Taylorpolynom och gränsvärdesberäkningar

Exempel Beräkna 3e gradens Taylorpolynom för $f(x) = e^{x^2}$ kring $x = 1$.

Lösning.

$$f'(x) = 2xe^{x^2}$$

$$f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}$$

$$f'''(x) = 12xe^{x^2} + 8x^3 e^{x^2}.$$

$f(1) = e$, $f'(1) = 2e$, $f''(1) = 6e$, $f'''(1) = 20e$.

Detta medför att $P_3(x) =$

$$f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$= e + 2e(x-1) + 3e(x-1)^2 + \frac{10e}{3}(x-1)^3$$

är 3e gradens Taylor-polynom för f kring $x = 1$.

<u>Viktig anmärkning:</u> I beräkningar kan det vara till hjälp att övergå från en funktion $f(x)$ till dess Taylor-polynom (kring en punkt $x=a$) av någon (lämplig) grad n, $P_n(x)$, och jobba vidare med uppskattningen/approximationen

$$f(x) = P_n(x) + O((x-a)^{n+1})$$

där ordo-termen '$O((x-a)^{n+1})$' berecknar felmarginalen i uppskattningen (i närheten av $x=a$). Enligt definitionen av 'ordo-begreppet' så gäller att

$$|O((x-a)^{n+1})| \leq C|x-a|^{n+1}$$

för någon konstant C och alla x som är tillräckligt nära a. Från detta följer att $O((x-a)^{n+1}) \to 0$ när $x \to a$.

Detta kommer vi att använda i gränsvärdesberäkningar.

Vi kommer att ha användning av följande räkneregler för ordo-uttryck, där m och n betecknar icke-negativa heltal.

(1) $$x^n = O(x^n)$$

(eftersom $C=1$ ger $|x^n| \leq C|x^n|$).

(2) $$O(x^n) \cdot O(x^m) = O(x^{n+m})$$

(eftersom $|f(x)| \leq C|x^n|$ och $|g(x)| \leq D|x^m|$ medför att $|f(x)g(x)| \leq CD|x^{n+m}|$).

(3) $$O(x^n) \pm O(x^m) = O(x^k) \text{ där } k = \min(n,m).$$

(4) $$\frac{O(x^n)}{O(x^m)} = O(x^{n-m}).$$

Samma regler gäller om man ersätter 'x' med '$x-a$', för något tal $a \in \mathbb{R}$, och 'då $x \to 0$' med 'då $x \to a$'.

<u>Övning</u> Härled från ovanstående regler att om c är en konstant så

$$c\,O(x^n) = O(x^n).$$

(Ledning: $c = O(x^0)$)

Exempel Beräkna $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\ln(1 + x^2)}$

Lösning med hjälp av Taylor-polynom.

(Notera att applikation av l'Hospitals regel, även om det eventuellt funkar, ger krångliga uträkningar.)

Låt $f(x) = \cos x$, $g(x) = \ln(1 + x^2)$.

$f'(x) = -\sin x$ $\qquad$ $g'(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

$f''(x) = -\cos x$ $\qquad$ $g''(x) = \dfrac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}$

$f'''(x) = \sin x$

Med Taylors sats får vi (kring $x = 0$)

$$\cos x = f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + O(x^4) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4).$$

$$\ln(1 + x^2) = g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + O(x^3)$$

$$= x^2 + O(x^3).$$

Detta ger $\dfrac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)} =$

$$= \frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right)}{x^2+O(x^3)} = \frac{\frac{x^2}{2}-O(x^4)}{x^2+O(x^3)}$$

här användes "ordoregler"

$$= \frac{x^2\left(\frac{1}{2}-O(x^2)\right)}{x^2\left(1+O(x)\right)} = \frac{\frac{1}{2}-O(x^2)}{1+O(x)} \to \frac{1}{2}$$

då $x \to 0$.

Alltså gäller: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\ln(1-x^2)} = \frac{1}{2}$.