

Diagnostiskt prov 1

1. Ange en minsta övre gräns (supremum), samt största undre gräns (infimum), till mängden $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\}$.

2. Ange för var och en av talföljderna om den konvergerar, och i så fall mot vilket tal.

(a) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, för $n = 1, 2, 3, \dots$

(b) $b_n = \frac{2n^3+n}{3n^2}$, för $n = 1, 2, 3, \dots$

(c) $c_n = \frac{2n^3+n}{3n^3}$, för $n = 1, 2, 3, \dots$

(d) $d_n = \frac{2n^3+n}{3n^4}$, för $n = 1, 2, 3, \dots$

(e) $e_n = |a_n|$ där a_n är som i (a)-delen.

3. För exakt en av talföljderna i uppgift 2 gäller att $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \infty$, om f_n betecknar den talföljden. Vilken talföljd är det?

4. Ge den formella (dvs. precisa) definitionen av att en talföljd a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, konvergerar mot ett tal a , med symboler $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Kan du uttrycka detta med en något mindre formell utsaga?

5. (svårare) Låt f vara funktionen som definieras på alla reella tal på följande sätt:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x \text{ är irrationellt} \\ \sin x & \text{om } x \text{ är rationellt} \end{cases}$$

(a) Värdemängden till f , dvs. mängden $\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ (där $\mathbb{R}$ betecknar mängden av de reella talen), har både en minsta övre gräns och en största undre gräns. Förklara varför.

(b) Vad är den minsta övre gränsen, respektive största undre gränsen, till f 's värdemängd? Motivera ditt svar.