

Diagnostiskt prov 7 – med svar/lösningar

1. Finn den allmänna lösningen till var och en av följande differentialekvationer:

(a) $y'' + 6y' + 13y = 0$,

(b) $y'' - 2y' + y = 0$,

(c) $y'' - 6y' - 7y = 0$.

Svar: (a) $y(x) = e^{-3x}(c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x))$.

(b) $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^x$.

(c) $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{7x}$.

2. Finn den lösning till ekvation (a) i uppgift 1 som uppfyller att $y(0) = 1$ och $y'(0) = -5$.

Svar: $y(x) = e^{-3x}(\cos(2x) - \sin(2x))$.

3. Antag att $a \neq 0$.

(a) För vilka reella tal r är serien $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$ konvergent?

(b) Härled värdet av $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$ i de fall då serien är konvergent.

(Ledning: multiplicera partialsumman $s_N = \sum_{n=1}^N ar^n$ med $(1-r)$ och lägg märke till att alla termer utom två tar ut varandra)

Svar: (a) Serien är konvergent om $|r| < 1$, och divergent annars.

(b) Se kursboken eller mina föreläsningsanteckningar.

4 (a) För vilka reella tal r är serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ konvergent?

(b) Bevisa din slutsats i (a)-delen med hjälp av "integraltestet".

Lösning: (a) Serien är konvergent om $r > 1$ och divergent annars.

(b) Notera först att seriens termer alltid är icke-negativa. Om $r = 1$ så $\int_1^b \frac{1}{x^r} dx = [\ln x]_1^b = \ln b \rightarrow \infty$ när $b \rightarrow \infty$, så enligt integraltestet är serien divergent.

Om $r < 1$ så

$$\int_1^b \frac{1}{x^r} dx = \left[\frac{x^{1-r}}{1-r} \right]_1^b = \frac{b^{1-r}}{1-r} - \frac{1}{1-r} \rightarrow \infty$$

då $b \rightarrow \infty$, eftersom $1-r > 0$, vilket enligt integraltestet betyder att serien är divergent.

Om $r > 1$ så

$$\int_1^b \frac{1}{x^r} dx = \left[\frac{x^{1-r}}{1-r} \right]_1^b = \frac{b^{1-r}}{1-r} - \frac{1}{1-r} \rightarrow -\frac{1}{1-r}$$

då $b \rightarrow \infty$, eftersom $1-r < 0$, vilket enligt integraltestet betyder att serien är konvergent.

5. Bestäm för var och en av serierna om den är konvergent eller divergent.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)^{1/3}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n} \right)^2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{n^3 - 2}$$

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)^2}$$

Svar: Den första serien (från vänster) är divergent, vilket exempelvis kan visas med integraltestet. Den andra serien är konvergent, vilket exempelvis kan visas med jämförelsetestet och jämförelseserien med termer $b_n = \frac{1}{n^2}$. Den tredje serien är konvergent, vilket exempelvis kan visas med jämförelsetestet (tag $b_n = \frac{1}{n^3}$), eller med kvotjämförelsetestet (tag $b_n = \frac{1}{n^3}$). Den fjärde serien är divergent, eftersom termerna går mot 1 då n går mot ∞ . (Om serien är konvergent så måste termerna gå mot 0.)

6. Finn den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y' + (\cos x)y = (\sin x)(\cos x).$$

Ledning: i ett visst stadium då man behöver integrera så kan substitutionen $t = \sin x$ och sedan partiell integration vara till hjälp.

Svar: $y(x) = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$.

7. Bestäm för var och en av serierna om den är konvergent eller divergent.

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{4}{(\log_2 n)^3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log_2 n}{3^n \sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 \cdot 2^n}.$$

Lösning: Den första serien (från vänster) är divergent, vilket kan inses så här. På grund av de standardgränsvärden som vi har sett tidigare i kursen så $n^{1/3} > \log_2 n$ för alla tillräckligt stora n , så $\frac{1}{n^{1/3}} < \frac{1}{\log_2 n}$ för alla tillräckligt stora n , vilket ger $\frac{1}{n} < \frac{4}{(\log_2 n)^3}$ för alla tillräckligt stora n . Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent så medför jämförelsetestet att $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{4}{(\log_2 n)^3}$ är divergent.

Den andra serien är konvergent, vilket kan inses så här. Låt $a_n = \frac{\log_2 n}{3^n \sqrt{n}}$ och $b_n = \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, så $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är en konvergent geometrisk serie. Vi har

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log_2 n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad \text{då } n \rightarrow \infty$$

så kvotjämförelsetestet medför att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent.

Den tredje serien är divergent vilket kan inses så här. Om $a_n = \frac{n!}{n^2 \cdot 2^n}$ så

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = [\text{förenklingar}] = \frac{n^2}{2(n+1)} \rightarrow \infty \quad \text{när } n \rightarrow \infty,$$

så kvottestet medför att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är divergent.

8. Ett obduktionsrum hålls vid konstant temperatur 5°C . En tidig morgon pågår obduktion av ett mordoffer, då någon bryter sig in, skjuter obducenten och för bort det andra liket. Klockan 10.00 anländer en assistent och upptäcker assistentens lik, som då har temperaturen 23°C . Klockan 12.00 har temperaturen gått ned till $18,5^\circ \text{C}$. När blev obducenten skjuten? (Vi antar att obducenten hade kroppstemperatur 37°C då personen var i livet.)

Newtons avsvälningslag säger att en kropp med temperaturen T som placeras i en omgivning som håller temperaturen $T_0 < T$ kommer att svalna på så vis att temperaturen minskar med en hastighet som är proportionell mot temperaturdifferensen $T - T_0$.

(Eftersom vi inte använder miniräknare i den här kursen så kan man, i uträkningarna, ha nytta av att $\frac{1}{2} \ln \frac{13,5}{18} \approx -0.144$ och $\frac{1}{-0.144} \ln \frac{32}{18} \approx -4$.)

Lösning: Låt t vara antalet timmar efter klockan 10.00. Låt $T(t)$ vara obducentens temperatur t timmar efter klockan 10.00. Vi söker t så att $T(t) = 37$. Då anger t hur många timmar före klockan 10.00 som obducenten skjöts. Enligt Newtons lag gäller att

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 5)$$

där k är en proportionalitetskonstant. Ekvationen är separabel, och vi löser den tillsammans med begynnelsevillkoren $T(0) = 23$ och $T(2) = 18,5$. Separering av variabler och integration ger

$$\int \frac{1}{T-5} dT = \int k dt$$

som i sin tur ger $\ln |T-5| = kt + C$ och till sist $T = 5 + Ae^{kt}$ där A är en konstant som skall bestämmas. Begynnelsevillkoret $T(0) = 23$ ger $5 + A = 23$, så $A = 18$. Begynnelsevillkoret $T(2) = 18,5$ ger $5 + 18e^{2k} = 18,5$ vilket medför att $k = \frac{1}{2} \ln \frac{13,5}{18} \approx -0.144$. Vi söker t sådant att $T(t) = 37$, vilket ger

$$37 = T(t) = 5 + 18e^{kt} \iff t = \frac{1}{k} \ln \frac{32}{18} \approx \frac{1}{-0.144} \ln \frac{32}{18} \approx -4.$$

Obducenten blev alltså skjuten 4 timmar före klockan 10.00, det vill säga, klockan 6.00.