

Diagnostiskt prov 6 – med svar/lösningar

Betrakta följande differentialekvationer.

- (a) $\frac{dy}{dx} = xy^2$,
- (b) $y' = x + y$ (där y betraktas som funktion av x),
- (c) $2xy' = x + y$,
- (d) $mv'(t) + \lambda v(t) = 0$ där m och λ är konstanter.

1. Till vilken eller vilka av ekvationerna (a)–(d) är funktionen $y(x) = 5e^x - x - 1$ en lösning?

Svar: Till (b).

2. Vilken eller vilka av ekvationerna (a)–(d) är separabla?

Svar: (a) och (d) (eftersom (d) är ekvivalent med $\frac{dv}{dt} = v' = -\frac{\lambda}{m}v$).

3. Vilken eller vilka av ekvationerna (a)–(d) är homogena?

Svar: Ekvation (c) är homogen, eftersom den kan skrivas som $y' = \frac{1}{2} + \frac{y}{2x}$ och $f(tx, ty) = f(x, y)$ om $f(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{y}{2x}$.

4. Finn den *allmänna lösningen* (dvs. alla lösningar) till den eller de av ekvationerna (a)–(d) som är separabla.

Lösning. Ekvation (a): Separering av variabler och integration ger

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int x dx,$$

vilket i sin tur medför att

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C,$$

vilket ger

$$y(x) = -\frac{1}{\frac{x^2}{2} + C}$$

som är den allmänna lösningen.

Ekvation (d): Den kan skrivas som

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\lambda}{m}v$$

så den är separabel. Separering av variabler och integration ger

$$\int \frac{1}{v} dv = \int -\frac{\lambda}{m} dt.$$

Beräkning av integralerna ger

$$\ln|v| = -\frac{\lambda}{m}t + C,$$

så om vi låter $k = \lambda/m$, får vi

$$|v| = e^{\ln|v|} = e^{-kt+C} = e^C e^{-kt},$$

vilket ger $v(t) = De^{-kt}$ där D är en godtycklig konstant. (För e^C kan anta alla positiva värden om C varierar över de reella talen, och man ser direkt att $v(t) = 0$ är en lösning.)

5. Finn den allmänna lösningen till den eller de av ekvationerna (a)–(d) som är homogena.

Lösning. I lösningen till 3 såg vi att (c) är homogen, vilket vi ser genom att skriva om den som

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} + \frac{y}{2x}.$$

Då kan den omvandlas till en separabel ekvation genom substitutionen $z = y/x$, dvs. $y = xz$, där z betraktas som funktion av x . Substitutionen går till så att vi ersätter y med xz och $\frac{dy}{dx}$ med $z + x\frac{dz}{dx}$, vilket motiveras av att

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}xz = z + x\frac{dz}{dx} \quad \text{enligt produktregeln.}$$

Denna substitution omvandlar ekvationen till

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z$$

som är separabel. Separation av variabler och integration ger

$$\int \frac{2}{1-z} dz = \int \frac{1}{x} dx,$$

som i sin tur ger

$$\begin{aligned} -2 \ln|1-z| &= \ln|x| + C \iff \ln|1-z|^{-2} = \ln|x| + C \iff |1-z|^{-2} = e^C|x| \\ \iff \frac{1}{e^C|x|} &= (1-z)^2 \iff \frac{1}{e^C|x|} = (1-y/x)^2. \end{aligned}$$

Detta ger $1 - \frac{y}{x} = \frac{D}{\sqrt{|x|}}$ där D kan vara vilken nollskiljd konstant som helst, och vi får den allmänna lösningen $y(x) = x - \frac{Dx}{\sqrt{|x|}}$.

6. En viss pyramid har en kvadratisk botten med sidan 2, och höjden 1. Var och en av de fyra sidorna har samma dimensioner, så pyramiden är regelbunden i den bemärkelsen. Beräkna dess volym.

Lösning. Notera att pyramidens dimensioner medför att dess sidor lutar mot marken/botten med vinkeln $\pi/4$. Vi tänker oss att vi vänder på pyramiden så att dess spets pekar åt vänster längs en horisontell x-axel, och att spetsen befinner sig i punkten $(0,0)$ i xy-planet. Om vi också har sett till att den tidigare höjdaxeln (då pyramiden stod upprätt) sammanfaller med x-axeln, så kommer ett tvärsnitt genom pyramiden som är vinkelrätt mot x-axeln i en punkt där $x = a$ att ha arean $(2a)^2$ på grund av att pyramidens sidor lutar med vinkeln $\pi/4$. (Rita gärna en figur.) Med andra ord, om $A(x)$ betecknar arean av ett sådant tvärsnitt genom pyramiden som skär x-axeln i punkten x , så $A(x) = (2x)^2 = 4x^2$. Eftersom pyramidens höjd är 1, så utsträcker den sig från $x = 0$ till $x = 1$ i x-led, och från detta följer att dess volym är lika med

$$\int_0^1 A(x) dx = \int_0^1 4x^2 dx = \left[\frac{4x^3}{3} \right]_0^1 = 4/3.$$