

(6)

"Unikheten" för Taylor-polynom
 medför att, om $P_n(x)$ är Taylor-polynom
 för $f(x)$ av grad n , så
 kan ett Taylor-polynom för $f(g(x))$
 (eventuellt av annan grad än n) ibland fås
 genom substitutionen $P_n(g(x))$.

Exempel Taylor-polynom kring $x=0$
 (dvs. Maclaurin-polynom) av grad n
 för e^x är

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \text{ så}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}).$$

Låt $n=2$ och ersätt ' x ' med ' $-x^2$ '.
 Detta ger:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + O(x^6),$$

där $1 - x^2 + \frac{x^4}{2}$ är Taylor-polynom
 av grad 4 för e^{-x^2} kring $x=0$.

Övning Använd föregående exempel och informationen

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

För att beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - \cos(\sqrt{2}x)}{x^4}$$

Lösning. Om man låter $n=2$ och ersätter 'x' med ' $\sqrt{2}x$ ' i Taylor-utvecklingen ovan så får man

$$\cos(\sqrt{2}x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{6} - O(x^6).$$

Med hjälp av föregående exempel får man

$$\frac{e^{-x^2} - \cos(\sqrt{2}x)}{x^4} =$$

$$= \frac{1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + O(x^6) - \left[1 - x^2 + \frac{x^4}{6} - O(x^6) \right]}{x^4}$$

$$= \frac{\frac{x^4}{3} + O(x^6) - O(x^6)}{x^4} =$$

Obs! $O(x^6) - O(x^6)$
 $= O(x^6)$ enligt
 räkneregel (3) för
ordo-uttryck

(8)

$$= \frac{\frac{x^4}{3} + O(x^6)}{x^4} = \frac{x^4 \left[\frac{1}{3} + O(x^2) \right]}{x^4}$$

$$= \frac{1}{3} + O(x^2) \rightarrow \frac{1}{3} \text{ då } x \rightarrow 0.$$

Det följer att $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - \cos(\sqrt{2}x)}{x^4} = \frac{1}{3}.$

Kommentar Det finns ingen allmän regel för hur många termer i Taylor-utvecklingar som man behöver ta med för att kunna beräkna gränsvärden. Tumregeln är att man tar med minsta antal termer som möjliggör att man kan "dividera bort" en "besvärlig faktor" på formen x^k (eller $(x-a)^k$ om $a \neq 0$ och vi betraktar ett gränsvärde där $x \rightarrow a$) och få en konstant term i täljare, eller nämnare, eller båda.