

Diagnostiskt prov 3

1. Derivatan av $\sin^{-1} x$ är $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(a) Derivera funktionerna som ges av följande uttryck.

$$\left(\sin^{-1}(3x^2)\right)^3 \qquad \frac{\cos x}{\sin x}$$

(b) Uttryck derivatan av den högra funktionen (ovan) på ett sätt som bara använder 'sin' och de fyra räknesätten. (Ledning: $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$.)

(c) Uttryck den sedan på ett sätt som bara använder 'tan' (eller 'cot') och de fyra räknesätten.

(d) Beräkna andraderivatan av $\frac{\cos x}{\sin x}$.

2. Ge exempel som visar att **följande påståenden är falska**.

(a) Om en funktion är kontinuerlig i en punkt så är den också deriverbar i den punkten.

(b) En lokal maximipunkt är alltid en global maximipunkt.

(Att $x = a$ är en global maximipunkt innebär att funktionen antar sitt största värde i $x = a$. Att $x = a$ är en lokal maximipunkt innebär att det finns punkter b, c så att $b < a < c$ och funktionen antar sitt största värde på intervallet $[b, c]$ i punkten $x = a$.)

3. Ange ett så stort intervall som möjligt där funktionen $f(x) = \frac{1}{x^2}$ är injektiv, och ange sedan ett uttryck för inversen till f på detta intervall. Ange sedan ett annat intervall, som inte överlappar det föregående intervallet, där f är injektiv. Vad blir inversen till f på det senare intervallet?

4. Visa att kurvorna $xy = 1$ och $x^2 - y^2 = 2$ skär varandra i räta vinklar (dvs. i punkten/punkterna där kurvorna skär varandra är deras tangentlinjer vinkelräta mot varandra).

5. Vi har följande deriveringsregel för inversfunktioner: $\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

(a) Visa (med hjälp av regeln) att

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(b) Bevisa deriveringsregeln för inversfunktioner med hjälp av implicit derivering.