

Envariabelanalys: Föreläsning 12–13

Vera Koponen

Uppsala Universitet

Envariabelanalys, vt 2011

Gränsvärden: l'Hospitals första regel

Följande regel kan vara till hjälp när man försöker bestämma ett gränsvärde av en funktion $\frac{f(x)}{g(x)}$ där både $f(x)$ och $g(x)$ går mot 0.

Gränsvärden: l'Hospitals första regel

Följande regel kan vara till hjälp när man försöker bestämma ett gränsvärde av en funktion $\frac{f(x)}{g(x)}$ där både $f(x)$ och $g(x)$ går mot 0.

l'Hospitals första regel: Låt τ stå för något av $a+$, $a-$, a , ∞ eller $-\infty$, där $a \in \mathbb{R}$. För respektive fall så antag att $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara på (a, b) där $a < b$, (b, a) där $b < a$, (b, c) där $b < a < c$, (b, ∞) , eller $(-\infty, b)$ för något reellt b .

Gränsvärden: l'Hospitals första regel

Följande regel kan vara till hjälp när man försöker bestämma ett gränsvärde av en funktion $\frac{f(x)}{g(x)}$ där både $f(x)$ och $g(x)$ går mot 0.

l'Hospitals första regel: Låt τ stå för något av $a+$, $a-$, a , ∞ eller $-\infty$, där $a \in \mathbb{R}$. För respektive fall så antag att $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara på (a, b) där $a < b$, (b, a) där $b < a$, (b, c) där $b < a < c$, (b, ∞) , eller $(-\infty, b)$ för något reellt b .

Om

- 1 $\lim_{x \rightarrow \tau} f(x) = \lim_{x \rightarrow \tau} g(x) = 0$, och
- 2 $\lim_{x \rightarrow \tau} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \sigma$, där σ är ett reellt tal eller $\sigma = \pm\infty$,

så

$$\lim_{x \rightarrow \tau} \frac{f(x)}{g(x)} = \sigma.$$

Gränsvärden: l'Hospitals första regel

Följande regel kan vara till hjälp när man försöker bestämma ett gränsvärde av en funktion $\frac{f(x)}{g(x)}$ där både $f(x)$ och $g(x)$ går mot 0.

l'Hospitals första regel: Låt τ stå för något av $a+$, $a-$, a , ∞ eller $-\infty$, där $a \in \mathbb{R}$. För respektive fall så antag att $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara på (a, b) där $a < b$, (b, a) där $b < a$, (b, c) där $b < a < c$, (b, ∞) , eller $(-\infty, b)$ för något reellt b .

Om

- 1 $\lim_{x \rightarrow \tau} f(x) = \lim_{x \rightarrow \tau} g(x) = 0$, och
- 2 $\lim_{x \rightarrow \tau} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \sigma$, där σ är ett reellt tal eller $\sigma = \pm\infty$,

så

$$\lim_{x \rightarrow \tau} \frac{f(x)}{g(x)} = \sigma.$$

Beviset, för var och en av fallen, är relativt kort och använder den generaliserade medelvärdessatsen; se kapitel 4.3 och kapitel 2.8 (om medelvärdessatsen) i kursboken.

Gränsvärden: l'Hospitals andra regel

l'Hospitals andra regel kan vara användbar om täljaren och nämnaren går mot $\pm\infty$.

l'Hospitals andra regel: Låt τ stå för något av $a+$, $a-$, a , ∞ eller $-\infty$, där $a \in \mathbb{R}$. För respektive fall så antag att $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara på (a, b) där $a < b$, (b, a) där $b < a$, (b, c) där $b < a < c$, (b, ∞) , eller $(-\infty, b)$ för något reellt b .

Gränsvärden: l'Hospitals andra regel

l'Hospitals andra regel kan vara användbar om täljaren och nämnaren går mot $\pm\infty$.

l'Hospitals andra regel: Låt τ stå för något av $a+$, $a-$, a , ∞ eller $-\infty$, där $a \in \mathbb{R}$. För respektive fall så antag att $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara på (a, b) där $a < b$, (b, a) där $b < a$, (b, c) där $b < a < c$, (b, ∞) , eller $(-\infty, b)$ för något reellt b .

Om

- 1 $\lim_{x \rightarrow \tau} g(x) = \pm\infty$, och
- 2 $\lim_{x \rightarrow \tau} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \sigma$, där σ är ett reellt tal eller $\sigma = \pm\infty$,

så

$$\lim_{x \rightarrow \tau} \frac{f(x)}{g(x)} = \sigma.$$

Gränsvärden: l'Hospitals andra regel

l'Hospitals andra regel kan vara användbar om täljaren och nämnaren går mot $\pm\infty$.

l'Hospitals andra regel: Låt τ stå för något av $a+$, $a-$, a , ∞ eller $-\infty$, där $a \in \mathbb{R}$. För respektive fall så antag att $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara på (a, b) där $a < b$, (b, a) där $b < a$, (b, c) där $b < a < c$, (b, ∞) , eller $(-\infty, b)$ för något reellt b .

Om

① $\lim_{x \rightarrow \tau} g(x) = \pm\infty$, och

② $\lim_{x \rightarrow \tau} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \sigma$, där σ är ett reellt tal eller $\sigma = \pm\infty$,

så

$$\lim_{x \rightarrow \tau} \frac{f(x)}{g(x)} = \sigma.$$

Beviset är något mera komplicerat än för den föregående l'Hospital-regeln, och skissas i övning 35 i kapitel 4.3 av kursboken.

Stora ordo-notationen (‘‘big-O notation’’)

Antag att f , g och h är funktioner.

Definition

Stora ordo-notationen ("big-O notation")

Antag att f , g och h är funktioner.

Definition

- 1 Uttrycket " $f(x) = O(h(x))$ då $x \rightarrow a$ ", där " $O(h(x))$ " utläses "ordo av $h(x)$ ", betyder att det finns en konstant $C \geq 0$ så att för alla reella tal x som är tillräckligt nära a så

$$|f(x)| \leq C|h(x)|.$$

Med andra ord så är $C|h(x)|$ en övre gräns för $|f(x)|$ i närheten av a .

Stora ordo-notationen ("big-O notation")

Antag att f , g och h är funktioner.

Definition

- 1 Uttrycket " $f(x) = O(h(x))$ då $x \rightarrow a$ ", där " $O(h(x))$ " utläses "ordo av $h(x)$ ", betyder att det finns en konstant $C \geq 0$ så att för alla reella tal x som är tillräckligt nära a så

$$|f(x)| \leq C|h(x)|.$$

Med andra ord så är $C|h(x)|$ en övre gräns för $|f(x)|$ i närheten av a .

- 2 Följdaktligen betyder uttrycket " $f(x) = g(x) + O(h(x))$ då $x \rightarrow a$ " att för alla x som är tillräckligt nära a , så

$$|f(x) - g(x)| \leq C|h(x)|.$$

Med andra ord är skillnaden mellan $f(x)$ och $g(x)$ högst $C|h(x)|$, om x är tillräckligt nära a .

Exempel. Antag att $g(x)$ är en *uppskattning* (*approximering*) av $f(x)$ i närheten av $x = a$ (dvs. $f(x) \approx g(x)$ om x är nära a).

Exempel. Antag att $g(x)$ är en *uppskattning* (*approximering*) av $f(x)$ i närheten av $x = a$ (dvs. $f(x) \approx g(x)$ om x är nära a).

Om man säger att " $f(x) = g(x) + O(x^4)$ då $x \rightarrow a$ " så menar man att det finns konstanter $C \geq 0$ och $\varepsilon > 0$ sådana att om $|x - a| < \varepsilon$ så är **felmarginalen**,

$$|f(x) - g(x)|,$$

då $f(x)$ uppskattas med $g(x)$ högst $C|x^4|$.

Taylor-polynom, för att uppskatta/approximera funktioner

Antag att f är en funktion sådan att alla de $n + 1$ första derivatorna f' , f'' , $\dots$, $f^{(n+1)}$ existerar och är kontinuerliga på intervallet $[b, c]$. Antag också att $b < a < c$.

Taylor-polynom, för att uppskatta/approximera funktioner

Antag att f är en funktion sådan att alla de $n + 1$ första derivatorna f' , f'' , $\dots$, $f^{(n+1)}$ existerar och är kontinuerliga på intervallet $[b, c]$. Antag också att $b < a < c$. Polynomet

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

kallas för **n -te gradens Taylor-polynom för f kring punkten a .**

Taylor-polynom, för att uppskatta/approximera funktioner

Antag att f är en funktion sådan att alla de $n + 1$ första derivatorna f' , f'' , $\dots$, $f^{(n+1)}$ existerar och är kontinuerliga på intervallet $[b, c]$. Antag också att $b < a < c$. Polynomet

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

kallas för **n -te gradens Taylor-polynom för f kring punkten a** .

Den praktiska versionen av Taylors sats:

Om $P_n(x)$ är som ovan, så $f(x) = P_n(x) + O((x - a)^{n+1})$ då $x \rightarrow a$.

Taylor-polynom, för att uppskatta/approximera funktioner

Antag att f är en funktion sådan att alla de $n + 1$ första derivatorna f' , f'' , $\dots$, $f^{(n+1)}$ existerar och är kontinuerliga på intervallet $[b, c]$. Antag också att $b < a < c$. Polynomet

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

kallas för **n -te gradens Taylor-polynom för f kring punkten a** .

Den praktiska versionen av Taylors sats:

Om $P_n(x)$ är som ovan, så $f(x) = P_n(x) + O((x - a)^{n+1})$ då $x \rightarrow a$.

Så felmarginalen i approximationen $P_n(x) \approx f(x)$ är högst $C|x - a|^{n+1}$ för någon konstant $C \geq 0$ och alla x som är tillräckligt nära a .

Den precisa versionen av Taylors sats, under samma antaganden som på föregående sida gäller:

Den precisa versionen av Taylors sats, under samma antaganden som på föregående sida gäller:

För varje $x \in (b, c)$ så finns s mellan a och x så att

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Den precisa versionen av Taylor's sats, under samma antaganden som på föregående sida gäller:

För varje $x \in (b, c)$ så finns s mellan a och x så att

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Observera att

$$\{f^{(n+1)}(s) : s \in [b, c]\}$$

är begränsad, uppåt och nedåt, eftersom $f^{(n+1)}$ antas vara kontinuerlig på $[b, c]$.

Den precisa versionen av Taylor's sats, under samma antaganden som på föregående sida gäller:

För varje $x \in (b, c)$ så finns s mellan a och x så att

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Observera att

$$\{f^{(n+1)}(s) : s \in [b, c]\}$$

är begränsad, uppåt och nedåt, eftersom $f^{(n+1)}$ antas vara kontinuerlig på $[b, c]$.

Beviset av Taylor's sats använder medelvärdessatsen och matematisk induktion över n ; se kapitel 4.10 i kursboken.

Den precisa versionen av Taylor's sats, under samma antaganden som på föregående sida gäller:

För varje $x \in (b, c)$ så finns s mellan a och x så att

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Observera att

$$\{f^{(n+1)}(s) : s \in [b, c]\}$$

är begränsad, uppåt och nedåt, eftersom $f^{(n+1)}$ antas vara kontinuerlig på $[b, c]$.

Beviset av Taylor's sats använder medelvärdessatsen och matematisk induktion över n ; se kapitel 4.10 i kursboken.

Terminologi. Om $a = 0$ så kallas ofta $P_n(x)$, definierad som tidigare, för **Maclaurin-polynomet för f av grad n kring a** . (Bara en gammal tradition.)

“Unikhetssatsen”

Följande sats uttrycker att inget annat polynom än Taylor-polynomet för f kan ha den egenskap som beskrivs i Taylors sats (se den “praktiska versionen”). I den bemärkelsen är Taylor-polynomet för f av grad n kring $x = a$ unikt.

Sats Om $f(x) = Q_n(x) + O((x - a)^{n+1})$ då $x \rightarrow a$ och $Q_n(x)$ är ett polynom vars grad är högst n , så är $Q_n(x)$ Taylor-polynomet för f av grad n kring $x = a$.