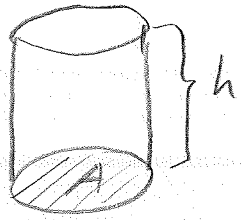
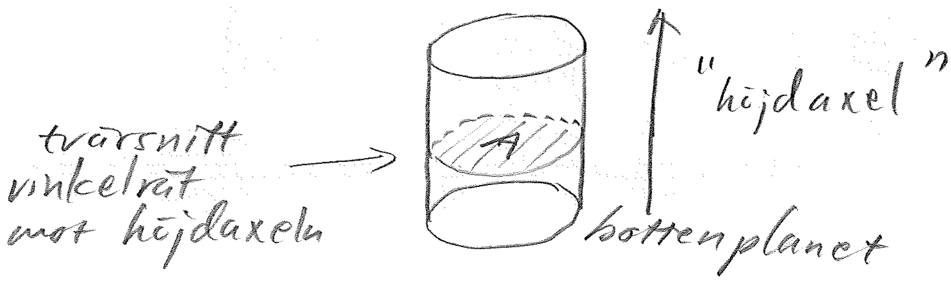
Tvärsnitt och volymberäkningar

En cylinder med cirkulär bottenarea A och höjd h



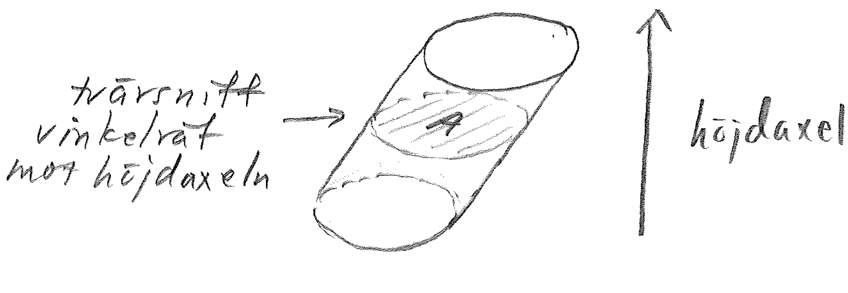
har volymen Ah, som bekant.

Notera att höjdaxeln är vinkelrät mot bottenplanet i detta fall, och att varje tvärsnitt genom cylindern som är vinkelrät mot höjdaxeln har samma area som cylinderns botten:

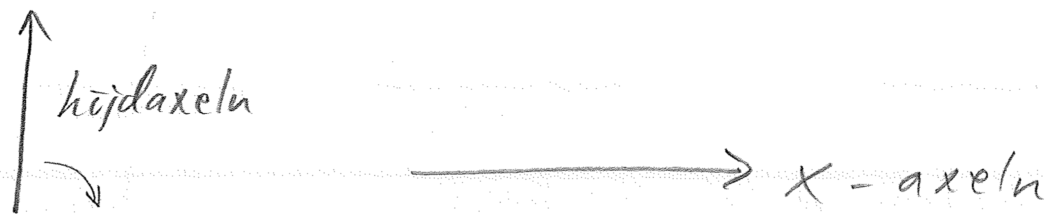


Det är detta som är det väsentliga för att volymen skall bli Ah.

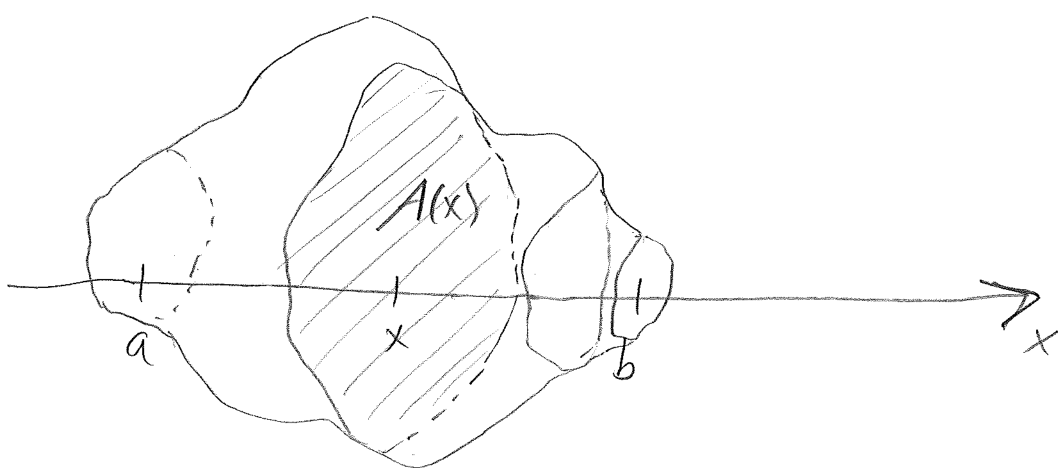
Även en sne cylinder, sådan att alla tvärsnitt vinkelräta mot höjdaxeln har arean A, har volymen Ah:



Låt oss nu vända på höjdaxeln så den ligger horisontell, och vi kallar den för x-axeln



De givna exemplen är specialfall av ett mer generellt samband.
Antag att en kropp (i 3 dimensioner) har utsträckning från $x=a$ till $x=b$ i x-led och, för varje $a \leq x \leq b$, tvärsnittet av kroppen som är vinkelrät mot x-axeln och skär x-axeln i punkten x har arean $A(x)$:



Då är kroppens volym

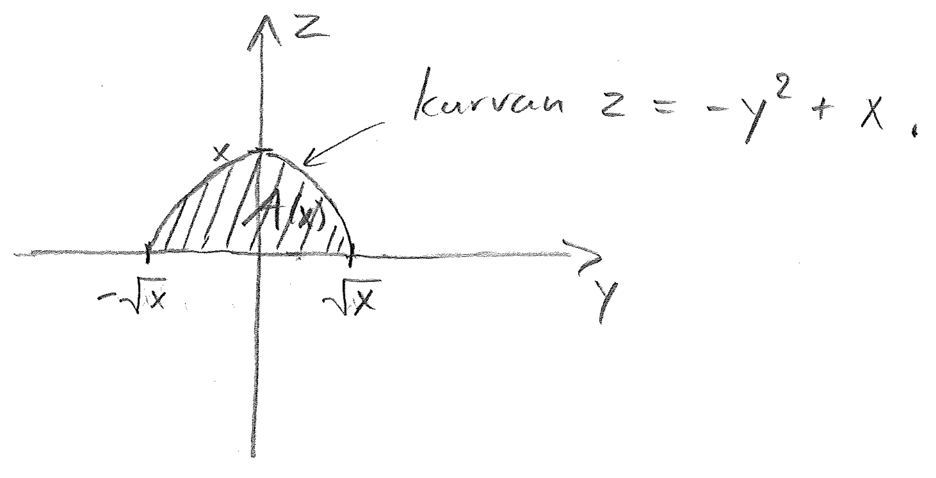
$$\int_a^b A(x)\,dx$$

(vi antar att $A(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$).

(Om $A(x) = A$ är konstant så förenklas detta till $\int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b A\,dx = [Ax]_a^b = A(b-a)$.)

Att ovanstående sätt att beräkna volymen fungerar kan inses genom att betrakta approximationer av volymen med hjälp av Riemannsummor.

Exempel Antag att en kropp har utsträckning mellan $x=0$ och $x=1$ längs x-axeln. Antag också att ett tvärsnitt av kroppen som är vinkelrät mot x-axeln och skär denna i punkt x har följande form:



Vad är kroppens volym?

Lösn. Vi beräknar först tvärsnitts-arean $A(x)$. Vi har

$$A(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (-y^2 + x)\,dy = 2\int_0^{\sqrt{x}} (-y^2+x)\,dy$$

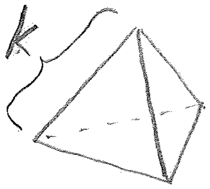
$$= 2\left[-\frac{y^3}{3} + xy\right]_0^{\sqrt{x}} = 2\left(-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + x^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3}.$$

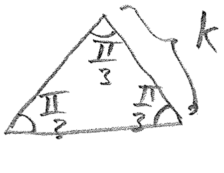
Kroppens volym är

$$\int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3}\,dx = \left[\frac{8x^{\frac{5}{2}}}{15}\right]_0^1 = \frac{8}{15}.$$

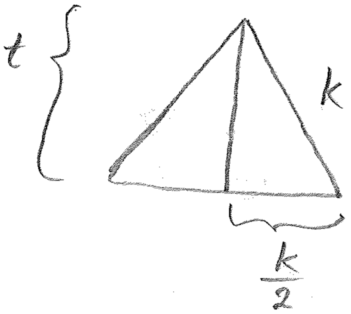
Exempel Beräkna arean hos en tetraeder vars alla kanter har längd k.



Lösning. Varje sida är en liksidig triangel så varje vinkel i sidan är $\frac{\pi}{3}$.

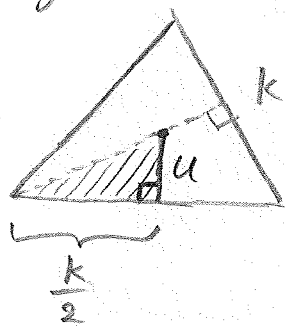


Vi har följande samband:



så $t^2 + \frac{k^2}{4} = k^2 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}\,k}{2}$ är "höjden" på tetraederns sidor.

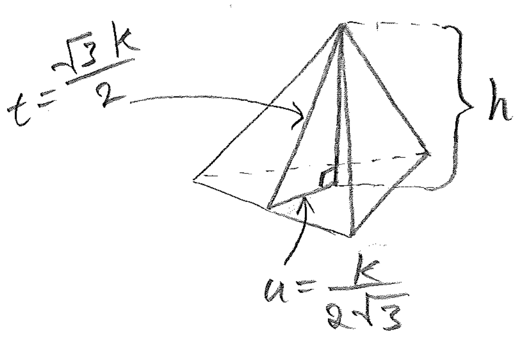
Dessutom gäller att:



där den streckade triangeln har vinklar $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ eftersom den streckade linjen antas skära den stora triangeln i lika stora delar.

Proportionerna i en sådan triangel medför att $u = \frac{k}{2\sqrt{3}}$.

Nu söker vi tetraederns höjd,



som ges av

$h^2 + u^2 = t^2 \Longrightarrow$

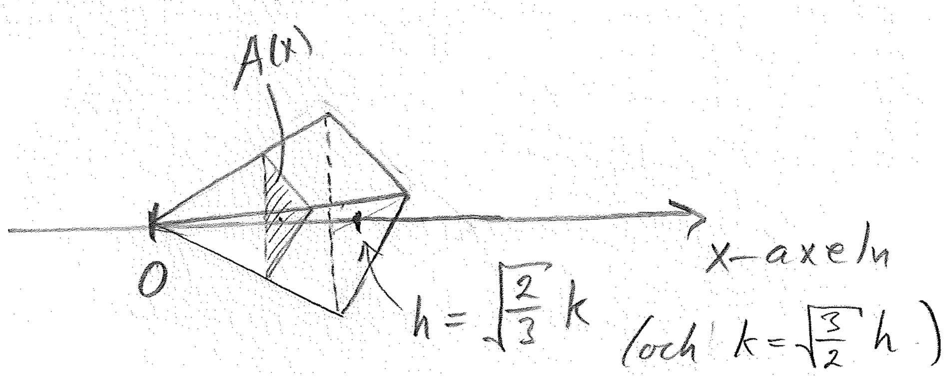
$$h^2 = \left(\frac{\sqrt{3}\,k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{3k^2}{4} - \frac{k^2}{12} = \frac{2k^2}{3}.$$

$$\Longrightarrow h = \sqrt{\frac{2}{3}}\,k.$$

Tetraederns bottenarea (A) är densamma som arean för en sida:

$$A = \frac{tk}{2} = \frac{\sqrt{3}\,k}{2} \cdot \frac{k}{2} = \frac{\sqrt{3}\,k^2}{4}.$$

Låt höjdaxeln representeras av x-axeln.



Eftersom tvärsnittet vid punkten $x \in [0, h]$ har kanter med längd $\sqrt{\frac{3}{2}}\,x$ så kommer dess area att vara (ersätt k med $\sqrt{\frac{3}{2}}\,x$ i formeln för A ovan)

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^2 = \frac{3\sqrt{3}}{8} x^2 \quad \left(= \left(\frac{x}{h}\right)^2 \frac{\sqrt{3}\,k^2}{4} = \left(\frac{x}{h}\right)^2 A \right)$$

Tetraederns volym blir således

$$\int_0^h A(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}k} \frac{3\sqrt{3}}{8} x^2 = \left[\frac{\sqrt{3}\,x^3}{8} \right]_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}k} = \frac{\sqrt{2}\,k^3}{12}.$$

Observera att rotation av en kurva $y = f(x)$ kring x-axeln ger tvärsnitt (vinkelräta mot x-axeln) vars area är $A(x) = \pi(f(x))^2$. Så formeln

$$\int_a^b \pi (f(x))^2 \, dx$$

för volymen av den kropp som bildas då $y = f(x)$, mellan $x = a$ och $x = b$, roterar kring x-axeln, är ett specialfall av den allmännare formeln

$$\int_a^b A(x) \, dx .$$

Övn. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då kurvan

$y = x \sin x$, mellan $x = 0$ och $x = \pi$

roterar kring x-axeln.

Lösn. Den sökta volymen ges av

$$\pi \int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x \, dx .$$

Vi finner först en antiderivata till $f(x) = x^2 \sin^2 x$.

$$\int x^2 \sin^2 x \, dx = \int x^2 \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cos 2x \right) dx$$

$$= \int \frac{x^2}{2} \, dx - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{F} \underbrace{\cos 2x}_{G'} \, dx$$

$$= \frac{x^3}{6} - \left(\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{F} \cdot \underbrace{\frac{\sin 2x}{2}}_{G} - \int \underbrace{x}_{F'} \underbrace{\frac{\sin 2x}{2}}_{G} \, dx \right)$$

$$= \frac{x^3}{6} - \frac{x^2 \sin 2x}{4} + \frac{1}{2} \int \underbrace{x}_{F} \underbrace{\sin 2x}_{G'} \, dx$$

$$= \frac{x^3}{6} - \frac{x^2 \sin 2x}{4} + \frac{1}{2} \left(\underbrace{x}_{F} \underbrace{\left(- \frac{\cos 2x}{2} \right)}_{G} - \int \underbrace{1}_{F'} \cdot \underbrace{\left(- \frac{\cos 2x}{2} \right)}_{G} dx \right)$$

$$= \frac{x^3}{6} + \frac{x^2 \sin 2x}{4} - \frac{x \cos 2x}{4} + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{x^3}{6} + \frac{x^2 \sin 2x}{4} - \frac{x \cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

Nu får vi

$$\pi \int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x \, dx = \pi \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2 \sin 2x}{4} - \frac{x \cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^4}{6} + \frac{\pi^2}{4}.$$