Svar/lösningar till Diagn. prov 4

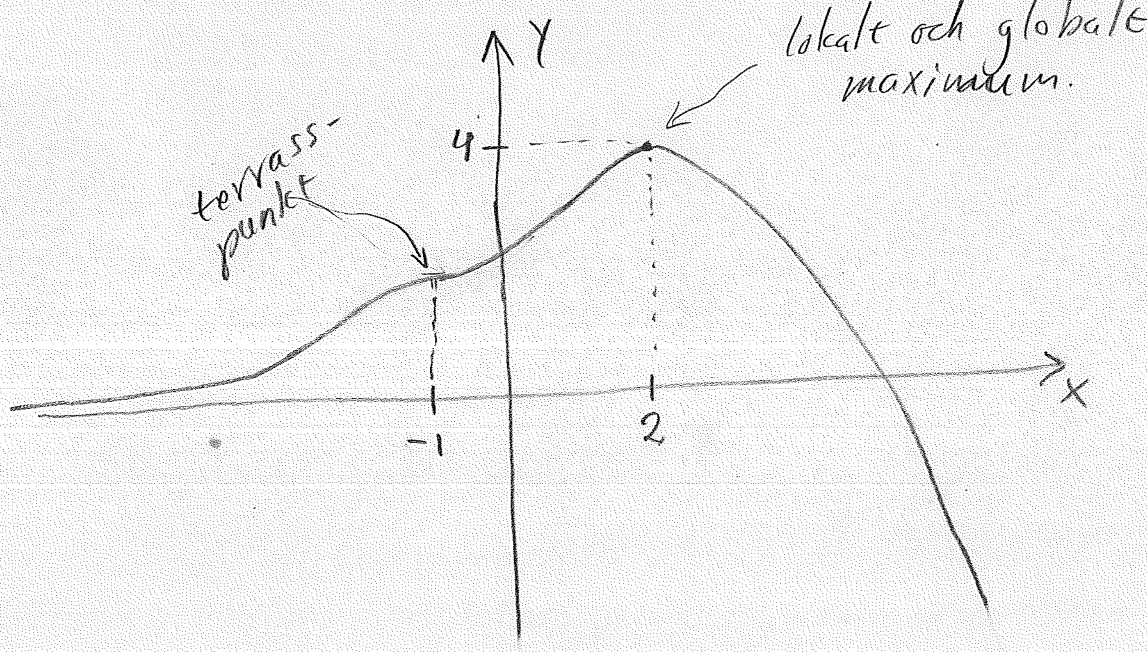
1. Taylor-polyn. av grad 2 för $f(x) = \frac{2}{x}$ kring $x=1$ är

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

$$= 2 - 2(x-1) + 2(x-1)^2.$$

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x^{1000}} = \infty$.

3.



4. $\int_1^2 \frac{1}{x^4}\,dx = \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_1^2 = \left(-\frac{1}{3\cdot 8} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{24} = \frac{7}{24}.$$

5. $$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x^4}\,dx$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3a^3} \right) = \frac{1}{3}$$

Alltså är integralen konvergent med värdet $\frac{1}{3}$.

6. $$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 0$$, under antagandena i uppgiften.

7. $$f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^2+3}.$$ (Vi noterar att f är definierad för alla $x \in \mathbb{R}$.)

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+3) - (x^2-x+2)2x}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{2x^3 \boxed{+ 6x} - x^2 - 3 - 2x^3 + 2x^2 \boxed{- 4x}}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x^2+3)^2}.$$

Vi söker kritiska punkter.

$$f'(x) = 0 \iff x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\iff x = -1 \pm \sqrt{1+3} \iff x = -3 \text{ eller } x = 1.$$

Det följer att $f'(x) = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$

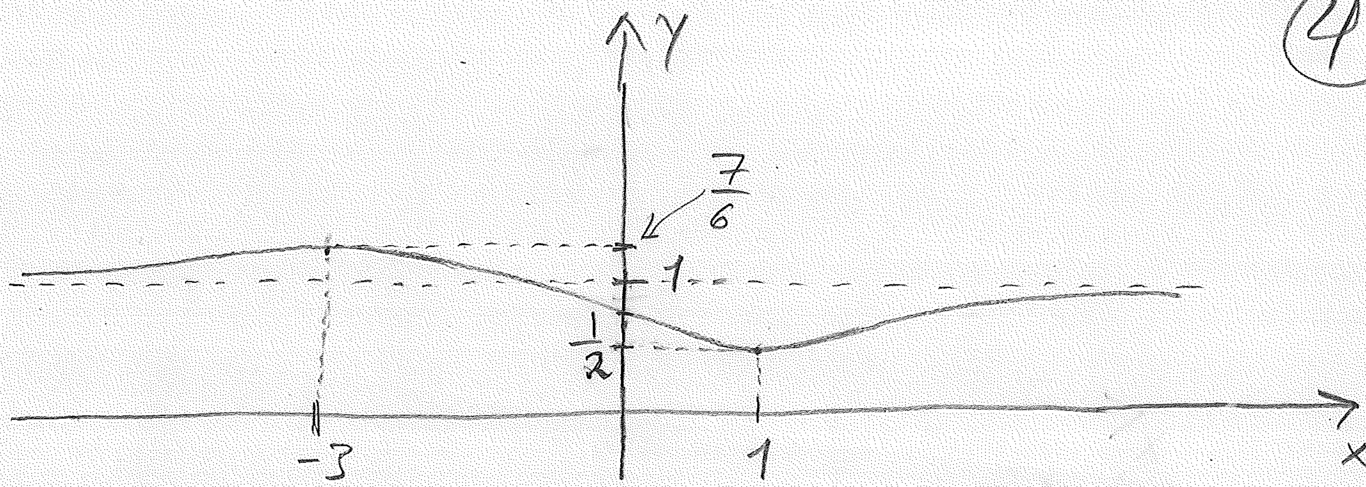
och vi får följande tabell:

x		-3		0		1	
$f'(x)$	$+$	0		$-$		0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{7}{6}$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$

Vi har $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x^2+3} = \dfrac{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}$

$$= \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{3}{x^2}} \rightarrow \begin{cases} 1 \text{ då } x \to \infty \\ 1 \text{ då } x \to -\infty \end{cases}$$

Detta tillsammans med tabellen ovan och faktumet att f är definierad överallt medför att grafen till f i stora drag har följande utseende:



Kurvan förändras "mjukt" (utan "kanter") eftersom f'' är definierad överallt.

f har ett globalt (och lokalt) maximum i $x = -3$ och ett globalt (och lokalt) minimum i $x = 1$.

8. $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} = \boxed{\text{l'Hospitals regel}} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{1}$$

$$= \lim_{x \to 0} -\frac{\sin x}{\cos x} = 0.$$

Vi Taylorutvecklar först e^x och $\ln(1+x)$.

Om $f(x) = e^x$ så $f'(x) = e^x$ och

$$e^x = f(0) + f'(0)x + O(x^2) =$$
$$= 1 + x + O(x^2)$$

Om $g(x) = \ln(1+x)$ så $g'(x) = \frac{1}{1+x}$
och $\ln(1+x) = g(0) + g'(0)x + O(x^2)$
$= x + O(x^2)$.

Substitutionen $x \mapsto x^2$ i e^x ger

$e^{x^2} = 1 + x^2 + O(x^4)$.

Substitutionen $x \mapsto -x^2$ i e^x ger

$e^{-x^2} = 1 - x^2 + O(x^4)$.

Substitutionen $x \mapsto -x^2$ i $\ln(1+x)$ ger

$\ln(1-x^2) = -x^2 + O(x^4)$.

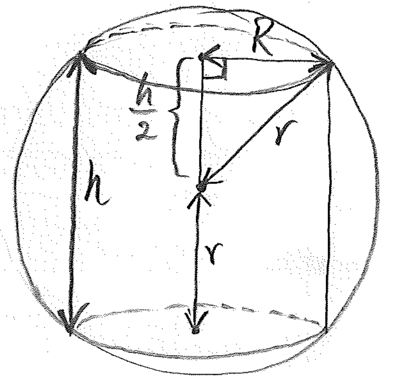
Detta ger $\frac{\ln(1-x^2)}{e^{x^2} - e^{-x^2}} = \frac{-x^2 + O(x^4)}{1+x^2+O(x^4) - (1-x^2+O(x^4))}$

$= \frac{-x^2 + O(x^4)}{2x^2 + O(x^4)} = \frac{-1 + O(x^2)}{2 + O(x^2)} \to -\frac{1}{2}$ då $x \to 0$.

Svar: $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-x^2)}{e^{x^2} - e^{-x^2}} = -\frac{1}{2}$

9. Vi har följande situation:



r = klotets radie

R = radien hos cylinderns över/under-sida.

h = cylinderns höjd.

Vi har $\left(\frac{h}{2}\right)^2 + R^2 = r^2 \Longrightarrow R^2 = r^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2$.

Cylinderns volym är

$$V = \pi R^2 h = \pi\left(r^2 - \frac{h^2}{4}\right)h$$
$$= \pi r^2 h - \frac{\pi h^3}{4}$$

$$V'(h) = \pi r^2 - \frac{3\pi h^2}{4}$$

Eftersom $0 \le h \le 2r$ så undersöker vi $V(h)$ på $[0, 2r]$, där $V(h)$ måste anta ett största värde eftersom $V(h)$ är kontinuerlig. Eftersom $V(0) = V(2r) = 0$ så måste det största värdet antas i $(0, 2r)$, i en punkt h där $V'(h) = 0$.

$$V'(h) = 0 \iff \pi r^2 - \frac{3\pi h^2}{4} = 0$$

$$\iff h = \frac{2r}{\sqrt{3}} \quad \text{(eftersom } h \geq 0\text{)}.$$

Svar: Cylindern får största möjliga volym om man låter dess höjd vara

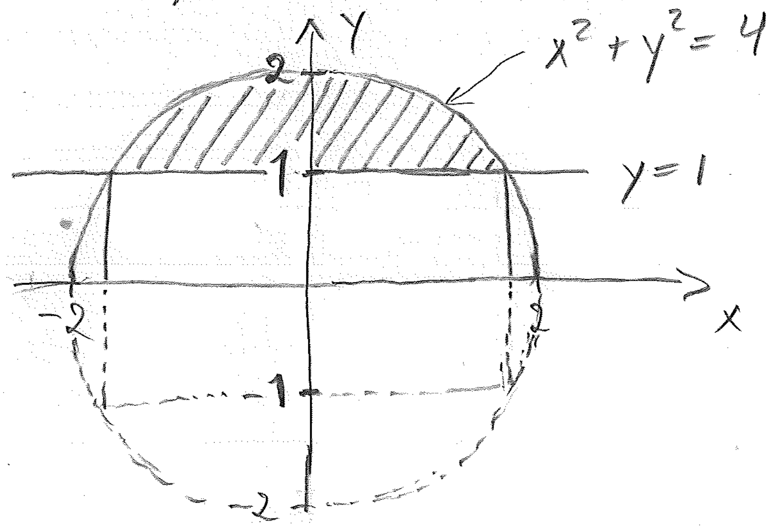
$$h = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

och dess radie

$$R = r^2 - \frac{h^2}{4} = r^2 - \frac{r^2}{3} = \frac{2r^2}{3}$$

där r är klotets radie.

10. Vi har följande situation.



Den sökta volymen är samma som volymen av den kropp som fås då det randiga området roterar kring x-axeln.

Vi söker först punkterna där linjen $y=1$ och kurvan $x^2+y^2=4$ skär varandra:

$$y=1 \Rightarrow 1 = y^2 = 4-x^2 \Rightarrow x^2 = 3$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

Eftersom $x^2+y^2=4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4-x^2}$ så beskrivs den övre halvan av cirkeln $x^2+y^2=4$ av grafen till $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

Den sökta volymen är därför

$$\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (f(x))^2\,dx - \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 1\,dx = \boxed{\text{symmetri kring } y\text{-axeln}}$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} (f(x))^2\,dx - 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} 1\,dx =$$

$$= 2\pi\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} - 2\pi\left[x\right]_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= 6\sqrt{3}\,\pi - 2\sqrt{3}\,\pi = 4\sqrt{3}\,\pi.$$

<u>Svar</u>: Den sökta volymen är $4\sqrt{3}\,\pi$.