Integraler

I kursboken definieras integraler och integrerbarhet med hjälp av gränsvärden av så kallade Riemann-summor.

Om funktionen f är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ så kommer bokens definition av $\int_a^b f(x)dx$ att sammanfalla med min definition nedan.

Antag att $a \leq b$ och att f är kontinuerlig på $[a,b]$.

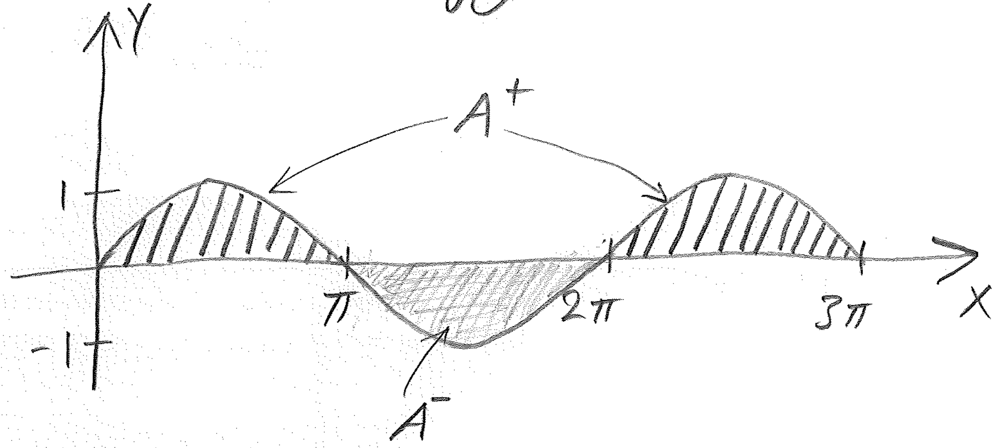
Låt A^+ beteckna området i xy-planet som innehåller alla punkter (x,y) sådana att $a \leq x \leq b$ och $0 \leq y \leq f(x)$, eller annorlunda uttryckt:

$$A^+ = \{(x,y) : a \leq x \leq b \text{ och } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Låt sedan

$$A^- = \{(x,y) : a \leq x \leq b \text{ och } f(x) \leq y \leq 0\}.$$

<u>Exempel</u> Om $f(x) = \sin x$, $a = 0$ och $b = 3\pi$, så är A^+ det "randiga" området, och A^- är det skuggade området.



<u>Definition</u> (Vi antar att f är kontinuerlig på $[a,b]$.)

$$\int_a^b f(x)\,dx = (\text{arean av } A^+) - (\text{arean av } A^-)$$

(Vi kallar uttrycket för 'integralen av f från a till b'.)

<u>Exempel</u> Antag att $f(x) = \sin x$.

Eftersom $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ så gäller (se exemplet ovan) att

$$(\text{arean av } A^+) = 2(\text{arean av } A^-) \text{ och}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{3\pi} \sin x\,dx &= (\text{arean av } A^+) - (\text{arean av } A^-)\\ &= 2(\text{arean av } A^-) - (\text{arean av } A^-)\\ &= \text{arean av } A^-.\end{aligned}$$

Vi definierar också (om $a \leq b$)

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Men hur räknar man ut $\int_a^b f(x)\,dx$?

(alltså, vad blir arean?)

Svaret ges av:

Analysens fundamentalsats

Antag att f är kontinuerlig på intervallet I.

(a) Om $F_1(x)$ och $F_2(x)$ är antiderivator till f på I, så finns en konstant C sådan att $F_2(x) = F_1(x) + C$ för alla $x \in I$.

(b) Om $a \in I$ och $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, så $F'(x) = f(x)$ för alla $x \in I$, dvs. F är en antiderivata till f på I.
(Variabeln t används här i integralen så att x blev fri att användas i $F(x)$.)

(c) Om $a, b \in I$ och F är vilken antiderivata som helst till f på I, så

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Bevis (a) Antag att F_1 och F_2 är antiderivator till f på I. På intervallet I gäller då att

$$\frac{d}{dx}\left(F_2(x) - F_1(x)\right) = F_2'(x) - F_1'(x)$$

$$= f(x) - f(x) = 0$$ (eftersom F_1 och F_2 antas vara antiderivator till f),

vilket medför att $F_2(x) - F_1(x)$ är konstant på I, och då finns C så att

$$F_2(x) = F_1(x) + C.$$

(b) Låt $a \in I$ och $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ för alla $x \in I$.

Vi behöver visa att, för godtyckligt $x \in I$, så

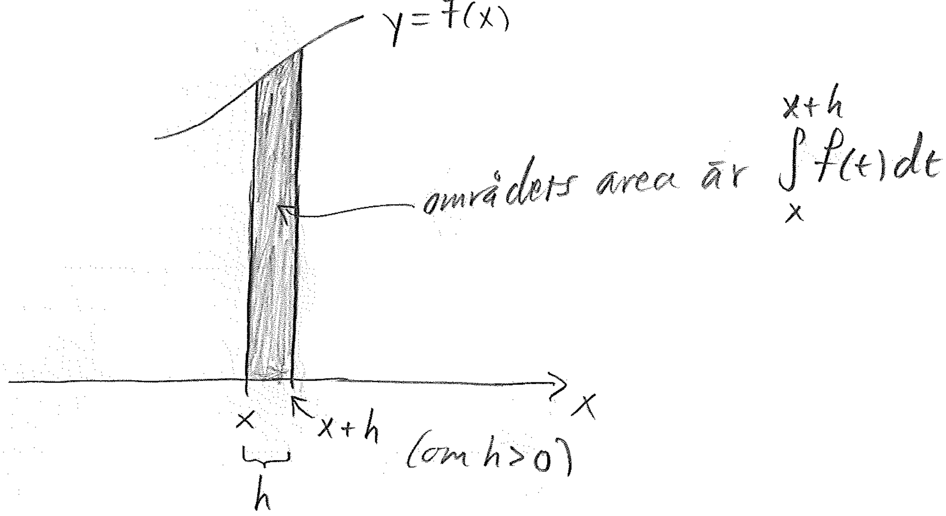
$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Notera att pga. definitionen av $\int_a^b f(t)\,dt$ så gäller för $a \le b \le c$ att $\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$

Vi får nu

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} =$$

$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$, där (arean av) den skuggade "strimlan" motsvarar $\int_x^{x+h} f(t)\,dt$, om $h>0$.



Om $f(x_1)$ är det största värdet som f antar på intervallet $[x, x+h]$ och $f(x_2)$ är det minsta värdet som f antar på samma intervall, så

$$h f(x_2) \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq h f(x_1)$$

vilket medför att

$$f(x_2) \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq f(x_1).$$

Eftersom f antas vara kontinuerlig och sålunda anta alla värden mellan $f(x_2)$ och $f(x_1)$, så följer att $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ är ett värde som f

antar på intervallet $[x, x+h]$. Eftersom f är kontinuerlig så följer att $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ går mot $f(x)$ då $h \to 0$, vilket medför

att $$\lim_{h\to 0+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x).$$

På liknande sätt visas att

$$\lim_{h\to 0-} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

(c) Vi visar först att, för $F_1(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

så $\int_a^b f(x)\,dx = F_1(b) - F_1(a)$, och sedan

att, för varje antiderivata F till f,

så $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

För F_1 har vi

$$F_1(b) - F_1(a) = \int_a^b f(t)\,dt - \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0 \text{ eftersom en linje har arean } 0.}$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx.$$

För en godtycklig antiderivata F till f så gäller, med hjälp av del (a) och (b), att

$F(x) = F_1(x) + C$ för någon konstant C, vilket ger

$$F(b) - F(a) = F_1(b) + C - (F_1(a) + C)$$

$$= F_1(b) - F_1(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$, enligt vad vi redan har visat för F_1.

Med detta är beviset av fundamentalsatsen klar.

Ett integraluttryck $\int f(x)\,dx$ utan "gränser" (beteckade 'a' och 'b' tidigare) kallas för <u>obestämd integral</u>, och betecknar en godtycklig antiderivata till f.

<u>Exempel</u> $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$ eftersom

<u>varje</u> antiderivata till x^2 har den angivna formen, för någon konstant C.

Exempel Beräkna $\int_0^{3\pi} \sin x \, dx$.

Lösning. $\int_0^{3\pi} \sin x \, dx = \boxed{\text{$-\cos x$ är en antiderivata till $\sin x$}} =$

$$-\cos(3\pi) - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2.$$

Ofta skriver man på följande sätt, vilket rekommenderas, där man först finner en antiderivata (inom hak-paranteser) och sedan sätter in gränserna:

$$\int_0^{3\pi} \sin x \, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{3\pi} =$$

$$= -\cos(3\pi) - (-\cos 0) = 2.$$

Exempel

$$\int \frac{2}{3x} \, dx = \frac{2 \ln x}{3} + C.$$

$$\int_1^2 \frac{2}{3x} \, dx = \left[\frac{2 \ln x}{3}\right]_1^2 = \frac{2 \ln 2}{3} - \frac{2 \ln 1}{3}$$

$$= \frac{2 \ln 2}{3} \quad \left(= \frac{\ln 4}{3}\right).$$

Räkneregler för integraler

(1) Om $a \le b \le c$ så

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx .$$

(2) $\displaystyle\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ om c är en konstant.

(3) $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(4) Om $g(x) \le f(x)$ för alla $x \in [a,b]$, så

$$\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx .$$

Den första regeln kan relativt enkelt härledas från definitionen av integral (för kontinuerlig f) i denna stencil. De övriga reglerna härleds enklast från definitionen av integral som använder Riemann-summor (se kursboken).

Areaberäkningar:

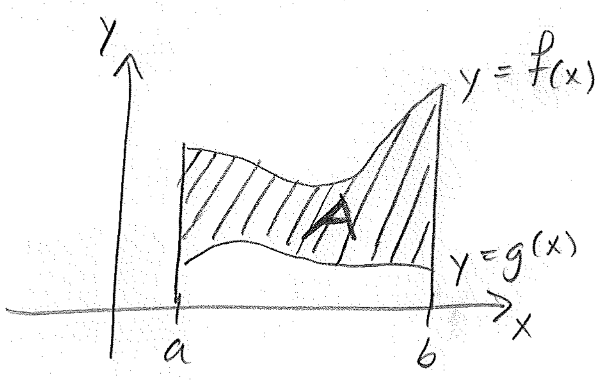
Om $f(x) \geq g(x)$ för alla $x \in [a,b]$ (där $a \leq b$),

så är arean av området

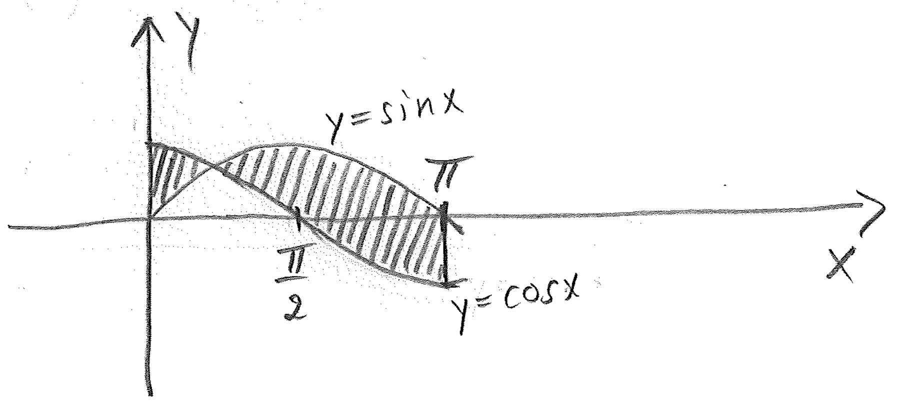
$A = \{(x,y) : a \leq x \leq b$ och $g(x) \leq y \leq f(x)\}$,

lika med $\displaystyle\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$.

Figur.



Problem Beräkna arean av området mellan linjerna $x=0$ och $x=\pi$ som begränsas av kurvorna $y=\sin x$ och $y=\cos x$.



Lösning Vi beräknar först punkten där kurvorna skär varandra och $0 < x < \pi$.

$$\sin x = \cos x$$

$$\Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ eftersom}$$

vi antar att $0 < x < \pi$.

Vi har $\cos x \geq \sin x$ på $[0, \frac{\pi}{4}]$ och $\sin x \geq \cos x$ på $[\frac{\pi}{4}, \pi]$ så områdets area är

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x\, dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos x\, dx$$

$$= \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} + \Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - \Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}.$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{4} - \sin 0\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{4} - (-\cos 0)\right)$$

$$+ \left(-\cos\pi - \left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)\right) - \left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 0\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) + \left(1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - \left(0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}.$$