.$$

Problem 2 En stege ställs på marken och lutas mot ett stöd enligt figur. Vilken är den minsta längden som stegen måste ha för att nå väggen?



Stegens längd l kan beskrivas som en funktion av vinkeln α enligt figur:



Vi har $l = x + y$ och

$$\sin\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{x} \quad \text{och} \quad \cos\alpha = \frac{1}{y}$$

vilket ger

$$l(\alpha) = \frac{3\sqrt{3}}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Vi är bara intresserade av $\alpha \in (\alpha, \frac{\pi}{2})$ (se figur) och $\lim_{\alpha \to 0+} l(\alpha) = \lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}-} l(\alpha) = \infty$.

Vi söker α som minimerar $l(\alpha)$.

$$l'(\alpha) = -\frac{3\sqrt{3}\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

$$l'(\alpha) = 0 \iff \frac{3\sqrt{3}\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \iff$$

$$3\sqrt{3}\cos^3\alpha = \sin^3\alpha$$

$$\iff \sqrt{3}\cos\alpha = \sin\alpha$$

$$\iff \sqrt{3} = \tan\alpha$$

$$\iff \alpha = \frac{\pi}{3}$$ eftersom vi antar att $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Kontinuiteten och deriverbarheten av $l(\alpha)$ på $(0, \frac{\pi}{2})$ medför att det minsta värdet antas i $\alpha = \frac{\pi}{3}$ vilket ger

$$l\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 6 + 2 = 8.$$

Stegen måste alltså vara minst 8 m lång.