Differentialekvationer (fortsättning)

Övn./Ex. Strömmen $I(t)$ med avseende på tiden t i en elektrisk krets med resistans R, induktans L, kapacitans C och pålagd spänning $V(t)$ uppfyller sambandet

$$L I''(t) + R I'(t) + \frac{1}{C} I(t) = V'(t).$$

Bestäm den allmänna lösningen om $V(t)$ är konstant och

(a) $R = 4, L = 1, C = 1/3$.

(b) $R = 4, L = 1, C = 1/5$.

(c) $R = 4, L = 2, C = 1/2$.

(d) $R = 0, L = C = 1$.

Lösn. Eftersom $V(t)$ antas vara konstant så $V'(t) = 0$. Vi får i respektive fall:

(a) karakteristisk ekvation

$$m^2 + 4m + 3 = 0$$

med rötter $m_1 = -1$ och $m_2 = -3$,

vilket ger den allmänna lösningen

$$I(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}.$$

(b) Karakteristisk ekvation

$$m^2 + 4m + 5 = 0$$

med rötter $m_1 = -2+i$, $m_2 = -2-i$,
vilket ger den allmänna lösningen

$$I(t) = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

(c) karakteristisk ekvation

$$2m^2 + 4m + 2 = 0$$

$$\iff m^2 + 2m + 1 = 0$$

med enda roten $m = -1$ (en "dubbelrot"),
vilket ger den allmänna lösningen

$$I(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t}$$

(d) Karakteristisk ekvation

$$m^2 + 1 = 0$$

med rötter $m_1 = i$, $m_2 = -i$
vilket ger den allmänna lösningen

$$I(t) = e^{0 \cdot t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$
$$= c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Vi fortsätter med samma övning/exempel.

Bestäm lösningen till del (a) om man dessutom vet att lösningen skall uppfylla $I(0) = 2$ och $I'(0) = -4$.

Lösn. Den allmänna lösningen i del (a) är $I(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}$ så

$$I'(t) = -c_1 e^{-t} - 3c_2 e^{-3t}.$$

De givna "bivillkoren" $I(0) = 2$, $I'(0) = -4$ ger därför ekvationssystemet

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ -c_1 - 3c_2 = -4 \end{cases}$$

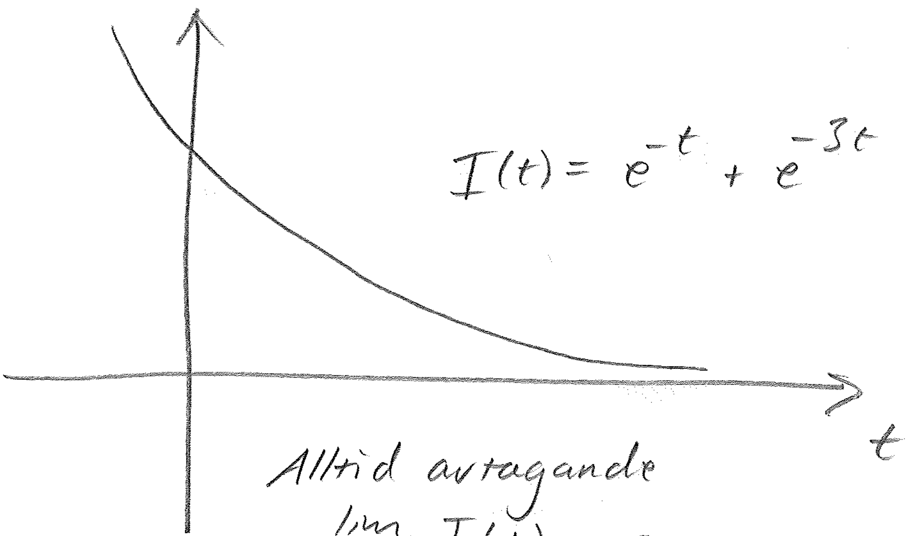
som har lösningen $c_1 = c_2 = 1$.

Lösningen i del (a) som uppfyller att $I(0) = 2$ och $I'(0) = -4$ är alltså

$$I(t) = e^{-t} + e^{-3t}.$$

Övn/Ex. Gör en grov skiss av funktionsgraferna till lösningarna i delarna (a) - (d) i föregående övning/exempel i fallet då $c_1 = c_2 = 1$. (Det skall dock framgå på vilket sätt som de olika lösningarna skiljer sig kvalitativt.)

Lösn. (a)



$$I(t) = e^{-t} + e^{-3t}$$

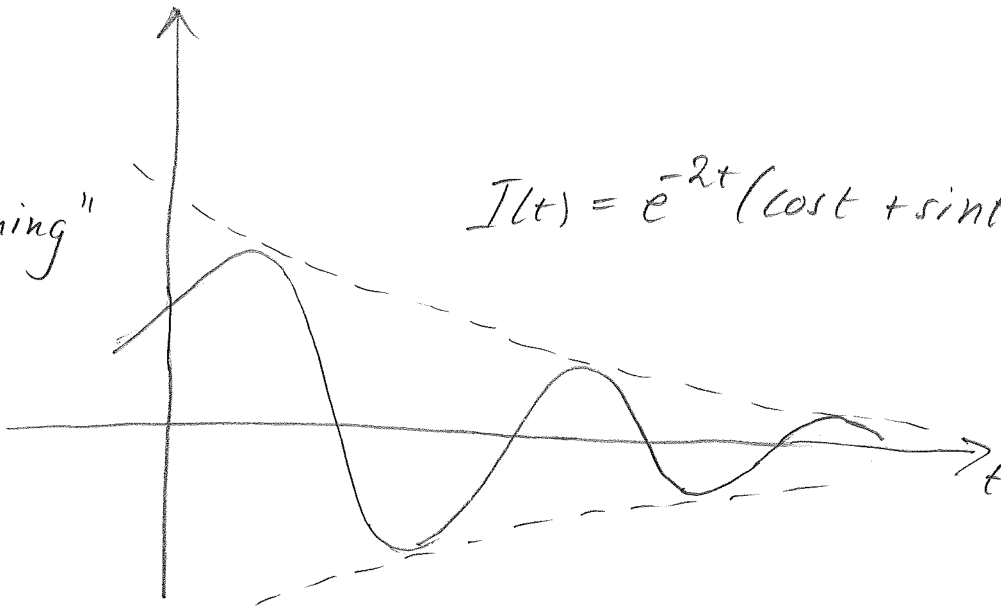
Alltid avtagande

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = 0$$

(b)

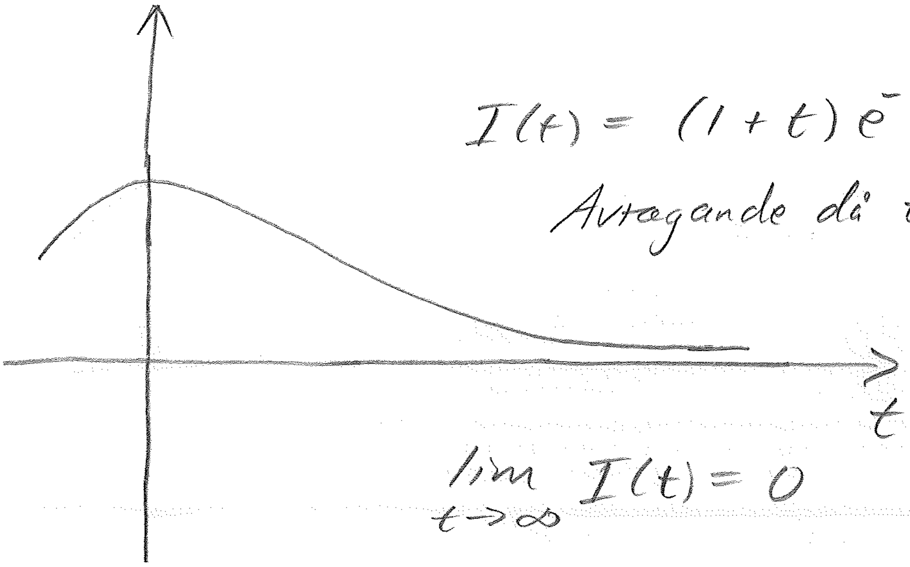
"dämpad svängning"

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = 0$$



$$I(t) = e^{-2t}(\cos t + \sin t)$$

(c)



$I(t) = (1+t)e^{-t}$

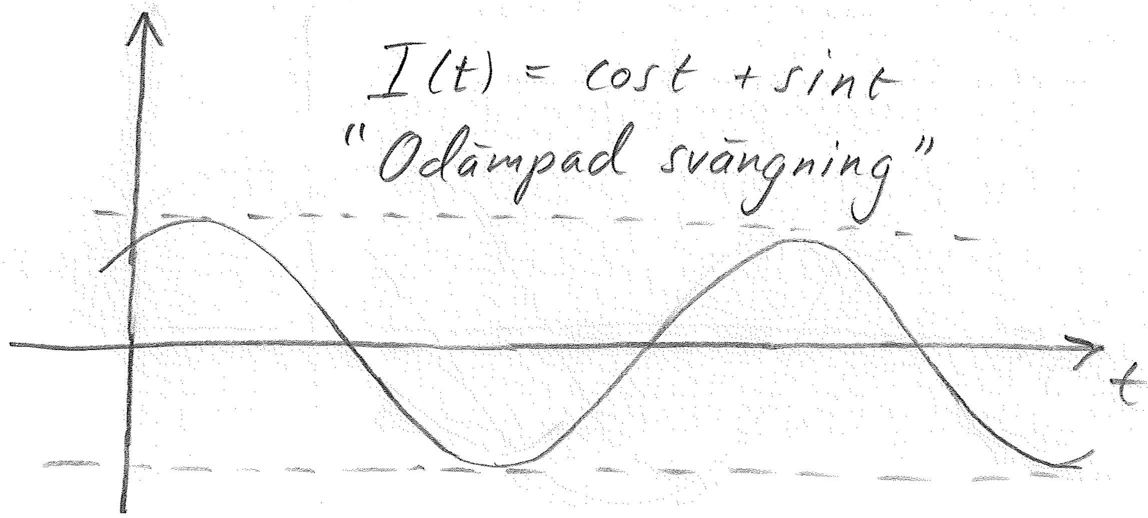
Avtagande då $t > 0$.

$\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$

(d)

$I(t) = \cos t + \sin t$

"Odämpad svängning"



Läs också exemplet om "simple harmonic motion" i kapitel 3.7 i kursboken.

Jag tar också upp möjligheten att ibland reducera graden av en diff.ekv. av 2a ordningen, vilket behandlas i slutet av min stencil om linjära 1a ordningens diff.ekvationer.