

Diagnostiskt prov 2 – svar/lösninagr

1. Beräkna gränsvärdena om de existerar, och ange om de inte existerar.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 + x^3}{x^5 - x^2 - 8} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^5 + x^3}{5x^4 + 3x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin x \text{ existerar inte}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (\sin x)^{-1} = \infty$$

2. Derivera var och en av funktionerna som ges av följande uttryck.

$$\frac{d}{dx}(2x \cos x) = 2 \cos x - 2x \sin x, \quad \frac{d}{dx} \frac{1}{\sin x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}, \quad \frac{d}{dx}(4x^3 + 2)^{\frac{2}{3}} = \frac{8x^2}{(4x^3 + 2)^{\frac{1}{3}}}$$

3. Vad har tangentlinjen till kurvan $y = (x - 2)^2$ i punkten där $x = 1$ för lutning?

Lösning. Tangentlinjen till kurvan $y = (x - 2)^2$ där $x = 1$ är $f'(1)$ om vi låter $f(x) = (x - 2)^2$. Eftersom $f'(x) = 2(x - 2)$ så får vi $f'(1) = -2$, som alltså är tangentlinjens lutning där $x = 1$.

4. Kom ihåg att en triangelns area ges av formeln $\frac{bh}{2}$, dvs. 'basen gånger höjden delat med två'. Bestäm den maximala arean bland alla trianglar som uppfyller att $b + h = 10$ (dvs. basen plus höjden är lika med 10). Annorlunda uttryckt: Vad är den största area som en triangel kan ha om $b + h = 10$?

Lösning. Villkoret $b + h = 10$ ger $h = 10 - b$, så arean A kan uttryckas som en funktion av endast variabeln b :

$$A(b) = \frac{b(10 - b)}{2} = 5b - \frac{b^2}{2}.$$

Eftersom både b (basen) och h (höjden) skall vara icke-negativa tal och inte större än 10 (pga. villkoret $b + h = 10$) så är vi intresserade av funktionen $A(b)$ på intervallet $0 \leq b \leq 10$. Eftersom $A(b)$ är kontinuerlig på intervallet $0 \leq b \leq 10$ så kommer den att anta ett största och ett minsta värde på det intervallet. Det minsta värdet (noll) antas i ändpunkterna $b = 0$ och $b = 10$; man ser att för $0 < b < 10$ så kommer $A(b)$ att vara positiv. I den punkt i intervallet $(0, 10)$ där $A(b)$ antar sitt största värde måste derivatan $A'(b)$ vara noll. Derivering ger $A'(b) = 5 - b$, och ekvationen $5 - b = 0$ har bara en lösning, $b = 5$. Därför måste $b = 5$ vara den punkt där $A(b)$ antar sitt största värde. Vi har $A(5) = \frac{25}{2}$, så $\frac{25}{2}$ är den största area som en triangel kan ha om $b + h = 10$.

5. En partikel rör sig i xy -planet längs kurvan $x = y^2$. En observatör står (hela tiden) i punkten $(x, y) = (2, 0)$. Var i sin bana (ange koordinaterna) är partikeln närmast observatören?

Lösning. Man kan lösa uppgiften genom att använda implicit derivering, men eftersom jag gav uppgiften innan jag hade gått igenom implicit derivering så löser jag den på annat sätt.

Man kan också lösa uppgiften genom att "vända på koordinatsystemet" och derivera $x(y) = y^2$ med avseende på y i stället för x .

Men jag gör så här istället (vilket inte är ett bättre/sämre förslag än de två ovan). Lägg märke till att kurvan $x = y^2$ är symmetrisk kring x -axeln (om man speglar den övre halvan av $x = y^2$ kring x -axeln så kommer den att hamna ovanpå den undre halvan av $x = y^2$). Eftersom observatörens position $(2, 0)$ är på x -axeln (och till höger om $(0, 0)$) så gäller följande: Om (a, b) är en punkt på den övre halvan (den över x -axeln) av kurvan $x = y^2$ som ligger på minimalt avstånd från observatören, så kommer $(a, -b)$ vara en punkt på den undre halvan av kurvan som ligger på samma avstånd (som (a, b)) från observatören; och omvänt. Så de räcker att betrakta den övre halvan av $x = y^2$ och för sådana (x, y) har vi $y = \sqrt{x}$ och $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Vi bortser till en början från den eventuella möjligheten att $(a, b) = (0, 0)$ och antar att $(a, b) \neq (0, 0)$. Om (a, b) är en punkt på kurvan $y = \sqrt{x}$ som ligger på minsta möjliga avstånd från $(2, 0)$ så måste linjen från $(2, 0)$ till (a, b) vara en normallinje till kurvan $y = \sqrt{x}$. Detta innebär att linjens ekvation är

$$y = -\frac{1}{y'(a)}x + m = -2\sqrt{a}x + m.$$

Eftersom linjen skall innehålla punkten $(2, 0)$ (där observatören står) så får vi

$$0 = -2\sqrt{a} \cdot 2 + m$$

vilket ger $m = 4\sqrt{a}$ och ekvationen

$$y = -2\sqrt{a}x + 4\sqrt{a}.$$

Eftersom ovan beskrivna linje skall skära kurvan $y = \sqrt{x}$ i punkten (a, b) så får vi

$$\sqrt{a} = b = -2\sqrt{a}a + 4\sqrt{a}.$$

Eftersom vi antar att $a \neq 0$ så kan vi dividera bort $\sqrt{a}$ och får

$$1 = -2a + 4$$

vilken har den enda lösningen $a = 3/2$. Detta ger $b = \sqrt{a} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ (eftersom (a, b) antas ligga på kurvan $y = \sqrt{x}$). Så av alla punkter (a, b) på kurvan $y = \sqrt{x}$ sådana att $a \neq 0$ så är $(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ den som är närmast $(2, 0)$.

Frågan är nu om $(0, 0)$, som också ligger på kurvan $y = \sqrt{x}$ är närmare $(2, 0)$ än vad $(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ är? Avståndet från $(2, 0)$ till $(0, 0)$ är 2, och med pytagoras sats räknar man fram att avståndet från $(2, 0)$ till $(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ är $\sqrt{\frac{7}{4}}$, vilket är mindre än 2. Alltså är $(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ en punkt på kurvan $x = y^2$ som är på minimalt avstånd från $(2, 0)$, och då är även (som förklarats tidigare), $(\frac{3}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}})$ en punkt på kurvan $x = y^2$ som är på minimalt avstånd ($= \sqrt{\frac{7}{4}}$) från $(2, 0)$.