

Envariabelanalys: Föreläsning 1-3

Vera Koponen

Uppsala Universitet

Envariabelanalys, vt 2011

Infinitesimalkalkyl: analysens föregångare

Den matematiska analysen har utvecklats ur dess föregångare *infinitesimalkalkylen*, som framförallt Gottfried Leibniz (1646–1716) och Isaac Newton (1643–1727) utvecklade.

Infinitesimalkalkyl: analysens föregångare

Den matematiska analysen har utvecklats ur dess föregångare *infinitesimalkalkylen*, som framförallt Gottfried Leibniz (1646–1716) och Isaac Newton (1643–1727) utvecklade. Dock hade tankegångar kring någon sorts infinitesimalkalkyl kläckts tidigare av Bonaventura Cavalieri (1598–1647).

Infinitesimalkalkyl: analysens föregångare

Den matematiska analysen har utvecklats ur dess föregångare *infinitesimalkalkylen*, som framförallt Gottfried Leibniz (1646–1716) och Isaac Newton (1643–1727) utvecklade. Dock hade tankegångar kring någon sorts infinitesimalkalkyl kläckts tidigare av Bonaventura Cavalieri (1598–1647).

Särskilt Newtons läror om mekaniken krävde att matematik utvecklades i den riktning som så småningom kom att bli analysen.

Exempel: Newtons andra lag

Exempel Newtons andra lag säger att

“kraften” $= F = ma =$ “massan gånger accelerationen”.

Exempel: Newtons andra lag

Exempel Newtons andra lag säger att

“kraften” $= F = ma =$ “massan gånger accelerationen”.

Denna formel döljer faktumet att *accelerationen* definieras som *förändringen av hastighet*. Vi kan inte tala om förändring utan att i tankarna ha ytterligare en variabel/parameter, i detta fall *tiden*.

Exempel: Newtons andra lag

Exempel Newtons andra lag säger att

“kraften” $= F = ma =$ “massan gånger accelerationen”.

Denna formel döljer faktumet att *accelerationen* definieras som *förändringen av hastighet*. Vi kan inte tala om förändring utan att i tankarna ha ytterligare en variabel/parameter, i detta fall *tiden*. Accelerationen är förändringen av hastighet med avseende på tiden, så om $v(t)$ är hastigheten med avseende på tiden så är accelerationen *derivatan* av $v(t)$, dvs. $v'(t)$, eller alternativt skrivet $\frac{dv}{dt}$.

Exempel: Newtons andra lag

Exempel Newtons andra lag säger att

“kraften” $= F = ma =$ “massan gånger accelerationen”.

Denna formel döljer faktumet att *accelerationen* definieras som *förändringen av hastighet*. Vi kan inte tala om förändring utan att i tankarna ha ytterligare en variabel/parameter, i detta fall *tiden*. Accelerationen är förändringen av hastighet med avseende på tiden, så om $v(t)$ är hastigheten med avseende på tiden så är accelerationen *derivatan* av $v(t)$, dvs. $v'(t)$, eller alternativt skrivet $\frac{dv}{dt}$. Sålunda har vi ekvationen

$$F(t) = mv'(t).$$

Exempel: Newtons andra lag

Exempel Newtons andra lag säger att

“kraften” $= F = ma =$ “massan gånger accelerationen”.

Denna formel döljer faktumet att *accelerationen* definieras som *förändringen av hastighet*. Vi kan inte tala om förändring utan att i tankarna ha ytterligare en variabel/parameter, i detta fall *tiden*. Accelerationen är förändringen av hastighet med avseende på tiden, så om $v(t)$ är hastigheten med avseende på tiden så är accelerationen *derivatan* av $v(t)$, dvs. $v'(t)$, eller alternativt skrivet $\frac{dv}{dt}$. Sålunda har vi ekvationen

$$F(t) = mv'(t).$$

Om vi känner till hur $F(t)$ varierar med t , så kan vi (i princip) härleda hur $v(t)$ varierar med t genom *integration*

$$v(t) = \int \frac{F(t)}{m} dt.$$

Exempel: Newtons andra lag och friktion

Exempel Antag att den enda kraft F som verkar på ett objekt med massan m och hastigheten $v(t)$ är *friktion*.

Exempel: Newtons andra lag och friktion

Exempel Antag att den enda kraft F som verkar på ett objekt med massan m och hastigheten $v(t)$ är *friktion*. Då gäller för en konstant $\lambda > 0$ (friktionskonstanten i sammanhanget) att

$$F(t) = -\lambda v(t) \quad \text{och dessutom} \quad F(t) = ma(t) = mv'(t).$$

Exempel: Newtons andra lag och friktion

Exempel Antag att den enda kraft F som verkar på ett objekt med massan m och hastigheten $v(t)$ är *friktion*. Då gäller för en konstant $\lambda > 0$ (friktionskonstanten i sammanhanget) att

$$F(t) = -\lambda v(t) \text{ och dessutom } F(t) = ma(t) = mv'(t).$$

Detta ger differentialekvationen

$$-\lambda v(t) = mv'(t),$$

Exempel: Newtons andra lag och friktion

Exempel Antag att den enda kraft F som verkar på ett objekt med massan m och hastigheten $v(t)$ är *friktion*. Då gäller för en konstant $\lambda > 0$ (friktionskonstanten i sammanhanget) att

$$F(t) = -\lambda v(t) \text{ och dessutom } F(t) = ma(t) = mv'(t).$$

Detta ger differentialekvationen

$$-\lambda v(t) = mv'(t),$$

som vi kommer kunna lösa senare i kursen.

De reella talen

Redan i Grekland på antiken förstod somliga att de rationella talen, som kan skrivas som kvoter av heltal, inte räckte för att beskriva alla avstånd/längder.

Redan i Grekland på antiken förstod somliga att de rationella talen, som kan skrivas som kvoter av heltal, inte räckte för att beskriva alla avstånd/längder.

Exempelvis så är diagonalens längd i en kvadrat med sidan 1 lika med $\sqrt{2}$ vilket är irrationellt, dvs. inte rationellt.

Redan i Grekland på antiken förstod somliga att de rationella talen, som kan skrivas som kvoter av heltal, inte räckte för att beskriva alla avstånd/längder.

Exempelvis så är diagonalens längd i en kvadrat med sidan 1 lika med $\sqrt{2}$ vilket är irrationellt, dvs. inte rationellt.

Men för att kunna utveckla matematik som kan beskriva (exempelvis) mekaniken – om samband mellan tid, rörelse, acceleration, massa, kraft osv. – så blev det nödvändigt att mer eller mindre konsekvent arbeta inom ramen för det reella talen, som inkluderar de rationella, men dessutom innehåller (överuppräkneligt) många fler tal (som tex. $\sqrt{2}$, π och e).

Redan i Grekland på antiken förstod somliga att de rationella talen, som kan skrivas som kvoter av heltal, inte räckte för att beskriva alla avstånd/längder.

Exempelvis så är diagonalens längd i en kvadrat med sidan 1 lika med $\sqrt{2}$ vilket är irrationellt, dvs. inte rationellt.

Men för att kunna utveckla matematik som kan beskriva (exempelvis) mekaniken – om samband mellan tid, rörelse, acceleration, massa, kraft osv. – så blev det nödvändigt att mer eller mindre konsekvent arbeta inom ramen för det reella talen, som inkluderar de rationella, men dessutom innehåller (överuppräkneligt) många fler tal (som tex. $\sqrt{2}$, π och e). Det dröjde dock till 1800-talet innan man utvecklade den precisa definition de reella talen som används idag.

En fundamental egenskap hos de rationella talen

De rationella talen har följande “tätthetsegenskap”:

Om a och b är reella tal sådana att $a < b$, så finns ett rationellt tal r sådant att $a < r < b$.

En fundamental egenskap hos de rationella talen

De rationella talen har följande “täthetsegenskap”:

Om a och b är reella tal sådana att $a < b$, så finns ett rationellt tal r sådant att $a < r < b$.

Detta kan inses på följande sätt. Antag $a < b$, så $b - a > 0$. Då finns ett heltal N som är större än $\frac{1}{b-a}$, vilket ger $\frac{1}{N} < b - a$.

En fundamental egenskap hos de rationella talen

De rationella talen har följande “täthetsegenskap”:

Om a och b är reella tal sådana att $a < b$, så finns ett rationellt tal r sådant att $a < r < b$.

Detta kan inses på följande sätt. Antag $a < b$, så $b - a > 0$. Då finns ett heltal N som är större än $\frac{1}{b-a}$, vilket ger $\frac{1}{N} < b - a$. Välj något heltal $K < a$.

En fundamental egenskap hos de rationella talen

De rationella talen har följande “täthetsegenskap”:

Om a och b är reella tal sådana att $a < b$, så finns ett rationellt tal r sådant att $a < r < b$.

Detta kan inses på följande sätt. Antag $a < b$, så $b - a > 0$. Då finns ett heltal N som är större än $\frac{1}{b-a}$, vilket ger $\frac{1}{N} < b - a$. Välj något heltal $K < a$. Eftersom $\frac{1}{N} > 0$ så finns ett heltal $M > 0$ så att $K + M\frac{1}{N} > a$.

En fundamental egenskap hos de rationella talen

De rationella talen har följande “täthetsegenskap”:

Om a och b är reella tal sådana att $a < b$, så finns ett rationellt tal r sådant att $a < r < b$.

Detta kan inses på följande sätt. Antag $a < b$, så $b - a > 0$. Då finns ett heltal N som är större än $\frac{1}{b-a}$, vilket ger $\frac{1}{N} < b - a$. Välj något heltal $K < a$. Eftersom $\frac{1}{N} > 0$ så finns ett heltal $M > 0$ så att $K + M\frac{1}{N} > a$. Låt M vara det minsta positiva heltalet så att $a < K + M\frac{1}{N}$.

En fundamental egenskap hos de rationella talen

De rationella talen har följande “tätthetsegenskap”:

Om a och b är reella tal sådana att $a < b$, så finns ett rationellt tal r sådant att $a < r < b$.

Detta kan inses på följande sätt. Antag $a < b$, så $b - a > 0$. Då finns ett heltal N som är större än $\frac{1}{b-a}$, vilket ger $\frac{1}{N} < b - a$. Välj något heltal $K < a$. Eftersom $\frac{1}{N} > 0$ så finns ett heltal $M > 0$ så att $K + M\frac{1}{N} > a$. Låt M vara det minsta positiva heltalet så att $a < K + M\frac{1}{N}$. Eftersom $\frac{1}{N} < b - a$ så måste det gälla att

$$a < K + M\frac{1}{N} < b$$

där $r = K + M\frac{1}{N} = \frac{KN+M}{N}$ är rationellt.

En fundamental egenskap hos de reella talen

De reella talen är i följande bemärkelse ännu “tätare”:

Om $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ och $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$ är följder av reella tal sådana att $a_n \leq b_n$ för alla n ,

En fundamental egenskap hos de reella talen

De reella talen är i följande bemärkelse ännu “tätare”:

Om $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ och $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$ är följder av reella tal sådana att $a_n \leq b_n$ för alla n , så finns minst ett reellt tal c sådant att $a_n \leq c \leq b_n$ för alla $n = 1, 2, 3, \dots$

En fundamental egenskap hos de reella talen

De reella talen är i följande bemärkelse ännu “tätare”:

Om $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ och $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$ är följder av reella tal sådana att $a_n \leq b_n$ för alla n , så finns minst ett reellt tal c sådant att $a_n \leq c \leq b_n$ för alla $n = 1, 2, 3, \dots$

Denna egenskap kan bevisas om man ger en rigorös definition av begreppet *reellt tal*, vilket inte görs i denna kurs, och därmed bevisar vi inte ovanstående egenskap, utan tar den för given.

En fundamental egenskap hos de reella talen

De reella talen är i följande bemärkelse ännu “tätare”:

Om $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ och $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$ är följder av reella tal sådana att $a_n \leq b_n$ för alla n , så finns minst ett reellt tal c sådant att $a_n \leq c \leq b_n$ för alla $n = 1, 2, 3, \dots$

Denna egenskap kan bevisas om man ger en rigorös definition av begreppet *reellt tal*, vilket inte görs i denna kurs, och därmed bevisar vi inte ovanstående egenskap, utan tar den för given.

Exempel/övning 1. Låt $a_n = -\frac{1}{n}$ och $b_n = \frac{1}{n}$ för $n = 1, 2, 3, \dots$

En fundamental egenskap hos de reella talen

De reella talen är i följande bemärkelse ännu “tätare”:

Om $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ och $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$ är följder av reella tal sådana att $a_n \leq b_n$ för alla n , så finns minst ett reellt tal c sådant att $a_n \leq c \leq b_n$ för alla $n = 1, 2, 3, \dots$

Denna egenskap kan bevisas om man ger en rigorös definition av begreppet *reellt tal*, vilket inte görs i denna kurs, och därmed bevisar vi inte ovanstående egenskap, utan tar den för given.

Exempel/övning 1. Låt $a_n = -\frac{1}{n}$ och $b_n = \frac{1}{n}$ för $n = 1, 2, 3, \dots$

Då gäller att

$a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ och $b_1 > b_2 > b_3 > \dots$,

En fundamental egenskap hos de reella talen

De reella talen är i följande bemärkelse ännu “tätare”:

Om $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ och $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$ är följder av reella tal sådana att $a_n \leq b_n$ för alla n , så finns minst ett reellt tal c sådant att $a_n \leq c \leq b_n$ för alla $n = 1, 2, 3, \dots$

Denna egenskap kan bevisas om man ger en rigorös definition av begreppet *reellt tal*, vilket inte görs i denna kurs, och därmed bevisar vi inte ovanstående egenskap, utan tar den för given.

Exempel/övning 1. Låt $a_n = -\frac{1}{n}$ och $b_n = \frac{1}{n}$ för $n = 1, 2, 3, \dots$

Då gäller att

$a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ och $b_1 > b_2 > b_3 > \dots$,

och $c = 0$ är det enda talet som uppfyller att $a_n \leq c \leq b_n$ för alla n . Förklara varför för dig själv, eller för en kursare.

Övning 2. Låt $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ och $b_n = 2 + \frac{1}{n^2}$ för $n = 1, 2, 3, \dots$. Då gäller att $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ och $b_1 > b_2 > b_3 > \dots$. Beskriv mängden av alla tal c som uppfyller att $a_n \leq c \leq b_n$ för alla n .

Övning 2. Låt $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ och $b_n = 2 + \frac{1}{n^2}$ för $n = 1, 2, 3, \dots$. Då gäller att $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ och $b_1 > b_2 > b_3 > \dots$. Beskriv mängden av alla tal c som uppfyller att $a_n \leq c \leq b_n$ för alla n .

Övning 3. Antag att $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$

$b_1 > b_2 > b_3 > \dots$

och att $a_n \leq b_n$ för alla $n = 1, 2, 3, \dots$

Enligt den fundamentala egenskapen hos de reella talen så finns

minst ett reellt tal c sådant att $a_n \leq c \leq b_n$ för alla

$n = 1, 2, 3, \dots$. Kan du beskriva ett villkor sådant att om villkoret gäller så finns *exakt ett* reellt tal c så att ovanstående gäller?

Övning 2. Låt $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ och $b_n = 2 + \frac{1}{n^2}$ för $n = 1, 2, 3, \dots$. Då gäller att $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ och $b_1 > b_2 > b_3 > \dots$. Beskriv mängden av alla tal c som uppfyller att $a_n \leq c \leq b_n$ för alla n .

Övning 3. Antag att $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$

$b_1 > b_2 > b_3 > \dots$

och att $a_n \leq b_n$ för alla $n = 1, 2, 3, \dots$

Enligt den fundamentala egenskapen hos de reella talen så finns *minst ett* reellt tal c sådant att $a_n \leq c \leq b_n$ för alla

$n = 1, 2, 3, \dots$. Kan du beskriva ett villkor sådant att om villkoret gäller så finns *exakt ett* reellt tal c så att ovanstående gäller?

(Ledning: $b_n - a_n$, dvs. avståndet mellan a_n och b_n , måste närma sig noll, då n växer.)

Övre gräns, och minsta övre gräns

Låt A vara en mängd av reella tal.

Övre gräns, och minsta övre gräns

Låt A vara en mängd av reella tal.

Definition (i) Ett reellt tal c kallas för en **övre gräns** till A om $a \leq c$ för alla $a \in A$.

Övre gräns, och minsta övre gräns

Låt A bara en mängd av reella tal.

Definition (i) Ett reellt tal c kallas för en **övre gräns** till A om $a \leq c$ för alla $a \in A$.

(ii) c kallas för en **minsta över gräns (supremum)** till A om c är en övre gräns till A och, om c' är en annan övre gräns till A , så $c \leq c'$.

Obs! Det finns mängder som saknar en övre gräns, exempelvis mängden $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Denna mängd betecknas $\mathbb{N}$ och kallas för *mängden av de naturliga talen*.

Övning 4. Ange en *minsta* övre gräns, om sådan finns, för de mängder som beskrivs nedan.

(a) $\{5 - \frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\}$

(b) $\{1 + \frac{1}{n^3} : n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{\pi - \frac{1}{n^2}\}$

(c) $\{(-1)^n : n = 1, 2, 3, \dots\}$

(d) $\{(-2)^n : n = 1, 2, 3, \dots\}$

(e) $\{\sin(\frac{\pi n}{2}) : n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$

(f) $\{n \sin(\frac{\pi n}{2}) : n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$

(g) $\{\frac{1}{n} \sin(\frac{\pi n}{2}) : n = 1, 2, 3, \dots\}$

(h) $\{\frac{n-1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\}$

(i) $\{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{Z}\}$, där $\mathbb{Z}$ betecknar mängden av alla heltal.

(j) $\{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{Z}\}$.

(k) $\mathbb{Z}$

(l) $\mathbb{Q}$, där $\mathbb{Q}$ betecknar mängden av alla rationella tal.

Undre gräns, och största undre gräns

Låt A bara en mängd av reella tal.

Undre gräns, och största undre gräns

Låt A bara en mängd av reella tal.

Definition (i) Ett reellt tal c kallas för en **undre gräns** till A om $c \leq a$ för alla $a \in A$.

Undre gräns, och största undre gräns

Låt A bara en mängd av reella tal.

Definition (i) Ett reellt tal c kallas för en **undre gräns** till A om $c \leq a$ för alla $a \in A$.
(ii) c kallas för en **största undre gräns (infimum)** till A om c är en undre gräns till A och, om c' är en annan undre gräns till A , så $c' \leq c$.

Undre gräns, och största undre gräns

Låt A bara en mängd av reella tal.

Definition (i) Ett reellt tal c kallas för en **undre gräns** till A om $c \leq a$ för alla $a \in A$.
(ii) c kallas för en **största undre gräns (infimum)** till A om c är en undre gräns till A och, om c' är en annan undre gräns till A , så $c' \leq c$.

Övning 5. Ange en största undre gräns, om sådan finns, till var och en av mängderna i övning 4.

Varje uppåt/nedåt begränsad mängd har ett supremum/infimum

Låt X vara en icke-tom mängd av reella tal.

Varje uppåt/nedåt begränsad mängd har ett supremum/infimum

Låt X vara en icke-tom mängd av reella tal.

Sats (a) Om X är har en övre gräns så har X en minsta övre gräns (supremum).

Varje uppåt/nedåt begränsad mängd har ett supremum/infimum

Låt X vara en icke-tom mängd av reella tal.

Sats (a) Om X är har en övre gräns så har X en minsta övre gräns (supremum).

(b) Om X har en undre gräns så har X en största undre gräns (infimum).

Varje uppåt/nedåt begränsad mängd har ett supremum/infimum

Låt X vara en icke-tom mängd av reella tal.

Sats (a) Om X är har en övre gräns så har X en minsta övre gräns (supremum).

(b) Om X har en undre gräns så har X en största undre gräns (infimum).

En skiss av beviset för a-delen (beviset av b-delen är likartat):

Varje uppåt/nedåt begränsad mängd har ett supremum/infimum

Låt X vara en icke-tom mängd av reella tal.

Sats (a) Om X är har en övre gräns så har X en minsta övre gräns (supremum).

(b) Om X har en undre gräns så har X en största undre gräns (infimum).

En skiss av beviset för a-delen (beviset av b-delen är likartat): Låt b vara en övre gräns till X och låt $a \in X$.

Varje uppåt/nedåt begränsad mängd har ett supremum/infimum

Låt X vara en icke-tom mängd av reella tal.

Sats (a) Om X är har en övre gräns så har X en minsta övre gräns (supremum).

(b) Om X har en undre gräns så har X en största undre gräns (infimum).

En skiss av beviset för a-delen (beviset av b-delen är likartat): Låt b vara en övre gräns till X och låt $a \in X$. Låt

$b_1 = b$ och $a_1 = a$. Tanken är att vi skall skapa två följder:

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ och $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$

sådana att, för alla $n = 1, 2, 3, \dots$, $a_n \in X$, $x \leq b_n$ för alla $x \in X$,
och $b_n - a_n \leq \frac{b_1 - a_1}{2^n}$.

Varje uppåt/nedåt begränsad mängd har ett supremum/infimum (forts)

Om sådana följder har skapats, så ger den fundamentala egenskapen hos de reella talen att det finns ett reellt tal c sådant att $a_n \leq c \leq b_n$ för alla $n = 1, 2, 3, \dots$

Varje uppåt/nedåt begränsad mängd har ett supremum/infimum (forts)

Om sådana följder har skapats, så ger den fundamentala egenskapen hos de reella talen att det finns ett reellt tal c sådant att $a_n \leq c \leq b_n$ för alla $n = 1, 2, 3, \dots$. Eftersom $b_n - a_n \leq \frac{b_1 - a_1}{2^n}$ så närmar sig avståndet mellan b_n och a_n noll, då n växer.

Varje uppåt/nedåt begränsad mängd har ett supremum/infimum (forts)

Om sådana följder har skapats, så ger den fundamentala egenskapen hos de reella talen att det finns ett reellt tal c sådant att $a_n \leq c \leq b_n$ för alla $n = 1, 2, 3, \dots$. Eftersom $b_n - a_n \leq \frac{b_1 - a_1}{2^n}$ så närmar sig avståndet mellan b_n och a_n noll, då n växer. Därför finns exakt ett reellt tal c sådant att $a_n \leq c \leq b_n$ för alla $n = 1, 2, 3, \dots$

Varje uppåt/nedåt begränsad mängd har ett supremum/infimum (forts)

Om sådana följder har skapats, så ger den fundamentala egenskapen hos de reella talen att det finns ett reellt tal c sådant att $a_n \leq c \leq b_n$ för alla $n = 1, 2, 3, \dots$. Eftersom $b_n - a_n \leq \frac{b_1 - a_1}{2^n}$ så närmar sig avståndet mellan b_n och a_n noll, då n växer. Därför finns exakt ett reellt tal c sådant att $a_n \leq c \leq b_n$ för alla $n = 1, 2, 3, \dots$. Om inte c är en övre gräns till X så skulle det finnas något $x \in X$ så att $c < x$, och eftersom $x \leq b_n$ för alla n , så skulle vi få $b_n - a_n \geq x - c$ för alla n , vilket motsäger att $b_n - a_n$ närmar sig noll då n växer. Så c måste vara en övre gräns till X .

Varje uppåt/nedåt begränsad mängd har ett supremum/infimum (forts)

Om sådana följder har skapats, så ger den fundamentala egenskapen hos de reella talen att det finns ett reellt tal c sådant att $a_n \leq c \leq b_n$ för alla $n = 1, 2, 3, \dots$. Eftersom $b_n - a_n \leq \frac{b_1 - a_1}{2^n}$ så närmar sig avståndet mellan b_n och a_n noll, då n växer. Därför finns exakt ett reellt tal c sådant att $a_n \leq c \leq b_n$ för alla $n = 1, 2, 3, \dots$. Om inte c är en övre gräns till X så skulle det finnas något $x \in X$ så att $c < x$, och eftersom $x \leq b_n$ för alla n , så skulle vi få $b_n - a_n \geq x - c$ för alla n , vilket motsäger att $b_n - a_n$ närmar sig noll då n växer. Så c måste vara en övre gräns till X . Om man antar att det finns en annan övre gräns $c' < c$ till X , så får man en motsägelse på liknande sätt som ovan (övning), varför vi drar slutsatsen att c måste vara en minsta övre gräns.

Varje uppåt/nedåt begränsad mängd har ett supremum/infimum (forts)

Det återstår dock att visa att man kan konstruera sådana följder $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ och $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$ som beskrevs på föregående sida.

Varje uppåt/nedåt begränsad mängd har ett supremum/infimum (forts)

Det återstår dock att visa att man kan konstruera sådana följder $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ och $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$ som beskrivs på föregående sida. Detta görs induktivt. Antag att $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ och $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ har konstruerats så att de tidigare beskrivna villkoren gäller.

Varje uppåt/nedåt begränsad mängd har ett supremum/infimum (forts)

Det återstår dock att visa att man kan konstruera sådana följder $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ och $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$ som beskrivs på föregående sida. Detta görs induktivt. Antag att $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ och $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ har konstruerats så att de tidigare beskrivna villkoren gäller. Titta på talet $\frac{a_n + b_n}{2}$ som ligger precis mitt emellan a_n och b_n .

Varje uppåt/nedåt begränsad mängd har ett supremum/infimum (forts)

Det återstår dock att visa att man kan konstruera sådana följder $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ och $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$ som beskrivs på föregående sida. Detta görs induktivt. Antag att $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ och $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ har konstruerats så att de tidigare beskrivna villkoren gäller. Titta på talet $\frac{a_n+b_n}{2}$ som ligger precis mitt emellan a_n och b_n . Om $\frac{a_n+b_n}{2}$ är minst lika stort som varje tal i X så låt $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ och $a_{n+1} = a_n$.

Varje uppåt/nedåt begränsad mängd har ett supremum/infimum (forts)

Det återstår dock att visa att man kan konstruera sådana följder $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ och $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$ som beskrevs på föregående sida. Detta görs induktivt. Antag att $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ och $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ har konstruerats så att de tidigare beskrivna villkoren gäller. Titta på talet $\frac{a_n + b_n}{2}$ som ligger precis mitt emellan a_n och b_n . Om $\frac{a_n + b_n}{2}$ är minst lika stort som varje tal i X så låt $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ och $a_{n+1} = a_n$. Om $c_n < x$ för något $x \in X$, så låt $a_{n+1} = x$ och $b_{n+1} = b_n$.

Varje uppåt/nedåt begränsad mängd har ett supremum/infimum (forts)

Det återstår dock att visa att man kan konstruera sådana följder $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ och $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$ som beskrevs på föregående sida. Detta görs induktivt. Antag att $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ och $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ har konstruerats så att de tidigare beskrivna villkoren gäller. Titta på talet $\frac{a_n+b_n}{2}$ som ligger precis mitt emellan a_n och b_n . Om $\frac{a_n+b_n}{2}$ är minst lika stort som varje tal i X så låt $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ och $a_{n+1} = a_n$. Om $c_n < x$ för något $x \in X$, så låt $a_{n+1} = x$ och $b_{n+1} = b_n$. I båda fallen följer att

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) \leq \frac{1}{2} \frac{(b_1 - a_1)}{2^n} = \frac{(b_1 - a_1)}{2^{n+1}},$$

och med detta är skissen av beviset av a-delen av satsen klar.

Talföljder: när framträder de?

Talföljder: när framträder de?

I den matematiska analysens sammanhang så uppstår talföljder ofta man försöker **uppskatta/approximera** någon kvantitet.

Talföljder: när framträder de?

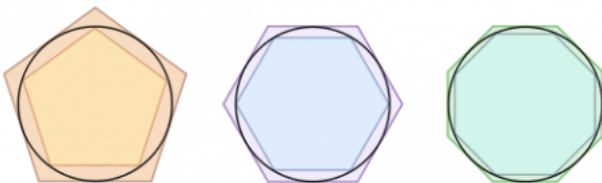
I den matematiska analysens sammanhang så uppstår talföljder ofta man försöker **uppskatta/approximera** någon kvantitet.

Exempelvis så uppskattade Archimedes talet π (= hälften av omkretsen av en cirkel med radien 1) genom att beräkna omkretsen av “ n -goner” så som illustreras nedan:

Talföljder: när framträder de?

I den matematiska analysens sammanhang så uppstår talföljder ofta man försöker **uppskatta/approximera** någon kvantitet.

Exempelvis så uppskattade Archimedes talet π (= hälften av omkretsen av en cirkel med radien 1) genom att beräkna omkretsen av " n -goner" så som illustreras nedan:



Talföljder: ett exempel

Exempel Antag att ett objekt förflyttar i samma riktning under tidsintervallet $[0, 1]$ dvs. för $0 \leq t \leq 1$, där t representerar tiden. Objektets hastighet vid tidpunkten t är $2t$.

Talföljder: ett exempel

Exempel Antag att ett objekt förflyttar i samma riktning under tidsintervallet $[0, 1]$ dvs. för $0 \leq t \leq 1$, där t representerar tiden. Objektets hastighet vid tidpunkten t är $2t$.

Hur lång sträcka har objektet förflyttat sig under tiden från $t = 0$ till $t = 1$ (dvs. under tidsintervallet $[0, 1]$)?

Talföljder: ett exempel

Exempel Antag att ett objekt förflyttar i samma riktning under tidsintervallet $[0, 1]$ dvs. för $0 \leq t \leq 1$, där t representerar tiden. Objektets hastighet vid tidpunkten t är $2t$.

Hur lång sträcka har objektet förflyttat sig under tiden från $t = 0$ till $t = 1$ (dvs. under tidsintervallet $[0, 1]$)?

Den som redan är bekant med integraler och tillämpningar på areaberäkningar kanske redan vet hur man kan räkna ut detta, även för mer komplicerade funktioner än $2t$.

Talföljder: ett exempel

Exempel Antag att ett objekt förflyttar i samma riktning under tidsintervallet $[0, 1]$ dvs. för $0 \leq t \leq 1$, där t representerar tiden. Objektets hastighet vid tidpunkten t är $2t$.

Hur lång sträcka har objektet förflyttat sig under tiden från $t = 0$ till $t = 1$ (dvs. under tidsintervallet $[0, 1]$)?

Den som redan är bekant med integraler och tillämpningar på areaberäkningar kanske redan vet hur man kan räkna ut detta, även för mer komplicerade funktioner än $2t$. Men för att illustrera hur en talföljd kan uppstå så uppskattar vi sträckan s som objektet har förflyttat sig under tidsintervallet $[0, t]$.

Exempel (forts)

I den n -te uppskattningen av s , som vi betecknar s_n , så delas intervallet $[0, 1]$ upp i n lika stora delar:

$$[0, \frac{1}{n}], [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], [\frac{2}{n}, \frac{3}{n}], \dots, [\frac{n-1}{n}, 1].$$

Exempel (forts)

I den n -te uppskattningen av s , som vi betecknar s_n , så delas intervallet $[0, 1]$ upp i n lika stora delar:

$$[0, \frac{1}{n}], [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], [\frac{2}{n}, \frac{3}{n}], \dots, [\frac{n-1}{n}, 1].$$

I den n -te uppskattningen så gör vi förenklingen att hastigheten under hela det m -te intervallet $[\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}]$ är $2\frac{m}{n}$ (dvs. hastigheten då $t = \frac{m}{n}$).

Exempel (forts)

I den n -te uppskattningen av s , som vi betecknar s_n , så delas intervallet $[0, 1]$ upp i n lika stora delar:

$$[0, \frac{1}{n}], [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], [\frac{2}{n}, \frac{3}{n}], \dots, [\frac{n-1}{n}, 1].$$

I den n -te uppskattningen så gör vi förenklingen att hastigheten under hela det m -te intervallet $[\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}]$ är $2\frac{m}{n}$ (dvs. hastigheten då $t = \frac{m}{n}$).

Under denna förenkling så färdas objektet $2\frac{m}{n} \cdot \frac{1}{n}$ enheter under tidsintervallet $[\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}]$, eftersom tidsintervallet har längd $\frac{1}{n}$.

Exempel (forts)

I den n -te uppskattningen av s , som vi betecknar s_n , så delas intervallet $[0, 1]$ upp i n lika stora delar:

$$[0, \frac{1}{n}], [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], [\frac{2}{n}, \frac{3}{n}], \dots, [\frac{n-1}{n}, 1].$$

I den n -te uppskattningen så gör vi förenklingen att hastigheten under hela det m -te intervallet $[\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}]$ är $2\frac{m}{n}$ (dvs. hastigheten då $t = \frac{m}{n}$).

Under denna förenkling så färdas objektet $2\frac{m}{n} \cdot \frac{1}{n}$ enheter under tidsintervallet $[\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}]$, eftersom tidsintervallet har längd $\frac{1}{n}$.

Om vi lägger ihop $2\frac{m}{n} \cdot \frac{1}{n}$ för $m = 1, 2, \dots, n$ så får vi följande uppskattning av sträckan som objektet har färdats under tidsintervallet $[0, t]$:

Exempel (forts)

$$\begin{aligned}s_n &= 2\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + 2\frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} + 2\frac{3}{n} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n} \\&= \frac{2}{n^2}(1 + 2 + 3 + \dots + n) \\&= \frac{n(n+1)}{n^2}\end{aligned}$$

där den sista likheten följer från sambandet

$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. (Två gånger vänsterledet är lika med $n(n+1)$, vilket inses genom att lägga ihop 1 med n , 2 med $n-1$, 3 med $n-2$, osv.)

Exempel (forts)

$$\begin{aligned}s_n &= 2\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + 2\frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} + 2\frac{3}{n} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n} \\&= \frac{2}{n^2}(1 + 2 + 3 + \dots + n) \\&= \frac{n(n+1)}{n^2}\end{aligned}$$

där den sista likheten följer från sambandet

$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. (Två gånger vänsterledet är lika med $n(n+1)$, vilket inses genom att lägga ihop 1 med n , 2 med $n-1$, 3 med $n-2$, osv.)

Förenkling ger $s_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ och man ser att ju större n blir, desto närmare 1 blir $s_n = 1 + \frac{1}{n}$.

Exempel (forts)

$$\begin{aligned}s_n &= 2 \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + 2 \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} + 2 \frac{3}{n} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n} \\&= \frac{2}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n) \\&= \frac{n(n+1)}{n^2}\end{aligned}$$

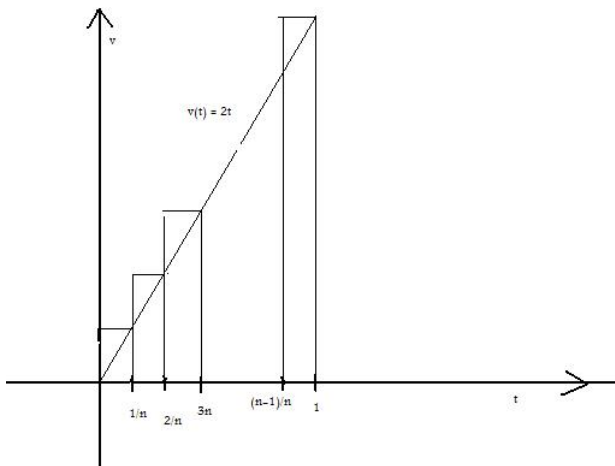
där den sista likheten följer från sambandet

$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. (Två gånger vänsterledet är lika med $n(n+1)$, vilket inses genom att lägga ihop 1 med n , 2 med $n-1$, 3 med $n-2$, osv.)

Förenkling ger $s_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ och man ser att ju större n blir, desto närmare 1 blir $s_n = 1 + \frac{1}{n}$. Om vi nu kan enas om att uppskattningen s_n närmar sig den sträcka som objektet färdats under tidsintervallet $[0, 1]$, så kan vi dra slutsatsen att objektet har färdats 1 längdenhet under intervallet $[0, 1]$.

Exempel (forts)

Man kan illustrera vår uppskattning med en figur:



Exempel (forts)

Den m -te stapeln i från vänster motsvarar hur långt objektet skulle färdas under tidsintervallet $[\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}]$ om hastigheten vore konstant $2\frac{m}{n}$ under detta tidsintervall.

Exempel (forts)

Den m -te stapeln i från vänster motsvarar hur långt objektet skulle färdas under tidsintervallet $[\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}]$ om hastigheten vore konstant $2\frac{m}{n}$ under detta tidsintervall.

Man ser också att när n växer så blir staplarna smalare (och fler) och s_n blir en alltbättre uppskattning av området som stängs in av grafen av $v(t) = 2t$, t -axeln och linjen $t = 1$.

Exempel (forts)

Den m -te stapeln i från vänster motsvarar hur långt objektet skulle färdas under tidsintervallet $[\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}]$ om hastigheten vore konstant $2\frac{m}{n}$ under detta tidsintervall.

Man ser också att när n växer så blir staplarna smalare (och fler) och s_n blir en alltbättre uppskattning av området som stängs in av grafen av $v(t) = 2t$, t -axeln och linjen $t = 1$.

Sålunda motsvaras sträckan som objektet färdas under tidsintervallet $[0, 1]$ av den ovan beskrivna arean.

Talföljder och konvergens

I föregående exempel stötte vi på talföljden $s_n = 1 + \frac{1}{n}$,
 $n = 1, 2, 3, \dots$

(Denna talföljd börjar alltså med $s_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2$, $s_2 = 1 + \frac{1}{2}$,
 $s_3 = 1 + \frac{1}{3}, \dots, s_{1000} = 1 + \frac{1}{1000}$, osv.)

Talföljder och konvergens

I föregående exempel stötte vi på talföljden $s_n = 1 + \frac{1}{n}$,
 $n = 1, 2, 3, \dots$

(Denna talföljd börjar alltså med $s_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2$, $s_2 = 1 + \frac{1}{2}$,
 $s_3 = 1 + \frac{1}{3}, \dots, s_{1000} = 1 + \frac{1}{1000}$, osv.)

Fråga: 1. Vad är avståndet från s_3 till 1 (på tallinjen)?
2. Vad är avståndet från s_n till 1?

Talföljder och konvergens

I föregående exempel stötte vi på talföljden $s_n = 1 + \frac{1}{n}$,
 $n = 1, 2, 3, \dots$

(Denna talföljd börjar alltså med $s_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2$, $s_2 = 1 + \frac{1}{2}$,
 $s_3 = 1 + \frac{1}{3}, \dots, s_{1000} = 1 + \frac{1}{1000}$, osv.)

Fråga: 1. Vad är avståndet från s_3 till 1 (på tallinjen)?
2. Vad är avståndet från s_n till 1?

Talföljden s_n närmar sig 1 då n växer i följande bemärkelse: För varje reellt tal $\delta > 0$ (hur litet det än må vara) så kommer avståndet från s_n till 1 att vara högst δ om $n \geq 1/\delta$.

Talföljder och konvergens

I föregående exempel stötte vi på talföljden $s_n = 1 + \frac{1}{n}$,
 $n = 1, 2, 3, \dots$

(Denna talföljd börjar alltså med $s_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2$, $s_2 = 1 + \frac{1}{2}$,
 $s_3 = 1 + \frac{1}{3}, \dots, s_{1000} = 1 + \frac{1}{1000}$, osv.)

Fråga: 1. Vad är avståndet från s_3 till 1 (på tallinjen)?
2. Vad är avståndet från s_n till 1?

Talföljden s_n närmar sig 1 då n växer i följande bemärkelse: För varje reellt tal $\delta > 0$ (hur litet det än må vara) så kommer avståndet från s_n till 1 att vara högst δ om $n \geq 1/\delta$.

Med matematiskt språkbruk kan man säga: "*för alla tillräckligt stora n så kommer s_n att vara godtyckligt nära 1*".

Talföljder och konvergens (forts)

Låt nu a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, beteckna vilken talföljd (dvs. följd av tal) som helst.

Talföljder och konvergens (forts)

Låt nu a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, beteckna vilken talföljd (dvs. följd av tal) som helst.

Om det finns ett tal a sådant att för alla tillräckligt stora n så kommer a_n att vara godtyckligt nära a , så säger man att talföljden a_n **konvergerar (mot a)**.

Talföljder och konvergens (forts)

Låt nu a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, beteckna vilken talföljd (dvs. följd av tal) som helst.

Om det finns ett tal a sådant att för alla tillräckligt stora n så kommer a_n att vara godtyckligt nära a , så säger man att talföljden a_n **konvergerar (mot a)**.

Med symboler uttrycks “ a_n konvergerar mot a ” med

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Talföljder och konvergens (forts)

Låt nu a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, beteckna vilken talföljd (dvs. följd av tal) som helst.

Om det finns ett tal a sådant att för alla tillräckligt stora n så kommer a_n att vara godtyckligt nära a , så säger man att talföljden a_n **konvergerar (mot a)**.

Med symboler uttrycks “ a_n konvergerar mot a ” med

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Om ovanstående känns för luddigt så har vi:

Precis definition av konvergens av en talföljd:

a_n konvergerar mot a om, för varje reellt tal $\delta > 0$ det finns ett heltal N_δ sådant att $|a - a_n| \leq \delta$ om $n \geq N_\delta$.

Talföljder och konvergens (forts)

Låt nu a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, beteckna vilken talföljd (dvs. följd av tal) som helst.

Om det finns ett tal a sådant att för alla tillräckligt stora n så kommer a_n att vara godtyckligt nära a , så säger man att talföljden a_n **konvergerar (mot a)**.

Med symboler uttrycks “ a_n konvergerar mot a ” med

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Om ovanstående känns för luddigt så har vi:

Precis definition av konvergens av en talföljd:

a_n konvergerar mot a om, för varje reellt tal $\delta > 0$ det finns ett heltal N_δ sådant att $|a - a_n| \leq \delta$ om $n \geq N_\delta$.

Notera att $|a - a_n|$ är avståndet från a_n till a .

Talföljder och konvergens (forts)

Övning 5. Låt $s_n = 1 + \frac{1}{n}$, för $n = 1, 2, 3, \dots$, och låt $\delta = 10^{-9}$. Hur kan man välja ett heltal N_δ för att $|1 - s_n| \leq \delta$ för alla $n \geq N_\delta$?

Övning 6. Ange för var och en av talföljderna nedan om den är konvergent, och i så fall vilket tal den konvergerar mot.

(a) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

(b) $a_n = -1 - \frac{1}{n}$.

(c) $a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$.

(d) $a_n = n \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$.

(e) $a_n = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$.

(f) $a_n = \frac{n^2+1}{n}$.

(g) $a_n = \frac{n^2+1}{n^2}$.

(h) $a_n = \frac{n^2+1}{n^3}$.

Talföljder och divergens

En talföljd a_n kallas för **divergent** om den inte är konvergent.

Talföljder och divergens

En talföljd a_n kallas för **divergent** om den inte är konvergent.

En typ av divergens har dock särskilt intresse.

Definition: Vi säger att talföljden a_n **divergerar mot oändligheten**/ ∞ , med symboler $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, om för varje reellt tal r det finns ett heltal N_r sådant att $a_n \geq r$ för alla $n \geq N_r$.

Talföljder och divergens

En talföljd a_n kallas för **divergent** om den inte är konvergent.

En typ av divergens har dock särskilt intresse.

Definition: Vi säger att talföljden a_n **divergerar mot oändligheten**/ ∞ , med symboler $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, om för varje reellt tal r det finns ett heltal N_r sådant att $a_n \geq r$ för alla $n \geq N_r$. Man kan uttrycka detta som att " a_n är godtyckligt stort för alla tillräckligt stora n ".

Talföljder och divergens

En talföljd a_n kallas för **divergent** om den inte är konvergent.

En typ av divergens har dock särskilt intresse.

Definition: Vi säger att talföljden a_n **divergerar mot oändligheten**/ ∞ , med symboler $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, om för varje reellt tal r det finns ett heltal N_r sådant att $a_n \geq r$ för alla $n \geq N_r$. Man kan uttrycka detta som att " a_n är godtyckligt stort för alla tillräckligt stora n ".

Övning 7. För precis en av talföljderna a_n i övning 6 så gäller att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Vilken?

Talföljder och divergens

En talföljd a_n kallas för **divergent** om den inte är konvergent.

En typ av divergens har dock särskilt intresse.

Definition: Vi säger att talföljden a_n **divergerar mot oändligheten**/ ∞ , med symboler $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, om för varje reellt tal r det finns ett heltal N_r sådant att $a_n \geq r$ för alla $n \geq N_r$. Man kan uttrycka detta som att " a_n är godtyckligt stort för alla tillräckligt stora n ".

Övning 7. För precis en av talföljderna a_n i övning 6 så gäller att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Vilken?

Övning 8. Betrakta övning 6 igen. För var och en av talföljderna a_n , så låt $b_n = |a_n|$. För vilka av dessa talföljder b_n gäller att $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$?

Övning 9. Man kan också definiera vad det innebär att en talföljd a_n "närmar sig $-\infty$ ", med symboler $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$. Gör detta.

Övning 9. Man kan också definiera vad det innebär att en talföljd a_n "närmar sig $-\infty$ ", med symboler $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$. Gör detta. (...för varje r så finns N_r så att $a_n \leq r$ för alla $n \geq N_r$.)

Övning 9. Man kan också definiera vad det innebär att en talföljd a_n "närmar sig $-\infty$ ", med symboler $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$. Gör detta. (...för varje r så finns N_r så att $a_n \leq r$ för alla $n \geq N_r$.)

En sats om konvergens: Antag att a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, är en talföljd sådan att

- (a) $a_n \leq a_m$ om $n < m$, och
- (b) $a_n \leq A$ för alla n (dvs. a_n är uppåt begränsad).

Övning 9. Man kan också definiera vad det innebär att en talföljd a_n "närmar sig $-\infty$ ", med symboler $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$. Gör detta. (...för varje r så finns N_r så att $a_n \leq r$ för alla $n \geq N_r$.)

En sats om konvergens: Antag att a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, är en talföljd sådan att

- (a) $a_n \leq a_m$ om $n < m$, och
- (b) $a_n \leq A$ för alla n (dvs. a_n är uppåt begränsad).

Då är a_n konvergent.

Övning 9. Man kan också definiera vad det innebär att en talföljd a_n "närmar sig $-\infty$ ", med symboler $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$. Gör detta. (...för varje r så finns N_r så att $a_n \leq r$ för alla $n \geq N_r$.)

En sats om konvergens: Antag att a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, är en talföljd sådan att

(a) $a_n \leq a_m$ om $n < m$, och

(b) $a_n \leq A$ för alla n (dvs. a_n är uppåt begränsad).

Då är a_n konvergent.

Beviskiss: Kom ihåg att, enligt en tidigare nämnd sats, så gäller att varje mängd X som är uppåt begränsad har en minsta övre gräns.

Övning 9. Man kan också definiera vad det innebär att en talföljd a_n “närmar sig $-\infty$ ”, med symboler $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$. Gör detta. (...för varje r så finns N_r så att $a_n \leq r$ för alla $n \geq N_r$.)

En sats om konvergens: Antag att a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, är en talföljd sådan att

(a) $a_n \leq a_m$ om $n < m$, och

(b) $a_n \leq A$ för alla n (dvs. a_n är uppåt begränsad).

Då är a_n konvergent.

Beviskiss: Kom ihåg att, enligt en tidigare nämnd sats, så gäller att varje mängd X som är uppåt begränsad har en minsta övre gräns. Därför har mängden $X = \{a_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ en *minsta* övre gräns, som vi kallar a .

Talföljder, konvergens och divergens (forts)

Om det skulle finnas något $\delta > 0$ och godtyckligt stora n så att $|a - a_n| > \delta$, så skulle det följa, pga. antagandet (a), att *för alla* n så $|a - a_n| > \delta$, vilket motsäger att a är en *minsta* övre gräns till mängden $\{a_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$.

Talföljder, konvergens och divergens (forts)

Om det skulle finnas något $\delta > 0$ och godtyckligt stora n så att $|a - a_n| > \delta$, så skulle det följa, pga. antagandet (a), att *för alla* n så $|a - a_n| > \delta$, vilket motsäger att a är en *minsta* övre gräns till mängden $\{a_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$. Därför drar vi slutsatsen att a_n konvergerar mot a , vilket avslutar vår bevisskiss.

Talföljder, konvergens och divergens (forts)

Om det skulle finnas något $\delta > 0$ och godtyckligt stora n så att $|a - a_n| > \delta$, så skulle det följa, pga. antagandet (a), att *för alla* n så $|a - a_n| > \delta$, vilket motsäger att a är en *minsta* övre gräns till mängden $\{a_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$. Därför drar vi slutsatsen att a_n konvergerar mot a , vilket avslutar vår bevisskiss.

Övning 10. Visa att om a_n är icke-växande (dvs. $a_n \leq a_m$ om $n > m$) och nedåt begränsad (dvs. det finns A så att $A \leq a_n$ för alla n), så konvergerar a_n .

Ett sista teoretiskt resultat om konvergens:

Ett sista teoretiskt resultat om konvergens:

Sats Om a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, är en talföljd som är både uppåt och nedåt begränsad, dvs. det finns c, d så att $c \leq a_n \leq d$ för alla n , så finns en delföljd a_{m_k} , $k = 1, 2, 3, \dots$ (där $m_k < m_l$ om $k < l$), av a_n , sådan att följderna $b_k = a_{m_k}$ är konvergent.

Ett sista teoretiskt resultat om konvergens:

Sats Om a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, är en talföljd som är både uppåt och nedåt begränsad, dvs. det finns c, d så att $c \leq a_n \leq d$ för alla n , så finns en delföljd a_{m_k} , $k = 1, 2, 3, \dots$ (där $m_k < m_l$ om $k < l$), av a_n , sådan att följden $b_k = a_{m_k}$ är konvergent.

Exempel: I övning 6(a) så är $b_k = a_{2k}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, en konvergent delföljd av följden a_n (i den övningen), eftersom $b_k = a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k}$ för alla $k = 1, 2, 3, \dots$

Ett sista teoretiskt resultat om konvergens:

Sats Om a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, är en talföljd som är både uppåt och nedåt begränsad, dvs. det finns c, d så att $c \leq a_n \leq d$ för alla n , så finns en delföljd a_{m_k} , $k = 1, 2, 3, \dots$ (där $m_k < m_l$ om $k < l$), av a_n , sådan att följden $b_k = a_{m_k}$ är konvergent.

Exempel: I övning 6(a) så är $b_k = a_{2k}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, en konvergent delföljd av följden a_n (i den övningen), eftersom $b_k = a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k}$ för alla $k = 1, 2, 3, \dots$.

Övning 11. För varje talföljd bland de i övning 6 som är både uppåt och nedåt begränsad, ange en konvergent delföljd.

Delföljder och konvergens (forts)

Beviset av den sista satsen kan utföras genom att man, steg för steg, väljer väljer tal c_k, d_k för $k = 1, 2, 3, \dots$ sådana att $c_k \leq d_k$, $d_k - c_k \leq \frac{1}{2^k}$, och a_n tillhör intervallet $[c_k, d_k]$ för oändligt många n .

Delföljder och konvergens (forts)

Beviset av den sista satsen kan utföras genom att man, steg för steg, väljer väljer tal c_k, d_k för $k = 1, 2, 3, \dots$ sådana att $c_k \leq d_k$, $d_k - c_k \leq \frac{1}{2^k}$, och a_n tillhör intervallet $[c_k, d_k]$ för oändligt många n .

Enligt den fundamentala egenskapen hos de reella talen (som har nämnts tidigare) så finns ett tal, och i denna situation *exakt ett*, som vi kan kalla p som tillhör $[c_k, d_k]$ för alla $k = 1, 2, 3, \dots$. Nu går det att välja en delföljd av a_n som konvergerar mot p .

Delföljder och konvergens (forts)

Beviset av den sista satsen kan utföras genom att man, steg för steg, väljer väljer tal c_k, d_k för $k = 1, 2, 3, \dots$ sådana att $c_k \leq d_k$, $d_k - c_k \leq \frac{1}{2^k}$, och a_n tillhör intervallet $[c_k, d_k]$ för oändligt många n .

Enligt den fundamentala egenskapen hos de reella talen (som har nämnts tidigare) så finns ett tal, och i denna situation *exakt ett*, som vi kan kalla p som tillhör $[c_k, d_k]$ för alla $k = 1, 2, 3, \dots$. Nu går det att välja en delföljd av a_n som konvergerar mot p .

Om man vill sätta sig in lite mer i den grundläggande teorin för den matematiska analysen, så kan man läsa Appendix III i kursboken.

Delföljder och konvergens (forts)

Beviset av den sista satsen kan utföras genom att man, steg för steg, väljer väljer tal c_k, d_k för $k = 1, 2, 3, \dots$ sådana att $c_k \leq d_k$, $d_k - c_k \leq \frac{1}{2^k}$, och a_n tillhör intervallet $[c_k, d_k]$ för oändligt många n .

Enligt den fundamentala egenskapen hos de reella talen (som har nämnts tidigare) så finns ett tal, och i denna situation *exakt ett*, som vi kan kalla p som tillhör $[c_k, d_k]$ för alla $k = 1, 2, 3, \dots$. Nu går det att välja en delföljd av a_n som konvergerar mot p .

Om man vill sätta sig in lite mer i den grundläggande teorin för den matematiska analysen, så kan man läsa Appendix III i kursboken.

Föreläsning 3 kommer sannolikt också att ta upp gränsvärden för funktioner, som behandlas i Kapitel 1.2 och 1.3 i kursboken. (Annars kommer detta upp i föreläsning 4.)