

Gränsvärdesberäkningar med l'Hospitals regler

①

Exempel 1 Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

Vi ser att både täljare och nämnare går mot 0 då $x \rightarrow 0$. Derivering ger

$$\frac{d}{dx}(e^x - 1 - x) = e^x - 1$$

$$\frac{d}{dx} x^2 = 2x.$$

Men även i kvoten $\frac{e^x - 1}{2x}$ så går täljare och nämnare mot 0 då $x \rightarrow 0$. Derivering ger

$$\frac{d}{dx}(e^x - 1) = e^x$$

$$\frac{d}{dx} 2x = 2.$$

Med hjälp av l'Hospitals första regel två gånger får vi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Exempel 2. Beräkna $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}{(\ln x)^2}$ (2)

Lösning. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}{(\ln x)^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2}}{2(\ln x) \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{2} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}}{2 \ln x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{9x^{\frac{1}{2}}}{4} + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{4}}{\frac{2}{x}}$$

$$= \frac{-\frac{9}{4} + \frac{1}{4}}{2} = -1$$

både täljare och
nämnare går mot 0
då $x \rightarrow 1$.

Med l'Hospitals
ta regel.

Förenkling. Fortfarande
går både täljare och
nämnare mot 0 då
 $x \rightarrow 1$

l'Hospitals ta regel

Kommentar Det är inte alltid som l'Hospitals ta
regel är den bästa metoden för att beräkna ett
gränsvärde där både täljare och nämnare går mot 0..
Det kan hända att deriveringar bara ger krångligare
uttryck, eller att man behöver göra väldigt många
deriveringar. I sådana fall kan man i stället
försöka med metoden som använder Taylor-polynom.

(3)

Exempel Vi har tidigare sett "standardgränsvärdet" $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Bevisa detta med hjälp av l'Hospitals andra regel.

Bevis. Både täljare och nämnare går mot ∞ då $x \rightarrow \infty$. l'Hospitals 2a regel ger

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Exempel som visar att ett gränsvärde kan existera även om l'Hospitals regler inte ger svar på frågan.

Låt $f(x) = x + \sin x$ och $g(x) = x$.

Vi har $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sin x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$.

Kvoten $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1 + \cos x}{1}$ saknar gränsvärde då $x \rightarrow \infty$.

Ändå gäller att $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$,

eftersom $0 \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{x} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$.