

(1)

Absolut och betingad konvergens

Definitioner Låt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vara en serie.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kallas för absolutkonvergent om $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ är konvergent.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kallas för betingat konvergent om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent men inte absolutkonvergent.

Definitionerna och satserna gäller även för serier $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ där m är något annat heltal än '1'.

Sats 10. Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är absolutkonvergent så är samma serie konvergent.

Bewis. Antag att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är absolutkonvergent.

Detta innebär att $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ är konvergent.

Låt $b_n = a_n + |a_n|$ för $n=1, 2, 3, \dots$

Eftersom $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ så gäller att

(2)

$$0 \leq \overbrace{a_n + |a_n|}^{b_n} \leq 2|a_n| \quad \text{vilket ger}$$

$$0 \leq b_n \leq 2|a_n|, \text{ s\aa enligt Sats 6}$$

\ar $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent. Eftersom b\ad

serierna $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ \ar konvergenta

s\aa \ar \ddven $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - |a_n|)$ konvergent,

$$\text{och eftersom } b_n - |a_n| = a_n + |a_n| - |a_n| = a_n,$$

s\aa \ar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Obs! Om $a_n \geq 0$ s\aa $|a_n| = a_n$.

Det f\oljer att om $a_n \geq 0$ f\or alla tillr\ackligt stora n , s\aa \ar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutkonvergent om och endast om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ \ar konvergent.

S\aa begreppen absolut- och betingad konvergens \ar av intresse endast d\aa o\andligt m\anga termer a_n \ar negativa.

(3)

Följande sats är användbar för serier där varannan term är positiv och varannan term är negativ, s.k. "alternerande serier".

Sats 11. Antag att att $a_n, n=1, 2, 3, \dots$ är en följd sådan att, för något heltal N ,

$$(1) \quad a_n a_{n+1} < 0 \quad \text{för } n \geq N$$

(vilket uttrycker att $a_n > 0$ och $a_{n+1} < 0$,
eller $a_n < 0$ och $a_{n+1} > 0$),

$$(2) \quad |a_{n+1}| \leq |a_n| \quad \text{för } n \geq N, \text{ och}$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Då är $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Övn./Ex. Avgör vilka serier som är konvergenta, absolutkonvergenta, betingat konvergenta eller divergenta.

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

$$(b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

$$(c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot \sqrt{n}}{n+5}$$

Lösning. (a) $\left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (4)

är konvergent. Jämförelsetestet (Sats 6)
medför att $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right|$ är konvergent, så

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ är absolutkonvergent, och därmed
även konvergent (Sats 10).

(b) Vi har $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ som

enligt integraltestet inte är konvergent.

Men vi har

$$(1) \quad \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{(-1)^{2n} (-1)}{n^2} = -\frac{1}{n^2}$$

för alla $n=1, 2, 3, \dots$,

$$(2) \quad \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right|$$

för alla $n=1, 2, 3, \dots$ och

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Så Sats 11 medför att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ är konvergent,
och därmed är serien betingat konvergent
(eftersom den inte är absolutkonvergent).

(c) På liknande sätt som i (b)

Följer att serien är konvergent, ej absolutkonvergent, och därmed betingat konvergent. För att visa att

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} \sqrt{n+1}}{n+6} \right| \leq \left| \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+5} \right|$$

kan man visa att funktionen $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+5}$ är avtagande för $x \geq 6$.

Följande sats uttrycker att i en absolutkonvergent serie så spelar termernas ordning ingen roll (för vilket tal som serien konvergerar mot), men i en betingat konvergent serie så har termernas ordning betydelse.

Sats 12

(1) Om termerna i en absolutkonvergent serie omordnas, så kommer den resulterande serien att konvergera mot samma tal som den första.

(2) Om en serie är betingat konvergent och r är vilket reellt tal som helst, så kan termerna i serien ordnas om på ett sådant sätt att den nya serien konvergerar mot r .