

## Diagnostiskt prov 3 – Svar/lösningar

1. Derivatan av  $\sin^{-1} x$  är  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

(a) Derivera funktionerna som ges av följande uttryck.

$$\left(\sin^{-1}(3x^2)\right)^3 \qquad \frac{\cos x}{\sin x}$$

**Svar:**

$$\frac{d}{dx} \left(\sin^{-1}(3x^2)\right)^3 = \frac{18x(\sin^{-1}(3x^2))}{\sqrt{1-9x^4}} \qquad \frac{d}{dx} \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

(b) Uttryck derivatan av den högra funktionen (ovan) på ett sätt som bara använder 'sin' och de fyra räknesätten. (Ledning:  $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ .)

**Svar:** Som i del (a).

(c) Uttryck den sedan på ett sätt som bara använder 'tan' (eller 'cot') och de fyra räknesätten.

**Svar:**  $-1 - \frac{1}{\tan^2 x}$  (eller  $-1 - \cot^2 x$ ).

(d) Beräkna andraderivatan av  $\frac{\cos x}{\sin x}$ .

**Svar:** Andraderivatan av  $\frac{\cos x}{\sin x}$  är lika med

$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^4 x} = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x} \qquad \left(\text{eller } \frac{\sin(2x)}{\sin^4 x}\right).$$

2. Ge exempel som visar att **följande påståenden är falska**.

(a) Om en funktion är kontinuerlig i en punkt så är den också deriverbar i den punkten.

**Svar:** Om en funktionsgraf är sammanhängande, men har en "kant", eller "spets" någonstans, så är motsvarande funktion kontinuerlig men inte deriverbar i punkten där grafen har en kant/spets. Ett sådant exempel är  $f(x) = |x|$  som är kontinuerlig i alla punkter, men inte deriverbar i punkten  $x = 0$ . (Jag skulle här godta ett svar som innehåller en skiss av en sammanhängande funktionsgraf med en kant/spets och kommentar som säger att funktionen som representeras av grafen är kontinuerlig men inte deriverbar i punkten där kanten/spetsen förekommer.)

(b) En lokal maximipunkt är alltid en global maximipunkt.

(Att  $x = a$  är en global maximipunkt innebär att funktionen antar sitt största värde i  $x = a$ . Att  $x = a$  är en lokal maximipunkt innebär att det finns punkter  $b, c$  så att  $b < a < c$  och funktionen antar sitt största värde på intervallet  $[b, c]$  i punkten  $x = a$ .)

**Svar:**  $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$  har en lokal maximipunkt i  $x = 0$ , men  $f$  antar hur stora värden som helst, så en global maximipunkt existerar inte. (Att  $f$  har en lokal maximipunkt i  $x = 0$  inser man genom att betrakta derivatan  $f'$ ; att  $f$  antar godtyckligt stora värden inser man

genom att betrakta  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ . Jag skulle på de här uppgiften också godta ett svar där man har skissat en graf som föreställer en funktion med en lokal maximipunkt, en "topp" eller "platå" (dvs. intervall där funktionen är konstant), på grafen, men där funktionen antar större värden än i "toppen/platån" någon annanstans.)

**3.** Ange ett så stort intervall som möjligt där funktionen  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  är injektiv, och ange sedan ett uttryck för inversen till  $f$  på detta intervall. Ange sedan ett annat intervall, som inte överlappar det föregående intervallet, där  $f$  är injektiv. Vad blir inversen till  $f$  på det senare intervallet?

**Svar:** De två största intervallen där  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  är injektiv är  $(-\infty, 0)$  och  $(0, \infty)$ . På intervallet  $(-\infty, 0)$  har  $f$  inversen  $f^{-1}(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ . På intervallet  $(0, \infty)$  har  $f$  inversen  $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

**4.** Visa att kurvorna  $xy = 1$  och  $x^2 - y^2 = 2$  skär varandra i rätta vinklar (dvs. i punkten/punkterna där kurvorna skär varandra är deras tangentlinjer vinkelräta mot varandra).

**Lösning:** Vi söker först punkten/punkterna där kurvorna skär varandra. Om  $(x, y)$  ligger på såväl kurvan  $xy = 1$  som på kurvan  $x^2 - y^2 = 2$ , så uppfyller  $(x, y)$  samtidigt båda ekvationerna så vi kan lösa ut  $y$  ur den första, vilket ger  $y = \frac{1}{x}$  och sedan substituera  $\frac{1}{x}$  för  $y$  i den andra ekvationen, vilket ger

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = 2 \implies x^4 - 2x^2 - 1 = 0 \implies x^2 = 1 + \sqrt{2} \quad (\text{eftersom } x^2 > 0).$$

Detta ger  $x = \pm\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ , och  $x = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$  ger  $y = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}$ , medan  $x = -\sqrt{1 + \sqrt{2}}$  ger  $y = -\frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}$ . Så kurvornas skärningspunkter är

$$(x, y) = (\sqrt{1 + \sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}) \quad \text{och} \quad (x, y) = (-\sqrt{1 + \sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}).$$

Vi beräknar nu lutningen för tangentlinjerna till respektive kurva i skärningspunkterna.  $xy = 1$  är ekvivalent med  $y = \frac{1}{x}$  och derivering (m.a.p.  $x$ ) ger  $y' = -\frac{1}{x^2}$ . Implicit derivering (m.a.p.  $x$ ) av  $x^2 - y^2 = 2$  ger

$$2x - 2yy' = 0 \implies x = yy' \implies y' = \frac{x}{y}.$$

Det följer att tangentlinjens lutning i  $(\sqrt{1 + \sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}})$  för kurvan  $xy = 1$  är

$$y'(\sqrt{1 + \sqrt{2}}) = -\frac{1}{(\sqrt{1 + \sqrt{2}})^2} = -\frac{1}{1 + \sqrt{2}},$$

medan tangentlinjens lutning i  $(\sqrt{1 + \sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}})$  för  $x^2 - y^2 = 2$  är

$$y'(\sqrt{1 + \sqrt{2}}) = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}} = 1 + \sqrt{2},$$

vilket visar att kurvornas tangentlinjer är vinkelräta i punkten  $(\sqrt{1 + \sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}})$ . (Kom ihåg att två linjer, med lutning  $k \neq 0$  och lutning  $c \neq 0$ , är vinkelräta om  $k = -\frac{1}{c}$ , och aldrig

annars.) På samma sätt som ovan kan man verifiera att kurvorna  $xy = 1$  och  $x^2 - y^2 = 2$  skär varandra i räta vinklar även i punkten  $(-\sqrt{1+\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}})$ .

5. Vi har följande deriveringsregel för inversfunktioner:  $\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ .

(a) Visa (med hjälp av regeln) att

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(b) Bevisa deriveringsregeln för inversfunktioner med hjälp av implicit derivering.

*Bevis av (b) finner ni i kursboken och i mina föreläsnings-slides.*

*Beviset av (a) liknar beviset av att derivatan av  $\sin^{-1} x$  är  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  (som finns i kursboken och mina föreläsnings-slides), men på grund av att derivatan av  $\cos x$  är  $-\sin x$  så får man minustecknet i  $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .*