

Envariabelanalys: Föreläsning 5-6

Vera Koponen

Uppsala Universitet

Envariabelanalys, vt 2011

Antag att $f(x)$ är en funktion.

Derivata: allmänt

Antag att $f(x)$ är en funktion.

Derivatan av f är en funktion, ofta betecknad $f'(x)$, sådan att $f'(a)$ anger f :s förändringshastighet (hur fort f förändras) i punkten $x = a$.

Antag att $f(x)$ är en funktion.

Derivatan av f är en funktion, ofta betecknad $f'(x)$, sådan att $f'(a)$ anger f :s förändringshastighet (hur fort f förändras) i punkten $x = a$.

Exempel: Om ett objekt färdas i en rät linje, och $s(t)$ anger objektets avstånd från en fast punkt vid tiden t , så anger $s'(t)$ objektets hastighet vid tidpunkten t .

Derivata: allmänt

Antag att $f(x)$ är en funktion.

Derivatan av f är en funktion, ofta betecknad $f'(x)$, sådan att $f'(a)$ anger f :s förändringshastighet (hur fort f förändras) i punkten $x = a$.

Exempel: Om ett objekt färdas i en rät linje, och $s(t)$ anger objektets avstånd från en fast punkt vid tiden t , så anger $s'(t)$ objektets hastighet vid tidpunkten t .

Notera att vi inte än har givit en precis definition av vad derivata är (men det kommer så småningom), utan bara en förklaring av vad en derivata “mäter”.

Derivata: ett exempel

Antag att ett objekt rör sig längs y -axeln under tidsintervallet $0 \leq t \leq 2$, och att dess avstånd från $y = 0$ vid tidpunkten t är

$$s(t) = 1 - (t - 1)^2.$$

Derivata: ett exempel

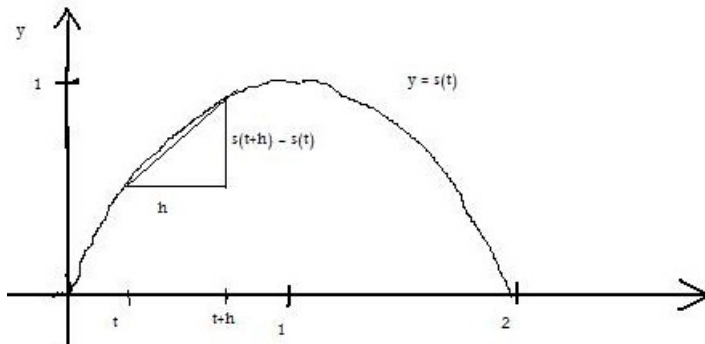
Antag att ett objekt rör sig längs y -axeln under tidsintervallet $0 \leq t \leq 2$, och att dess avstånd från $y = 0$ vid tidpunkten t är

$$s(t) = 1 - (t - 1)^2.$$

Lägg märke till att $s(0) = s(2) = 0$, så objektet börjar (vid $t = 0$) i punkten $y = 0$ och rör sig sedan åt uppåt tills $t = 1$ då objektet vänder och rör sig åt nedåt, för att vid $t = 2$ åter vara i punkten $y = 0$.

Se figur på nästa sida.

Derivata: ett exempel (forts)



Lägg märke till att tidsskillnaden mellan t och $t + h$ är $t + h - t = h$, och avståndsskillnaden mellan vid tidpunkterna t och $t + h$ är $s(t + h) - s(t)$. Så *genomsnittshastigheten under tidsintervallet $[t, t + h]$* är $\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$.

Derivata: ett exempel (forts)

Om vi minskar h , dvs. längden på tidsintervallet $[t, t + h]$ (eller $[t + h, t]$ om $h < 0$), så blir

$$\frac{s(t + h) - s(t)}{h}$$

en bättre uppskattning/approximering av hastigheten vid tidpunkten t .

Derivata: ett exempel (forts)

Om vi minskar h , dvs. längden på tidsintervallet $[t, t + h]$ (eller $[t + h, t]$ om $h < 0$), så blir

$$\frac{s(t + h) - s(t)}{h}$$

en bättre uppskattning/approximering av hastigheten vid tidpunkten t .

Om man låter h gå mot 0 så går $\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$ mot objektets hastighet vid tidpunkten t .

Derivata: ett exempel (forts)

Om vi minskar h , dvs. längden på tidsintervallet $[t, t + h]$ (eller $[t + h, t]$ om $h < 0$), så blir

$$\frac{s(t + h) - s(t)}{h}$$

en bättre uppskattning/approximering av hastigheten vid tidpunkten t .

Om man låter h gå mot 0 så går $\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$ mot objektets hastighet vid tidpunkten t .

Med andra ord, om

$$s'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t + h) - s(t)}{h}$$

så ges objektets hastighet vid tidpunkten t av $s'(t)$.

Derivata: ett exempel (forts)

Om vi minskar h , dvs. längden på tidsintervallet $[t, t + h]$ (eller $[t + h, t]$ om $h < 0$), så blir

$$\frac{s(t + h) - s(t)}{h}$$

en bättre uppskattning/approximering av hastigheten vid tidpunkten t .

Om man låter h gå mot 0 så går $\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$ mot objektets hastighet vid tidpunkten t .

Med andra ord, om

$$s'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t + h) - s(t)}{h}$$

så ges objektets hastighet vid tidpunkten t av $s'(t)$.

Men kan vi få ett enklare uttryck för $s'(t)$, som inte direkt refererar till ett gränsvärde?

Derivata: ett exempel (forts)

Om vi minskar h , dvs. längden på tidsintervallet $[t, t + h]$ (eller $[t + h, t]$ om $h < 0$), så blir

$$\frac{s(t + h) - s(t)}{h}$$

en bättre uppskattning/approximering av hastigheten vid tidpunkten t .

Om man låter h gå mot 0 så går $\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$ mot objektets hastighet vid tidpunkten t .

Med andra ord, om

$$s'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t + h) - s(t)}{h}$$

så ges objektets hastighet vid tidpunkten t av $s'(t)$.

Men kan vi få ett enklare uttryck för $s'(t)$, som inte direkt refererar till ett gränsvärde? Ja, i detta fall kan vi det, eftersom $s(t)$ är en relativt enkel funktion (väsentligen ett polynom).

Derivata: ett exempel (forts)

Eftersom $s(t) = 1 - (t - 1)^2$, så kan vi först räkna ut kvadraterna och sedan förenkla och får då följande:

$$\begin{aligned}s'(t) &= \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \frac{1 - (t+h-1)^2 - ((1 - (t-1)^2))}{h} \\ &= \frac{-2ht - h^2 + 2h}{h} = 2 - 2t - h \rightarrow 2 - 2t\end{aligned}$$

då $h \rightarrow 0$.

Derivata: ett exempel (forts)

Eftersom $s(t) = 1 - (t - 1)^2$, så kan vi först räkna ut kvadraterna och sedan förenkla och får då följande:

$$\begin{aligned}s'(t) &= \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \frac{1 - (t+h-1)^2 - ((1 - (t-1)^2))}{h} \\ &= \frac{-2ht - h^2 + 2h}{h} = 2 - 2t - h \rightarrow 2 - 2t\end{aligned}$$

då $h \rightarrow 0$.

Alltså ges hastigheten vid tidpunkten t av $s'(t) = 2 - 2t$.

Derivata: ett exempel (forts)

Eftersom $s(t) = 1 - (t - 1)^2$, så kan vi först räkna ut kvadraterna och sedan förenkla och får då följande:

$$\begin{aligned}s'(t) &= \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \frac{1 - (t+h-1)^2 - ((1 - (t-1)^2))}{h} \\ &= \frac{-2ht - h^2 + 2h}{h} = 2 - 2t - h \rightarrow 2 - 2t\end{aligned}$$

då $h \rightarrow 0$.

Alltså ges hastigheten vid tidpunkten t av $s'(t) = 2 - 2t$.

Lägg märke till att hastigheten $s'(t)$ är positiv under intervallet $[0, 1)$ då objektet rör sig uppåt, och negativ under intervallet $(1, 2]$ då objektet rör sig nedåt och avståndet $s(t)$ från $y = 0$ minskar. När objektet vänder, vid tidpunkten $t = 1$, så $s'(t) = 0$, vilket är rimligt; precis då objektet vänder så måste hastigheten vara 0.

Derivatans definition

Låt $f(x)$ vara en funktion.

Derivatans definition

Låt $f(x)$ vara en funktion.

Definition (a) Man säger att f är deriverbar i punkten (talet) x om följande gränsvärde existerar som ett reellt tal, och detta tal kallas för derivatan av f punkten x , betecknat $f'(x)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

(b) Om X betecknar mängden av all punkter/tal där f är deriverbar, så är $f'(x)$ en funktion vars domän (de punkter där f är definierad) är X . Med andra ord, för alla $x \in X$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Derivatans definition

Låt $f(x)$ vara en funktion.

Definition (a) Man säger att f är deriverbar i punkten (talet) x om följande gränsvärde existerar som ett reellt tal, och detta tal kallas för derivatan av f punkten x , betecknat $f'(x)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

(b) Om X betecknar mängden av all punkter/tal där f är deriverbar, så är $f'(x)$ en funktion vars domän (de punkter där f är definierad) är X . Med andra ord, för alla $x \in X$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Annan notation: Derivatan $f'(x)$ kan också betecknas med

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f \quad \text{eller} \quad \frac{d}{dx}f(x).$$

Om $s(t) = 1 - (t - 1)^2$, som i föregående exempel, så

$$s'(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}s = \frac{d}{dt}(1 - (t - 1)^2) = 2 - 2t.$$

Derivering i praktiken: ett par enkla funktioner

För att kunna derivera funktioner utan att varje gång gå tillbaka till definitionen, så behöver vi veta hur “enkla” funktioners derivator ser ut, samt hur sammansatta funktioners derivator ser ut om man känner till de enkla funktionernas derivator.

Derivering i praktiken: ett par enkla funktioner

För att kunna derivera funktioner utan att varje gång gå tillbaka till definitionen, så behöver vi veta hur “enkla” funktioners derivator ser ut, samt hur sammansatta funktioners derivator ser ut om man känner till de enkla funktionernas derivator.

Om $f(x) = c$ där c är en konstant, så $f'(x) = 0$.

Derivering i praktiken: ett par enkla funktioner

För att kunna derivera funktioner utan att varje gång gå tillbaka till definitionen, så behöver vi veta hur “enkla” funktioners derivator ser ut, samt hur sammansatta funktioners derivator ser ut om man känner till de enkla funktionernas derivator.

Om $f(x) = c$ där c är en konstant, så $f'(x) = 0$.

Bevis. Kom först ihåg att gränsvärden på formen ‘ $\lim_{h \rightarrow 0} \dots$ ’ bara bryr sig om h som kommer godtyckligt nära 0, men aldrig är lika med 0.

Derivering i praktiken: ett par enkla funktioner

För att kunna derivera funktioner utan att varje gång gå tillbaka till definitionen, så behöver vi veta hur “enkla” funktioners derivator ser ut, samt hur sammansatta funktioners derivator ser ut om man känner till de enkla funktionernas derivator.

Om $f(x) = c$ där c är en konstant, så $f'(x) = 0$.

Bevis. Kom först ihåg att gränsvärden på formen ‘ $\lim_{h \rightarrow 0} \dots$ ’ bara bryr sig om h som kommer godtyckligt nära 0, men aldrig är lika med 0. Antagandet $f(x) = c$ ger

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

för alla x och $h \neq 0$. Därför gäller $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$.

Derivering i praktiken: ett par enkla funktioner (forts)

Om $f(x) = x$ **så** $f'(x) = 1$.

Derivering i praktiken: ett par enkla funktioner (forts)

Om $f(x) = x$ **så** $f'(x) = 1$.

Bevis. För alla x och $h \neq 0$ gäller att

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

så $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$.

Här följer tre deriveringsregler. Vi antar att $f(x)$ och $g(x)$ är funktioner som är deriverbara i punkten x .

Här följer tre deriveringsregler. Vi antar att $f(x)$ och $g(x)$ är funktioner som är deriverbara i punkten x .

Notera att $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x))$, $\frac{d}{dx}(f(x)g(x))$, samt $\frac{d}{dx}(cf(x))$ betecknar derivatan av funktionerna $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$, respektive $cf(x)$, där c är en konstant.

Deriveringsregler (forts)

Additionsregel:

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) = f'(x) + g'(x).$$

Deriveringsregler (forts)

Additionsregel:

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) = f'(x) + g'(x).$$

Bevis.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x))}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\&= \frac{d}{dx}f + \frac{d}{dx}g = f'(x) + g'(x).\end{aligned}$$

Multiplikation med konstant:

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = c \frac{d}{dx}f(x) = cf'(x).$$

Multiplikation med konstant:

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = c \frac{d}{dx}f(x) = cf'(x).$$

Bevis.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(cf(x)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= c \frac{d}{dx}f(x) = cf'(x).\end{aligned}$$

Multiplikationsregel:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Multiplikationsregel:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Bevis.

$$\begin{aligned} & \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ = & \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ = & \frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ \rightarrow & f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{då } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Deriveringsregler (forts)

Med hjälp av de två första reglerna (för + och multiplikation med konstant) så får man även

Subtraktionsregel:

$$\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x) = f'(x) - g'(x).$$

Deriveringsregler (forts)

Med hjälp av de två första reglerna (för + och multiplikation med konstant) så får man även

Subtraktionsregel:

$$\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x) = f'(x) - g'(x).$$

Övning 12. Bevisa regeln $\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$ med hjälp av produktregeln samt regeln att om en funktion är konstant så är dess derivata 0 (överallt).

Deriveringsregler (forts)

Med hjälp av de två första reglerna (för + och multiplikation med konstant) så får man även

Subtraktionsregel:

$$\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x) = f'(x) - g'(x).$$

Övning 12. Bevisa regeln $\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$ med hjälp av produktregeln samt regeln att om en funktion är konstant så är dess derivata 0 (överallt).

Exponentregeln: Om $f(x) = x^r$ så $f'(x) = rx^{r-1}$. Man kan också uttrycka detta som $\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$.

Deriveringsregler (forts)

Med hjälp av de två första reglerna (för + och multiplikation med konstant) så får man även

Subtraktionsregel:

$$\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x) = f'(x) - g'(x).$$

Övning 12. Bevisa regeln $\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$ med hjälp av produktregeln samt regeln att om en funktion är konstant så är dess derivata 0 (överallt).

Exponentregeln: Om $f(x) = x^r$ så $f'(x) = rx^{r-1}$. Man kan också uttrycka detta som $\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$.

Lägg märke till att x^r och rx^{r-1} inte nödvändigtvis är definierade för alla x . Om exempelvis $r = 1/2$, så är inte $x^r = \sqrt{x}$ definierad för $x < 0$ och $rx^{r-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ är inte definierad för $x \leq 0$.

Deriveringsregler (forts)

Regeln $\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$, i sin generella form (för alla reella r) bevisas i kapitel 3 i kursboken. Här följer ett bevis för specialfallet då $r = n$ är ett positivt heltal. (Vi har redan bevisat fallet då $r = 1$.)

Deriveringsregler (forts)

Regeln $\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$, i sin generella form (för alla reella r) bevisas i kapitel 3 i kursboken. Här följer ett bevis för specialfallet då $r = n$ är ett positivt heltal. (Vi har redan bevisat fallet då $r = 1$.)
Beviset använder **binomialsatsen**:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n.$$

Deriveringsregler (forts)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^n &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+x)^n - x^n}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0}h^n x^0 + \binom{n}{1}h^{n-1}x^1 + \dots + \binom{n}{n-1}h^1 x^{n-1} + \binom{n}{n}h^0 x^n - x^n}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0}h^n x^0 + \binom{n}{1}h^{n-1}x^1 + \dots + \binom{n}{n-1}h^1 x^{n-1}}{h} \\&\quad (\text{eftersom } \binom{n}{n}h^0 x^n = x^n) \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\binom{n}{0}h^{n-1}x^0 + \binom{n}{1}h^{n-2}x^1 + \dots + \binom{n}{n-2}h^1 x^{n-2} \right. \\&\quad \left. + \binom{n}{n-1}x^{n-1} \right) \\&= \binom{n}{n-1}x^{n-1} = nx^{n-1}.\end{aligned}$$

Geometrisk tolkning av derivatan

Derivatan $f'(a)$ i punkten $x = a$ till en funktion $f(x)$ motsvarar **lutningen för tangentlinjen** till grafen/kurvan $y = f(x)$ i punkten där $x = a$.

Geometrisk tolkning av derivatan

Derivatan $f'(a)$ i punkten $x = a$ till en funktion $f(x)$ motsvarar **lutningen för tangentlinjen** till grafen/kurvan $y = f(x)$ i punkten där $x = a$.

(En linje kallas tangentlinje till $y = f(x)$ i punkten $x = a$ om det finns något intervall (b, c) som innehåller a och som är sådant att linjen har exakt en punkt gemensam med restriktionen av kurvan $y = f(x)$ till intervallet (a, b) .)

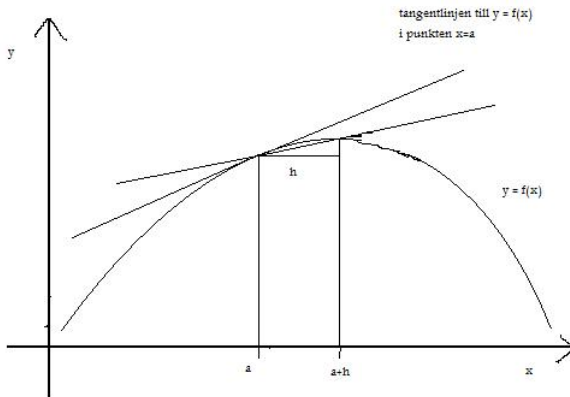
Geometrisk tolkning av derivatan

Derivatan $f'(a)$ i punkten $x = a$ till en funktion $f(x)$ motsvarar **lutningen för tangentlinjen** till grafen/kurvan $y = f(x)$ i punkten där $x = a$.

(En linje kallas tangentlinje till $y = f(x)$ i punkten $x = a$ om det finns något intervall (b, c) som innehåller a och som är sådant att linjen har exakt en punkt gemensam med restriktionen av kurvan $y = f(x)$ till intervallet (a, b) .)

Se illustration på nästa sida.

Geometrisk tolkning av derivatan (forts)



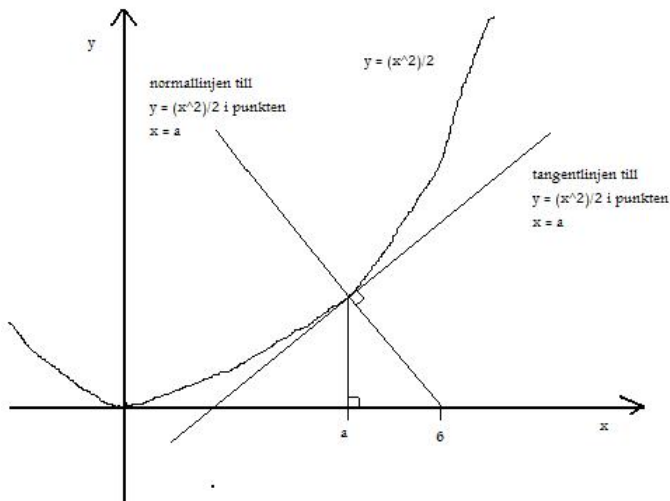
Kom ihåg att $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ och lägg märke till att $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ går mot tangentlinjens lutning i $x = a$ då h går mot 0.

Geometrisk tolkning av derivatan: ett exempel

Problem: Bestäm (det närmaste) avståndet från punkten $(x, y) = (6, 0)$ till kurvan $y = \frac{x^2}{2}$.

Geometrisk tolkning av derivatan: ett exempel

Problem: Bestäm (det närmaste) avståndet från punkten $(x, y) = (6, 0)$ till kurvan $y = \frac{x^2}{2}$.



Geometrisk tolkning av derivatan: ett exempel (forts)

Lägg märke till att punkterna $(a, 0)$, $(a, \frac{a^2}{2})$ och $(6, 0)$ (i figuren på föregående sida) bildar en rätvinklig triangel, och att hypotenusan (triangelns längsta sida) motsvarar det närmaste avståndet till kurvan $y = \frac{x^2}{2}$ från punkten $(6, 0)$.

Geometrisk tolkning av derivatan: ett exempel (forts)

Lägg märke till att punkterna $(a, 0)$, $(a, \frac{a^2}{2})$ och $(6, 0)$ (i figuren på föregående sida) bildar en rätvinklig triangel, och att hypotenusan (triangelns längsta sida) motsvarar det närmaste avståndet till kurvan $y = \frac{x^2}{2}$ från punkten $(6, 0)$.

Så om vi kan bestämma vad a är, så kan vi med pytagoras sats räkna ut det närmaste avståndet från $(6, 0)$ till kurvan $y = \frac{x^2}{2}$.

Geometrisk tolkning av derivatan: ett exempel (forts)

Lägg märke till att punkterna $(a, 0)$, $(a, \frac{a^2}{2})$ och $(6, 0)$ (i figuren på föregående sida) bildar en rätvinklig triangel, och att hypotenusan (triangelns längsta sida) motsvarar det närmaste avståndet till kurvan $y = \frac{x^2}{2}$ från punkten $(6, 0)$.

Så om vi kan bestämma vad a är, så kan vi med pytagoras sats räkna ut det närmaste avståndet från $(6, 0)$ till kurvan $y = \frac{x^2}{2}$.

Om $f(x) = \frac{x^2}{2}$ så $f'(x) = x$. Så tangentlinjens lutning i punkten $x = a$ är $f'(a) = a$.

Geometrisk tolkning av derivatan: ett exempel (forts)

Lägg märke till att punkterna $(a, 0)$, $(a, \frac{a^2}{2})$ och $(6, 0)$ (i figuren på föregående sida) bildar en rätvinklig triangel, och att hypotenusan (triangelns längsta sida) motsvarar det närmaste avståndet till kurvan $y = \frac{x^2}{2}$ från punkten $(6, 0)$.

Så om vi kan bestämma vad a är, så kan vi med pytagoras sats räkna ut det närmaste avståndet från $(6, 0)$ till kurvan $y = \frac{x^2}{2}$.

Om $f(x) = \frac{x^2}{2}$ så $f'(x) = x$. Så tangentlinjens lutning i punkten $x = a$ är $f'(a) = a$.

Då är normallinjens lutning $-\frac{1}{a}$ (Se Kapitel P.2 om du har glömt detta.), och **normallinjens ekvation** kan i detta fall skrivas som

$$y = -\frac{1}{a}x + m, \quad \text{för någon konstant } m.$$

Geometrisk tolkning av derivatan: ett exempel (forts)

Följande två villkor måste vara uppfyllda (om $y = -\frac{1}{a}x + m$ är normallinjen till kurvan $y = \frac{x^2}{2}$ i punkten $x = a$):

- 1 Linjen $y = -\frac{1}{a}x + m$ skall gå igenom punkten $(6, 0)$.
- 2 Linjen $y = -\frac{1}{a}x + m$ skall skära kurvan $y = \frac{x^2}{2}$ i punkten $x = a$.

Geometrisk tolkning av derivatan: ett exempel (forts)

Följande två villkor måste vara uppfyllda (om $y = -\frac{1}{a}x + m$ är normallinjen till kurvan $y = \frac{x^2}{2}$ i punkten $x = a$):

- 1 Linjen $y = -\frac{1}{a}x + m$ skall gå igenom punkten $(6, 0)$.
- 2 Linjen $y = -\frac{1}{a}x + m$ skall skära kurvan $y = \frac{x^2}{2}$ i punkten $x = a$.

Detta ger ekvationerna

$$0 = -\frac{6}{a} + m \quad \text{och} \quad \frac{a^2}{2} = -\frac{1}{a}a + m,$$

Geometrisk tolkning av derivatan: ett exempel (forts)

Följande två villkor måste vara uppfyllda (om $y = -\frac{1}{a}x + m$ är normallinjen till kurvan $y = \frac{x^2}{2}$ i punkten $x = a$):

- 1 Linjen $y = -\frac{1}{a}x + m$ skall gå igenom punkten $(6, 0)$.
- 2 Linjen $y = -\frac{1}{a}x + m$ skall skära kurvan $y = \frac{x^2}{2}$ i punkten $x = a$.

Detta ger ekvationerna

$$0 = -\frac{6}{a} + m \quad \text{och} \quad \frac{a^2}{2} = -\frac{1}{a}a + m,$$

vilket ger

$$m = \frac{6}{a} \quad \text{och genom insättning i den andra ekv.} \quad \frac{a^2}{2} = -1 + \frac{6}{a}.$$

Geometrisk tolkning av derivatan: ett exempel (forts)

Den senare ekvationen kan skrivas om till

$$a^3 + 2a - 12 = 0$$

vilket är en 3e gradsekvation och i allmänhet inte så lätt att lösa.

Geometrisk tolkning av derivatan: ett exempel (forts)

Den senare ekvationen kan skrivas om till

$$a^3 + 2a - 12 = 0$$

vilket är en 3e gradsekvation och i allmänhet inte så lätt att lösa. Men i detta fall kan man se att $a = 2$ är en lösning, och pga formen på (parabel)kurvan $y = \frac{x^2}{2}$ så inser man att det bara kan finnas ett 'a' som uppfyller våra krav; och därmed är $a = 2$ den lösning vi söker.

Geometrisk tolkning av derivatan: ett exempel (forts)

Den senare ekvationen kan skrivas om till

$$a^3 + 2a - 12 = 0$$

vilket är en 3e gradsekvation och i allmänhet inte så lätt att lösa. Men i detta fall kan man se att $a = 2$ är en lösning, och pga formen på (parabel)kurvan $y = \frac{x^2}{2}$ så inser man att det bara kan finnas ett 'a' som uppfyller våra krav; och därmed är $a = 2$ den lösning vi söker.

(Strängt taget så kan man göra en polynomdivision av $a^3 + 2a - 12$ med $a - 2$ och får då kvoten $a^2 + 2a + 6$. Eftersom ekvationen $a^2 + 2a + 6 = 0$ endast har icke-reella (komplexa) rötter, så är $a = 2$ den enda reella lösningen till $a^3 + 2a - 12 = 0$.)

Geometrisk tolkning av derivatan: ett exempel (forts)

Kom ihåg figuren av situationen. Vi vet nu att $a = 2$. Så de korta sidorna i den rätvinkliga triangeln är $6 - 2 = 4$ och $2^2/2 = 2$.

Geometrisk tolkning av derivatan: ett exempel (forts)

Kom ihåg figuren av situationen. Vi vet nu att $a = 2$. Så de korta sidorna i den rätvinkliga triangeln är $6 - 2 = 4$ och $2^2/2 = 2$.

Med hjälp av pytagoras sats så följer att den långa sidan (hypotenusan) har längden

$$\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Geometrisk tolkning av derivatan: ett exempel (forts)

Kom ihåg figuren av situationen. Vi vet nu att $a = 2$. Så de korta sidorna i den rätvinkliga triangeln är $6 - 2 = 4$ och $2^2/2 = 2$.

Med hjälp av pytagoras sats så följer att den långa sidan (hypotenusan) har längden

$$\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Sålunda är $2\sqrt{5}$ (det kortaste) avståndet från punkten $(6, 0)$ till kurvan $y = \frac{x^2}{2}$.

Geometrisk tolkning av derivatan: ett exempel (forts)

Kom ihåg figuren av situationen. Vi vet nu att $a = 2$. Så de korta sidorna i den rätvinkliga triangeln är $6 - 2 = 4$ och $2^2/2 = 2$.

Med hjälp av pytagoras sats så följer att den långa sidan (hypotenusan) har längden

$$\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Sålunda är $2\sqrt{5}$ (det kortaste) avståndet från punkten $(6, 0)$ till kurvan $y = \frac{x^2}{2}$.

Obs! Metoden som användes är allmän såtillvida att man, även för mer komplicerade kurvor än $y = \frac{x^2}{2}$ och andra punkter än $(6, 0)$, kan få fram en ekvation som bara innehåller en obekant 'a'. Dock kan denna ekvation vara svår att lösa. I verkliga tillämpningar av analys får man ofta ta till s.k. *numeriska metoder* (*beräkningsmatematik*) för att uppskatta lösningar till ekvationer. Ett exempel på en sådan metod är den s.k. Newton-Raphson metoden.

Deriverbarhet och kontinuitet

Om $f(x)$ är deriverbar i $x = a$ så är $f(x)$ kontinuerlig i den punkten.

Deriverbarhet och kontinuitet

Om $f(x)$ är deriverbar i $x = a$ så är $f(x)$ kontinuerlig i den punkten.

Bevis. Om $f(x)$ är deriverbar i $x = a$ så existerar följande gränsvärde som ett reellt tal:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Deriverbarhet och kontinuitet

Om $f(x)$ är deriverbar i $x = a$ så är $f(x)$ kontinuerlig i den punkten.

Bevis. Om $f(x)$ är deriverbar i $x = a$ så existerar följande gränsvärde som ett reellt tal:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Eftersom $h \rightarrow 0$ i gränsvärdet ovan, så måste $f(a+h) - f(a)$ gå mot 0 då $h \rightarrow 0$.

Deriverbarhet och kontinuitet

Om $f(x)$ är deriverbar i $x = a$ så är $f(x)$ kontinuerlig i den punkten.

Bevis. Om $f(x)$ är deriverbar i $x = a$ så existerar följande gränsvärde som ett reellt tal:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Eftersom $h \rightarrow 0$ i gränsvärdet ovan, så måste i så fall $f(a+h) - f(a)$ gå mot 0 då $h \rightarrow 0$. Eftersom vi kan låta $x = a + h$ så innebär detta att $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$, vilket i sin tur medför att $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$; dvs. $f(x)$ är kontinuerlig i $x = a$.

Deriverbarhet och kontinuitet

Om $f(x)$ är deriverbar i $x = a$ så är $f(x)$ kontinuerlig i den punkten.

Bevis. Om $f(x)$ är deriverbar i $x = a$ så existerar följande gränsvärde som ett reellt tal:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Eftersom $h \rightarrow 0$ i gränsvärdet ovan, så måste i så fall $f(a+h) - f(a)$ gå mot 0 då $h \rightarrow 0$. Eftersom vi kan låta $x = a + h$ så innebär detta att $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$, vilket i sin tur medför att $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$; dvs. $f(x)$ är kontinuerlig i $x = a$.

Men en funktion kan vara kontinuerlig i en punkt $x = a$ utan att vara deriverbar i den punkten.

Deriverbarhet och kontinuitet

Om $f(x)$ är deriverbar i $x = a$ så är $f(x)$ kontinuerlig i den punkten.

Bevis. Om $f(x)$ är deriverbar i $x = a$ så existerar följande gränsvärde som ett reellt tal:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Eftersom $h \rightarrow 0$ i gränsvärdet ovan, så måste i så fall $f(a+h) - f(a)$ gå mot 0 då $h \rightarrow 0$. Eftersom vi kan låta $x = a + h$ så innebär detta att $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$, vilket i sin tur medför att $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$; dvs. $f(x)$ är kontinuerlig i $x = a$.

Men en funktion kan vara kontinuerlig i en punkt $x = a$ utan att vara deriverbar i den punkten.

Exempel. $f(x) = x^{1/3}$ är definierad och kontinuerlig för alla reella x , men $f'(x) = \frac{1}{3}x^{1/3-1} = \frac{1}{3x^{2/3}}$ är *inte* definierad, och därmed inte kontinuerlig, i $x = 0$.

Sammansättning av funktioner

Funktioner kan sammansättas (“seriekopplas”).

Om $f(x)$, $g(x)$ och $h(x)$ är funktioner kan vi bilda exempelvis

$$g(f(x)), h(g(f(x))), h(f(f(f(x)))).$$

Sammansättning av funktioner

Funktioner kan sammansättas (“seriekopplas”).

Om $f(x)$, $g(x)$ och $h(x)$ är funktioner kan vi bilda exempelvis

$$g(f(x)), h(g(f(x))), h(f(f(f(x)))).$$

Exempel Om $f(x) = 3x^2 + 1$ och $g(x) = x^4$ så
 $g(f(x)) = (3x^2 + 1)^4$.

Sammansättning av funktioner

Funktioner kan sammansättas (“seriekopplas”).

Om $f(x)$, $g(x)$ och $h(x)$ är funktioner kan vi bilda exempelvis

$$g(f(x)), h(g(f(x))), h(f(f(f(x))))).$$

Exempel Om $f(x) = 3x^2 + 1$ och $g(x) = x^4$ så

$$g(f(x)) = (3x^2 + 1)^4.$$

Det kanske hjälper att se hur en sammansättning är uppbyggd genom att använda olika variabler ($x, y, z, \dots$) för olika funktioner.

Om $g(y) = y^4$ och $f(x) = 3x^2 + 1$ så ser man att substitutionen $y = 3x^2 + 1$ i y^4 ger $g(f(x)) = (3x^2 + 1)^4$.

Sammansättning av funktioner

Funktioner kan sammansättas (“seriekopplas”).

Om $f(x)$, $g(x)$ och $h(x)$ är funktioner kan vi bilda exempelvis

$$g(f(x)), h(g(f(x))), h(f(f(f(x))))).$$

Exempel Om $f(x) = 3x^2 + 1$ och $g(x) = x^4$ så

$$g(f(x)) = (3x^2 + 1)^4.$$

Det kanske hjälper att se hur en sammansättning är uppbyggd genom att använda olika variabler ($x, y, z, \dots$) för olika funktioner.

Om $g(y) = y^4$ och $f(x) = 3x^2 + 1$ så ser man att substitutionen $y = 3x^2 + 1$ i y^4 ger $g(f(x)) = (3x^2 + 1)^4$.

Övning 13. Skriv var och en av funktionerna

$$\sqrt{3x - \sqrt{x}} \quad \text{och} \quad \sqrt{3x - \sqrt{x^2 + \sqrt{x}}}$$

som en sammansättning av minst två funktioner.

Kedjeregeln

För att kunna derivera sammansatta funktioner smidigt behöver vi:

Kedjeregeln. Om $h(x) = g(f(x))$ så $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

Kedjeregeln

För att kunna derivera sammansatta funktioner smidigt behöver vi:

Kedjeregeln. Om $h(x) = g(f(x))$ så $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

Exempel. Låt $h(x) = (3x^2 + 1)^4$. Om $f(x) = 3x^2 + 1$ och $g(x) = x^4$, så $g'(x) = 4x^3$, $f'(x) = 6x$ och

$$\begin{aligned}h'(x) &= g'(f(x))f'(x) = 4(f(x))^3 f'(x) = 4(3x^2 + 1)^3 \cdot 6x \\ &= 24x(3x^2 + 1)^3.\end{aligned}$$

Kedjeregeln

För att kunna derivera sammansatta funktioner smidigt behöver vi:

Kedjeregeln. Om $h(x) = g(f(x))$ så $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

Exempel. Låt $h(x) = (3x^2 + 1)^4$. Om $f(x) = 3x^2 + 1$ och $g(x) = x^4$, så $g'(x) = 4x^3$, $f'(x) = 6x$ och

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x))f'(x) = 4(f(x))^3 f'(x) = 4(3x^2 + 1)^3 \cdot 6x \\ &= 24x(3x^2 + 1)^3. \end{aligned}$$

Exempel. Här använder jag notationen $\frac{d}{dx}$.

$$\frac{d}{dx} \sqrt{3x - \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{3x - \sqrt{x}}} \left(3 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right).$$

Kedjeregeln

För att kunna derivera sammansatta funktioner smidigt behöver vi:

Kedjeregeln. Om $h(x) = g(f(x))$ så $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

Exempel. Låt $h(x) = (3x^2 + 1)^4$. Om $f(x) = 3x^2 + 1$ och $g(x) = x^4$, så $g'(x) = 4x^3$, $f'(x) = 6x$ och

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x))f'(x) = 4(f(x))^3 f'(x) = 4(3x^2 + 1)^3 \cdot 6x \\ &= 24x(3x^2 + 1)^3. \end{aligned}$$

Exempel. Här använder jag notationen $\frac{d}{dx}$.

$$\frac{d}{dx} \sqrt{3x - \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{3x - \sqrt{x}}} \left(3 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right).$$

Övning 14. Derivera

(a) $(2x^4 + 7)^{-10}$ (b) $(x(x^2 - x))^{117}$. (c) $(x^3 - 5x)^{2/3}$.

En konsekvens av kedjeregeln

Ett bevis av kedjeregeln finns i kursbokens kapitel 2.4. Med hjälp av kedjeregeln kan man bevisa följande:

En konsekvens av kedjeregeln

Ett bevis av kedjeregeln finns i kursbokens kapitel 2.4. Med hjälp av kedjeregeln kan man bevisa följande:

$$\text{Om } h(x) = \frac{1}{f(x)} \text{ så } h'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}.$$

En konsekvens av kedjeregeln

Ett bevis av kedjeregeln finns i kursbokens kapitel 2.4. Med hjälp av kedjeregeln kan man bevisa följande:

Om $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ så $h'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$.

Bevis. Om $g(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ så $h(x) = g(f(x))$. Eftersom $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ så ger kedjeregeln följande:

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = -\frac{1}{(f(x))^2}f'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}.$$

Kvotregeln

Med hjälp av regeln från föregående sida och produktregeln så kan man härleda:

Kvotregeln

Med hjälp av regeln från föregående sida och produktregeln så kan man härleda:

Kvotregeln Om $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ så

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Kvotregeln

Med hjälp av regeln från föregående sida och produktregeln så kan man härleda:

Kvotregeln Om $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ så

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Bevis. Eftersom

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \frac{1}{g(x)} \quad \text{så får man}$$

$$h'(x) = f'(x) \frac{1}{g(x)} + \left(f(x) \left(-\frac{g'(x)}{(g(x))^2} \right) \right)$$

(med produktregeln och regeln från föregående sida)

$$= \frac{f'(x)g(x)}{(g(x))^2} - \frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Derivatan av $\sin x$ och $\cos x$

I kursbokens Kapitel 2.5 bevisas att

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \text{och} \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x.$$

Derivatan av $\sin x$ och $\cos x$

I kursbokens Kapitel 2.5 bevisas att

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \text{och} \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x.$$

Övning 15. Vad är derivatan av $\tan x$? Använd kunskaperna från föregående sidor.

Derivatan av $\sin x$ och $\cos x$

I kursbokens Kapitel 2.5 bevisas att

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \text{och} \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x.$$

Övning 15. Vad är derivatan av $\tan x$? Använd kunskaperna från föregående sidor.

Övning 16. Vad är derivatan av $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$?