

Diagnostiskt prov 4

1. Beräkna Taylor-polynomet av grad 2 för $f(x) = \frac{2}{x}$ kring punkten $x = 1$.

2. Bestäm gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x}}{x^{1000}}.$$

3. (a) Gör en så bra skiss som möjligt av grafen till funktionen f med hjälp av informationen att f har följande egenskaper:

- f och f' är deriverbara i varje punkt $x \in \mathbb{R}$,
- $f'(-1) = f'(2) = 0$, $f(2) = 4$,
- f' är positiv på intervallen $(-\infty, -1)$ och $(-1, 2)$,
- f' är negativ på $(2, \infty)$,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, och $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$.

4. Beräkna $\int_1^2 \frac{1}{x^4} dx$.

5. Bestäm om $\int_1^\infty \frac{1}{x^4} dx$ är konvergent och beräkna dess värde i så fall.

6. Antag att f är en kontinuerlig funktion på $[-2, 2]$ sådan att $f(-x) = -f(x)$ för varje $0 \leq x \leq 2$. Bestäm värdet av $\int_{-2}^2 f(x) dx$.

7. Skissa grafen till $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 3}$. Ange också om f har några lokala, eller globala, maximi- eller minimi-punkter (och var i så fall).

8. Beräkna gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x^2)}{e^{x^2} - e^{-x^2}}.$$

(Ledning: i något av fallen kan Taylor-utvecklingar av e^x och $\ln(1+x)$ (eller $\ln(1-x)$) upp till förstgradsternerna och sedan lämpliga substitutioner vara till hjälp, och kräver inte så mycket räknearbete.)

9. Ur ett klot med radien r vill man skära ut en cirkulär cylinder. Hur skall detta göras om cylinderns volym skall vara så stor som möjligt? (En cirkel med radien R har arean πR^2 . Man behöver inte använda en formel för klotets radie för att lösa uppgiften.)

10. Ett träklot har radien 2. Genom mitten av detta klot borrar ett hål med radien 1 (och borrarspånen avlägsnas). Vilken volym har den kropp som återstår? (Man kan se problemet som ett som handlar om rotationskroppar.)