# Andra ordningens linjära differentialekvationer

En diff. ekv. av 2a ordningen kallas <u>linjär</u> om den kan skrivas som

$$(1) \quad y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = R(x).$$

(Man skriver ofta $y''$, $y'$ och $y$ i stället för $y''(x)$, $y'(x)$ och $y(x)$.)

<u>Övning/exempel</u> Vilka är linjära?

(a) $y'' + (x^2+1)y' + (\ln x)y = \cos x$

(b) $\dfrac{y''}{x} + y' + x^2 y = 0$

(c) $(x^3+x)y'' + x^2 y = e^x$

(d) $y'' + (x^2+y^2)y' + xy = e^x$

(Svar: a, b, c, men <u>inte</u> d.)

Om $R(x) = 0$ så kallas den linjära ekv. (1) för <u>homogen</u>. <u>Observera</u> att 'homogen' i detta sammanhang har en annan betydelse än då vi betraktade 1a ordningens (inte nödvändigtvis linjära) ekvationer.

I föregående exempel så är (b) homogen, men inte (a) eller (c) (och (d) är inte ens linjär).

Lite teori om 2a ordningens linjära ekv.

Sats 1 Om $y_1(x)$ och $y_2(x)$ är lösningar till (den homogena) ekvationen

(2) $y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0$

så är även $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ en lösning till (2), för varje val av konstanter $c_1$ och $c_2$.

Bevis. Antag att $y_1(x)$ och $y_2(x)$ är lösningar till (2). Då gäller att

$$y_1''(x) + P(x)y_1'(x) + Q(x)y(x) = 0 \quad \text{och}$$

$$y_2''(x) + P(x)y_2'(x) + Q(x)y_2(x) = 0,$$

vilket för $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ ger

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) =$$

$$= \left(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\right)'' +$$

$$P(x)\left(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\right)' +$$

$$Q(x)\left(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \right. =$$

$$= c_1\left(y_1''(x) + P(x)y_1'(x) + Q(x)y_1(x)\right)$$

$$+ c_2\left(y_2''(x) + P(x)y_2'(x) + Q(x)y_2(x)\right.$$

$$= 0 + 0 = 0.$$

Så även $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ är en lösning.

<u>Definition</u> Två funktioner $f(x)$ och $g(x)$ kallas för <u>linjärt beroende</u> på ett intervall $[a,b]$ om det finns en konstant $k \neq 0$ sådan att $f(x) = kg(x)$ för alla $x \in [a,b]$.

Funktionerna $f(x)$ och $g(x)$ kallas <u>linjärt oberoende</u> om de inte är linjärt beroende.

<u>Övn.</u> Är f och g linjärt beroende på [0, 2] om

(a) $f(x) = 1 + 2x^2$, $g(x) = 4 + 8x^2$

(b) $f(x) = e^x$, $g(x) = \cos x$ ?

(Svar: I (a) så är f och g linjärt beroende, men inte i (b).

<u>Sats 2</u> Om $y_1(x)$ och $y_2(x)$ är linjärt <u>o</u>beroende lösningar till (den homogena) ekvationen (2), så har varje lösning till (2) formen

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

för något val av konstanter $c_1$, $c_2$.
Med andra ord, så har (2) den allmänna lösningen

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

om $y_1(x)$ och $y_2(x)$ är linjärt oberoende lösningar.

(För bevis, se tex. 'Differential equations, theory, technique, and practice' av G.F. Simmons och S.G. Krantz.)

Vi tillämpar nu teorin på 2a ordningens linjära homogena ekvationer med *konstanta koefficienter*, dvs. ekvationer på formen

(3) $y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$

där $p$ och $q$ är (reella) *konstanter*.

Enligt Sats 2 så vet vi hur den allmänna lösningen ser ut om vi har funnit två linjärt oberoende lösningar.

Till en ekv. på formen (3) associeras 2a grads ekvationen

(4) $m^2 + pm + q = 0$

som kallas för den *karakteristiska ekvationen* till (3).

Vi behöver betrakta tre olika fall, beroende på hur rötterna till (4) ser ut.

<u>Fall 1</u> Antag att (4) har reella rötter $m_1$ och $m_2$, och $m_1 \neq m_2$.

Då är $y_1(x) = e^{m_1 x}$ och $y_2(x) = e^{m_2 x}$ två linjärt oberoende lösningar till (3) på $(-\infty, \infty)$, så den allmänna lösningen är i detta fall

$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}.$$

<u>Övning</u> (a) Visa att $y_1(x) = e^{m_1 x}$ och $y_2(x) = e^{m_2 x}$ är lösningar till (3).

(b) Visa att $y_1(x) = e^{m_1 x}$ och $y_2(x)$ är linjärt oberoende om $m_1 \neq m_2$.

Lösningsskiss till (a): Om $y_1(x)$ deriveras två gånger och $y_1$ samt dess derivator sätts in i (3) så får man

$$y_1''(x) + p y_1'(x) + q y_1(x) =$$
$$e^{m_1 x}(m_1^2 + p m_1 + q) = 0$$

eftersom $m_1$ är en rot till $m^2 + pm + q = 0$. På samma sätt för $y_2(x)$.

Lösningsskiss till (b):

Antag att $e^{m_1 x} = k e^{m_2 x}$ där $k \neq 0$ och $m_1 \neq m_2$. Eftersom $e^{m_1 x} > 0$ för alla $x$, så $k > 0$. Minst en av $m_1$ och $m_2$ är skild från 0. Om $m_2 \neq 0$ och vi sätter $x = \frac{1}{m_2} \ln \frac{1}{k}$ så får vi

$$e^{\frac{m_1}{m_2} \ln \frac{1}{k}} = k e^{\frac{m_2}{m_1} \ln \frac{1}{k}} = 1$$

så $\frac{m_1}{m_2} \ln \frac{1}{k} = 0$ vilket ger $m_1 = 0$

(eftersom $\ln \frac{1}{k} \neq 0$, för $k > 0$), men då är $e^{m_1 x}$ konstant, och inte lika med $k e^{m_2 x}$ för alla $x$ på något intervall med mer än en punkt. På samma sätt får man en motsägelse om $m_1 \neq 0$. Därför måste $e^{m_1 x}$ och $e^{m_2 x}$ vara linjärt oberoende.

Fall 2. Antag att (4) har icke-reella rötter $m_1 = a + bi$ och $m_2 = a - bi$ där a och b är reella tal och $b > 0$.

Då är $y_1(x) = e^{ax}\cos(bx)$ och $y_2(x) = e^{ax}\sin(bx)$ linjärt oberoende lösningar till (3), så den allmänna lösningen till (3) är

$$y(x) = c_1 e^{ax}\cos(bx) + c_2 e^{ax}\sin(bx)$$
$$= e^{ax}(c_1\cos(bx) + c_2\sin(bx)).$$

Övning Visa att $y_1(x)$ och $y_2(x)$, som ovan, är lösningar till (3) och linjärt oberoende (under ovan givna antaganden).

Fall 3. Antag att (4) har endast en rot $m$ (en s.k. 'dubbelrot').
Då måste $m$ vara reell (tänk på "p-q-formeln") och $y_1(x) = e^{mx}$ och $xe^{mx}$ är två linjärt oberoende lösningar till (3), så den allmänna lösningen till (3) är

$$y(x) = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx} = (c_1 + c_2 x)e^{mx}.$$

**Övning.** Visa att $y_1(x)$ och $y_2(x)$, som ovan definierade, är linjärt oberoende lösningar till (3) om $m$ är en dubbelrot.

**Övningar.** Lös ekvationerna (dvs, finn den allmänna lösningen)

(a) $y'' - 7y' + 10y = 0$

(b) $y'' + 2y' + 2y = 0$

(c) $y'' - 6y' + 9y = 0$

Början på lösningarna:
Den karakteristiska ekvationen

- till (a) är $m^2 - 7m + 10 = 0$
  med rötterna $m_1 = 2$, $m_2 = 5$
- till (b) är $m^2 + 2m + 2 = 0$
  med rötterna $m_1 = -1 + i$, $m_2 = -1 - i$
- till (c) är $m^2 - 6m + 9 = 0$
  med dubbelroten $m = 3$.

Tillämpa nu lämpligt fall (1, 2 eller 3) för (a), (b) och (c).