Kritiska punkter, (lokala) extremvärden, och kurvritning

Definition: En punkt a kallas för

- kritisk punkt till f om $f'(a) = 0$.
- total/global maximi-punkt om $f(a)$ är det största värdet som f antar.
- lokal maximipunkt om det finns $b < a < c$ så att f är definierad på (b, c) och $f(a)$ är det största värdet som f antar på (b, c).

På liknande sätt definieras total/global minimi-punkt och lokal minimi-punkt, genom att betrakta 'minsta' värdet i stället för 'största'.

Lokala maximi- och minimi-punkter kallas också för lokala extrempunkter.

Följande samband gäller:

1. Om a är en lokal extrempunkt för f så $f'(a) = 0$. (Men det kan hända att $f'(a)=0$ utan att f är en lokal extrempunkt.)

2. $f(x)$ är $\left\{\begin{matrix}\text{växande} \\ \text{avtagande}\end{matrix}\right.$ på intervallet I

   $\iff \left\{\begin{matrix} f'(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \end{matrix}\right.$ på I.

3. $f'(x)$, dvs. tangentlutningen, är $\left\{\begin{matrix}\text{växande} \\ \text{avtagande}\end{matrix}\right.$ på intervallet I

   $\iff \left\{\begin{matrix} f''(x) > 0 \\ f''(x) < 0 \end{matrix}\right.$ på I.

4. Om $f'(a) = 0$ och $\left\{\begin{matrix} f''(a) > 0 \\ f''(a) < 0 \end{matrix}\right.$ så är

   a en lokal $\left\{\begin{matrix}\text{minimi-} \\ \text{maximi-}\end{matrix}\right.$ punkt.

5. $f'(x) = 0$ för alla x i intervallet I

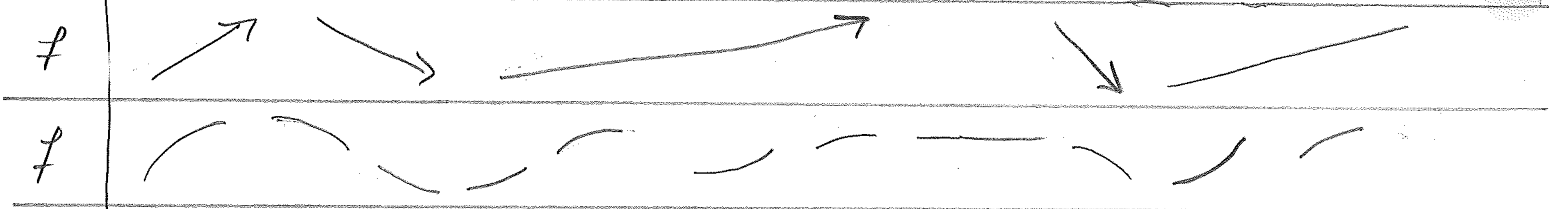
   $\iff f$ är konstant på I.

Kursboken använder följande terminologi:

- f är <u>konkav-upp</u> (uppåt konkav) på intervallet I om f' är växande på I.
- f är <u>konkav-ned</u> (nedåt konkav) på intervallet I om f' är avtagande på I.

<u>Exempel</u> Låt $0 < a < c_1 < c_2 < \ldots < c_{10} < b$ vara reella tal och antag att följande tabell ger information om vilket tecken (positivt/negativt/noll) som f' och f'' har på olika intervall. De två understa raderna indikerar med pilar om f är växande/avtagande, och med bågar om f är konkav-upp/konkav-ner, på respektive intervall.

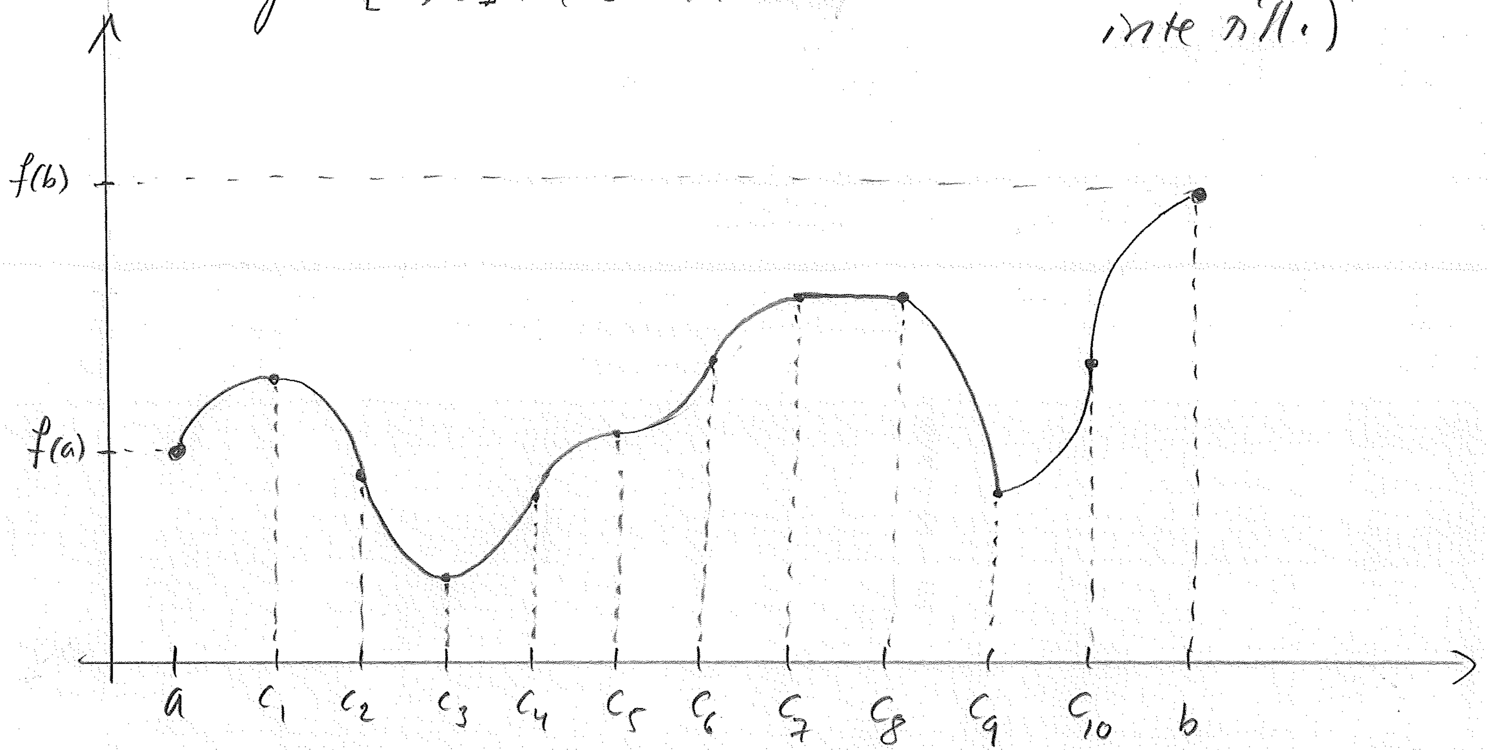
x	a		c_1		c_2		c_3		c_4		c_5		c_6		c_7		c_8		c_9		c_{10}		b
$f''(x)$			−		0		+		0	−	0	+	0	−	0	konstant noll	0	−		+		−	
$f'(x)$		+	0		−		0		+		0		+		0	konstant noll	0	−		+		+	



konkav-ned konkav-upp

Antag att $\lim_{x \to c_{10}} f'(x) = \infty$

Med denna information vet vi att grafen till f har ungefär följande form på $[a,b]$. (De faktiska värdena känner vi dock inte till.)



Notera att f' inte är definierad i c_9 och c_{10}.

<u>Exempel</u> Skissa grafen till $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

Derivering ger $f'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2(-2xe^{-x^2})$

$$= 2xe^{-x^2}(1-x^2).$$

$$f'(x)=0 \iff 2xe^{-x^2}(1-x^2)=0 \iff \begin{cases} 2xe^{-x^2}=0 \text{ eller} \\ 1-x^2=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x=0 \text{ eller} \\ x^2=1 \end{cases} \iff x=0 \text{ eller } x=\pm 1.$$

Man kan också skriva $f'(x) = 2x(1-x)(1+x)e^{-x^2}$ och då ser man att "teckentabellen" för f' blir

x		-1		0		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Vi ser nu att $x = \pm 1$ är lokala maximi-punkter och $x=0$ är en lokal minimi-punkt.

För att se var grafen är konkav-upp eller konkav ner behöver vi undersöka f''.

Efter förenklingar får man

$$f''(x) = e^{-x^2}(2 - 10x^2 + 4x^4),$$

och $f''(x) = 0 \iff 2 - 10x^2 + 4x^4 = 0$

$\iff x^4 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2} = 0 \iff x^2 = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{17}{16}}$

Detta ger $f''(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{17}{16}}}$.

Vi har $x_1 = -\sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{17}{16}}} \approx -\sqrt{2}$ (väldigt grov uppskattning)

$$x_2 = -\sqrt{\frac{5}{4} - \sqrt{\frac{17}{16}}} \approx -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{5}{4} - \sqrt{\frac{17}{16}}} \approx \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$x_4 = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{17}{16}}} \approx \sqrt{2}.$$

och $f''(x) = e^{-x^2} \cdot 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$.

Om vi lägger till dessa punkter till tabellen får vi

x		x_1	-1	x_2	0	x_3	1	x_4
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
$f(x)$								

Vi har dessutom att $f(0)=0$ och $f(-1)=f(1)=\frac{1}{e}$. Eftersom

$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} x^2e^{-x^2} = 0 \quad \text{(standard-gränsvärde)}$$

så ser grafen till f ut ungefär så här.

Lägg märke till att $x=\pm1$ är lokala och globala maximi-punkter, och att $x=0$ är en lokal och global minimi-punkt.