

Diagnostiskt prov 1, med svar/lösningar

1. Ange en minsta övre gräns (supremum), samt största undre gräns (infimum), till mängden $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\}$.

Svar: $3/2$ är minsta övre gräns. -1 är största undre gräns.

2. Ange för var och en av talföljderna om den konvergerar, och i så fall mot vilket tal.

(a) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, för $n = 1, 2, 3, \dots$

(b) $b_n = \frac{2n^3+n}{3n^2}$, för $n = 1, 2, 3, \dots$

(c) $c_n = \frac{2n^3+n}{3n^3}$, för $n = 1, 2, 3, \dots$

(d) $d_n = \frac{2n^3+n}{3n^4}$, för $n = 1, 2, 3, \dots$

(e) $e_n = |a_n|$ där a_n är som i (a)-delen.

Svar: (a) konvergerar inte.

(b) konvergerar inte.

(c) konvergerar mot $2/3$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 2/3$).

(d) konvergerar mot 0 ($\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$).

(e) konvergerar mot 1 ($\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 1$).

3. För exakt en av talföljderna i uppgift 2 gäller att $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \infty$, om f_n betecknar den talföljden. Vilken talföljd är det?

Svar: Talföljden b_n från (b)-delen.

4. Ge den formella (dvs. precisa) definitionen av att en talföljd a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, konvergerar mot ett tal a , med symboler $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Kan du uttrycka detta med en något mindre formell utsaga?

Svar: Formellt: För varje reellt tal $\varepsilon > 0$ så finns ett heltal N så att om $n \geq N$, så gäller att $|a - a_n| \leq \varepsilon$ (dvs. avståndet mellan a och a_n är högst ε).

Något mindre formellt: skillnaden (eller avståndet) mellan a_n och a är godtyckligt liten för alla tillräckligt stora n .

5. (svårare) Låt f vara funktionen som definieras på alla reella tal på följande sätt:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x \text{ är irrationellt} \\ \sin x & \text{om } x \text{ är rationellt} \end{cases}$$

(a) Värdeområdet till f , dvs. mängden $\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ (där $\mathbb{R}$ betecknar mängden av de reella talen), har både en minsta övre gräns och en största undre gräns. Förklara varför.

(b) Vad är den minsta övre gränsen, respektive största undre gränsen, till f :s värdeområde? Motivera ditt svar.

Svar/motivation: (a) Eftersom $-1 \leq \sin x \leq 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$, så följer från definitionen av f att $-1 \leq f(x) \leq 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Alltså är värdeområdet till f både uppåt och nedåt begränsad, och därför har värdeområdet både en minsta övre gräns och en största undre gräns (enligt en sats från mina föreläsningar; eller se Appendix III i kursboken).

(b) Kom ihåg att $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ (men tyvärr är inte $\frac{\pi}{2}$ rationellt vilket krånglar till det lite för f). Enligt en fundamental egenskap hos de rationella talen så finns för varje $n = 1, 2, 3, \dots$,

ett rationellt tal r_n så att $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} \leq r_n \leq \frac{\pi}{2}$. Denna talföljd konvergerar mot $\frac{\pi}{2}$ (se definition av konvergens i 4). Från definitionen av sinus följer att $\sin x$ är godtyckligt nära 1 för alla x som är tillräckligt nära $\frac{\pi}{2}$. Det följer att följden $\sin r_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, konvergerar mot 1. Eftersom $\sin r_n \leq 1$ för alla n så måste 1 vara en minsta övre gräns till värdemängden till f . På liknande sätt kan man förklara att -1 är en största undre gräns till värdemängden till f .