

Envariabelanalys: Föreläsning 7

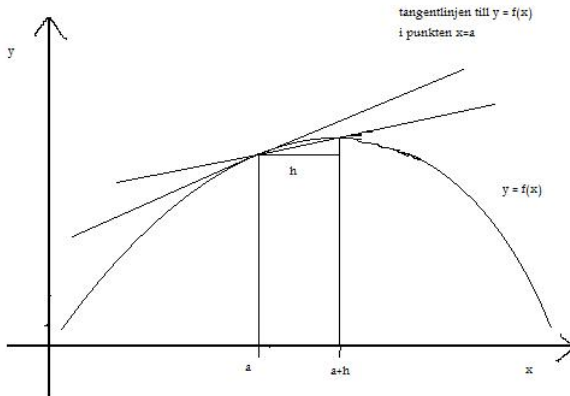
Vera Koponen

Uppsala Universitet

Envariabelanalys, vt 2011

Derivator och ökande/minskande funktioner

Kom ihåg att derivatan $f'(a)$ i punkten $x = a$ är lika med tangentlinjens lutning för kurvan $y = f(x)$ i punkten där $x = a$.



$\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \right)$ går mot tangentlinjens lutning i $x = a$ då $h \rightarrow 0$.

Derivator och ökande/minskande funktioner

Visuellt så är det förmodligen klart att

Derivator och ökande/minskande funktioner

Visuellt så är det förmodligen klart att

- 1 om f är ökande/växande kring punkten $x = a$ så är tangentlinjens lutning positiv i den punkten,

Derivator och ökande/minskande funktioner

Visuellt så är det förmodligen klart att

- 1 om f är ökande/växande kring punkten $x = a$ så är tangentlinjens lutning positiv i den punkten,
- 2 om f är minskande/avtagande kring punkten $x = a$ så är tangentlinjens lutning negativ i den punkten, och

Derivator och ökande/minskande funktioner

Visuellt så är det förmodligen klart att

- 1 om f är ökande/växande kring punkten $x = a$ så är tangentlinjens lutning positiv i den punkten,
- 2 om f är minskande/avtagande kring punkten $x = a$ så är tangentlinjens lutning negativ i den punkten, och
- 3 om derivatan f' är kontinuerlig och f först är växande (avtagande) för att sedan bli avtagande (växande) så måste tangentlinjen ha varit horisontell (haft lutning noll) i någon punkt.

Övning 17. Ge exempel på några olika fall där $f'(a) = 0$. (helst fyra kvalitativt olika fall)

Derivator och ökande/minskande funktioner

Jag har utgått från att uttrycken 'ökande/minskande funktion' är begripliga på ett intuitivt plan, men här följer en precisering av vad som menas:

Derivator och ökande/minskande funktioner

Jag har utgått från att uttrycken 'ökande/minskande funktion' är begripliga på ett intuitivt plan, men här följer en precisering av vad som menas:

- 1 f är **ökande/växande** på ett intervall I om $x, y \in I$ och $x < y$ medför att $f(x) < f(y)$.

Derivator och ökande/minskande funktioner

Jag har utgått från att uttrycken 'ökande/minskande funktion' är begripliga på ett intuitivt plan, men här följer en precisering av vad som menas:

- 1 f är **ökande/växande** på ett intervall I om $x, y \in I$ och $x < y$ medför att $f(x) < f(y)$.
- 2 f är **avtagande/minskande** på ett intervall I om $x, y \in I$ och $x < y$ medför att $f(x) > f(y)$.

Derivator och ökande/minskande funktioner

Jag har utgått från att uttrycken 'ökande/minskande funktion' är begripliga på ett intuitivt plan, men här följer en precisering av vad som menas:

- 1 f är **ökande/växande** på ett intervall I om $x, y \in I$ och $x < y$ medför att $f(x) < f(y)$.
- 2 f är **avtagande/minskande** på ett intervall I om $x, y \in I$ och $x < y$ medför att $f(x) > f(y)$.
- 3 f är **icke-avtagande/minskande** på ett intervall I om $x, y \in I$ och $x < y$ medför att $f(x) \leq f(y)$.

Derivator och ökande/minskande funktioner

Jag har utgått från att uttrycken 'ökande/minskande funktion' är begripliga på ett intuitivt plan, men här följer en precisering av vad som menas:

- 1 f är **ökande/växande** på ett intervall I om $x, y \in I$ och $x < y$ medför att $f(x) < f(y)$.
- 2 f är **avtagande/minskande** på ett intervall I om $x, y \in I$ och $x < y$ medför att $f(x) > f(y)$.
- 3 f är **icke-avtagande/minskande** på ett intervall I om $x, y \in I$ och $x < y$ medför att $f(x) \leq f(y)$.
- 4 f är **icke-ökande/växande** på ett intervall I om $x, y \in I$ och $x < y$ medför att $f(x) \geq f(y)$.

Derivator och ökande/minskande funktioner

Lösningar till övning 17. Vi antar hela tiden att funktionen f är deriverbar i ett öppet intervall som innehåller punkten där derivatan f' är noll.

Derivator och ökande/minskande funktioner

Lösningar till övning 17. Vi antar hela tiden att funktionen f är deriverbar i ett öppet intervall som innehåller punkten där derivatan f' är noll.

Om f är växande på (a, b) och avtagande på (b, c) (där $a < b < c$) så $f'(b) = 0$. Lägg märke till att detta innebär att $f(b)$ är det största värdet som f antar på intervallet (a, c) .

Derivator och ökande/minskande funktioner

Lösningar till övning 17. Vi antar hela tiden att funktionen f är deriverbar i ett öppet intervall som innehåller punkten där derivatan f' är noll.

Om f är växande på (a, b) och avtagande på (b, c) (där $a < b < c$) så $f'(b) = 0$. Lägg märke till att detta innebär att $f(b)$ är det största värdet som f antar på intervallet (a, c) . Exempel på detta ges av $f(x) = -x^2$, där f är växande på $(-\infty, 0)$ och avtagande på $(0, \infty)$.

Derivator och ökande/minskande funktioner

Lösningar till övning 17. Vi antar hela tiden att funktionen f är deriverbar i ett öppet intervall som innehåller punkten där derivatan f' är noll.

Om f är växande på (a, b) och avtagande på (b, c) (där $a < b < c$) så $f'(b) = 0$. Lägg märke till att detta innebär att $f(b)$ är det största värdet som f antar på intervallet (a, c) . Exempel på detta ges av $f(x) = -x^2$, där f är växande på $(-\infty, 0)$ och avtagande på $(0, \infty)$.

Om f är avtagande på (a, b) och växande på (b, c) så $f'(b) = 0$. Exempel på detta ges av $f(x) = x^2$ och $b = 0$.

Lösningar till övning 17 (forts).

Om f är växande på (a, b) men tangentens lutning avtar när $x \rightarrow b-$, för att bli horisontell i punkten $x = b$, men sedan åter ökar när $x > b$, så $f'(b) = 0$.

Lösningar till övning 17 (forts).

Om f är växande på (a, b) men tangentens lutning avtar när $x \rightarrow b-$, för att bli horisontell i punkten $x = b$, men sedan åter ökar när $x > b$, så $f'(b) = 0$. Exempel på detta ges av $f(x) = x^3$ där f är växande på hela tallinjen och $f'(0) = 0$.

Lösningar till övning 17 (forts).

Om f är växande på (a, b) men tangentens lutning avtar när $x \rightarrow b-$, för att bli horisontell i punkten $x = b$, men sedan åter ökar när $x > b$, så $f'(b) = 0$. Exempel på detta ges av $f(x) = x^3$ där f är växande på hela tallinjen och $f'(0) = 0$. Man kan också byta 'växande' mot 'avtagande' i det sista exemplet. (Tänk på $f(x) = -x^3$.)

Lösningar till övning 17 (forts).

Om f är växande på (a, b) men tangentens lutning avtar när $x \rightarrow b-$, för att bli horisontell i punkten $x = b$, men sedan åter ökar när $x > b$, så $f'(b) = 0$. Exempel på detta ges av $f(x) = x^3$ där f är växande på hela tallinjen och $f'(0) = 0$. Man kan också byta 'växande' mot 'avtagande' i det sista exemplet. (Tänk på $f(x) = -x^3$.)

Ytterligare en möjlighet är att $a < b < c$ och att f är konstant på intervallet (a, c) . Då gäller att $f'(b) = 0$.

Derivator och ökande/minskande funktioner

Vi kan nu vända på våra resonemang. Antag att f är kontinuerlig på intervallet I och deriverbar i alla inre punkter till I . (En punkt som inte är en ändpunkt till I kallas för inre punkt till I .)

Derivator och ökande/minskande funktioner

Vi kan nu vända på våra resonemang. Antag att f är kontinuerlig på intervallet I och deriverbar i alla inre punkter till I . (En punkt som inte är en ändpunkt till I kallas för inre punkt till I .)

Sats.

Derivator och ökande/minskande funktioner

Vi kan nu vända på våra resonemang. Antag att f är kontinuerlig på intervallet I och deriverbar i alla inre punkter till I . (En punkt som inte är en ändpunkt till I kallas för inre punkt till I .)

Sats.

- 1 Om $f'(x) > 0$ för alla inre punkter $x \in I$, så är f ökande på I .

Derivator och ökande/minskande funktioner

Vi kan nu vända på våra resonemang. Antag att f är kontinuerlig på intervallet I och deriverbar i alla inre punkter till I . (En punkt som inte är en ändpunkt till I kallas för inre punkt till I .)

Sats.

- 1 Om $f'(x) > 0$ för alla inre punkter $x \in I$, så är f ökande på I .
- 2 Om $f'(x) < 0$ för alla inre punkter $x \in I$, så är f minskande på I .

Derivator och ökande/minskande funktioner

Vi kan nu vända på våra resonemang. Antag att f är kontinuerlig på intervallet I och deriverbar i alla inre punkter till I . (En punkt som inte är en ändpunkt till I kallas för inre punkt till I .)

Sats.

- 1 Om $f'(x) > 0$ för alla inre punkter $x \in I$, så är f ökande på I .
- 2 Om $f'(x) < 0$ för alla inre punkter $x \in I$, så är f minskande på I .
- 3 Om $f'(x) \geq 0$ för alla inre punkter $x \in I$, så är f icke-minskande på I .

Derivator och ökande/minskande funktioner

Vi kan nu vända på våra resonemang. Antag att f är kontinuerlig på intervallet I och deriverbar i alla inre punkter till I . (En punkt som inte är en ändpunkt till I kallas för inre punkt till I .)

Sats.

- 1 Om $f'(x) > 0$ för alla inre punkter $x \in I$, så är f ökande på I .
- 2 Om $f'(x) < 0$ för alla inre punkter $x \in I$, så är f minskande på I .
- 3 Om $f'(x) \geq 0$ för alla inre punkter $x \in I$, så är f icke-minskande på I .
- 4 Om $f'(x) \leq 0$ för alla inre punkter $x \in I$, så är f icke-ökande på I .

Derivator och ökande/minskande funktioner

Vi kan nu vända på våra resonemang. Antag att f är kontinuerlig på intervallet I och deriverbar i alla inre punkter till I . (En punkt som inte är en ändpunkt till I kallas för inre punkt till I .)

Sats.

- 1 Om $f'(x) > 0$ för alla inre punkter $x \in I$, så är f ökande på I .
- 2 Om $f'(x) < 0$ för alla inre punkter $x \in I$, så är f minskande på I .
- 3 Om $f'(x) \geq 0$ för alla inre punkter $x \in I$, så är f icke-minskande på I .
- 4 Om $f'(x) \leq 0$ för alla inre punkter $x \in I$, så är f icke-ökande på I .

Ovanstående sats kan förstås om man (återigen) tänker på att $f'(x)$ är lutningen för tangentlinjen i punkten x . Man kan ge ett precist bevis av den med hjälp av medelvärdessatsen som följer nedan.

Derivator och max/min-värden

Antag att f är deriverbar på intervallet I .

Derivator och max/min-värden

Antag att f är deriverbar på intervallet I .

Sats. Om $a \in I$ är en inre punkt och $f(a)$ är det största/minsta värde som f antar på intervallet I , så $f'(a) = 0$.

Derivator och max/min-värden

Antag att f är deriverbar på intervallet I .

Sats. Om $a \in I$ är en inre punkt och $f(a)$ är det största/minsta värde som f antar på intervallet I , så $f'(a) = 0$.

Bevis. Vi tittar bara på fallet då $f(a)$ är det *största värdet* som f antar på I . (Det andra fallet behandlas på liknande sätt.)

Derivator och max/min-värden

Antag att f är deriverbar på intervallet I .

Sats. Om $a \in I$ är en inre punkt och $f(a)$ är det största/minsta värde som f antar på intervallet I , så $f'(a) = 0$.

Bevis. Vi tittar bara på fallet då $f(a)$ är det *största värdet* som f antar på I . (Det andra fallet behandlas på liknande sätt.) Då gäller $f(a+h) - f(a) < 0$ för alla $h \neq 0$ så att $a+h \in I$, och man får

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} < 0 \quad \text{om } h > 0$$

och

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0 \quad \text{om } h < 0.$$

Derivator och max/min-värden

Antag att f är deriverbar på intervallet I .

Sats. Om $a \in I$ är en inre punkt och $f(a)$ är det största/minsta värde som f antar på intervallet I , så $f'(a) = 0$.

Bevis. Vi tittar bara på fallet då $f(a)$ är det *största värdet* som f antar på I . (Det andra fallet behandlas på liknande sätt.) Då gäller $f(a+h) - f(a) < 0$ för alla $h \neq 0$ så att $a+h \in I$, och man får

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} < 0 \quad \text{om } h > 0$$

och

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0 \quad \text{om } h < 0.$$

Eftersom f antas vara deriverbar i $x = a$ så existerar $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ som ett reellt tal, och då finns ingen annan möjlighet än att $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 0$.

Derivator och max/min-värden

Antag att f är deriverbar på intervallet I .

Sats. Om $a \in I$ är en inre punkt och $f(a)$ är det största/minsta värde som f antar på intervallet I , så $f'(a) = 0$.

Bevis. Vi tittar bara på fallet då $f(a)$ är det *största värdet* som f antar på I . (Det andra fallet behandlas på liknande sätt.) Då gäller $f(a+h) - f(a) < 0$ för alla $h \neq 0$ så att $a+h \in I$, och man får

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} < 0 \quad \text{om } h > 0$$

och

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0 \quad \text{om } h < 0.$$

Eftersom f antas vara deriverbar i $x = a$ så existerar $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ som ett reellt tal, och då finns ingen annan möjlighet än att $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 0$.

En punkt a sådant att $f'(a) = 0$ kallas för en **kritisk punkt** till f .

Övning 18. Skissa kurvan $y = \frac{x-2}{x^2}$ i stora drag. Det skall framgå var kurvan skär x - eller y -axeln, om (och var i så fall) kurvans y -värde antar eventuella lokala maximal- eller minimivärden, hur kurvan beter sig då $x \rightarrow \pm\infty$, och hur kurvan beter sig i närheten av eventuella punkter där $\frac{x-2}{x^2}$ inte är definierad.

Övning 18. Skissa kurvan $y = \frac{x-2}{x^2}$ i stora drag. Det skall framgå var kurvan skär x - eller y -axeln, om (och var i så fall) kurvans y -värde antar eventuella lokala maximal- eller minimivärden, hur kurvan beter sig då $x \rightarrow \pm\infty$, och hur kurvan beter sig i närheten av eventuella punkter där $\frac{x-2}{x^2}$ inte är definierad.

Lösning. Låt $y = f(x) = \frac{x-2}{x^2}$. Vi ser direkt att $f(x)$ är odefinierad i $x = 0$, $f(2) = 0$, $f(x) > 0$ om $x > 2$, och $f(x) < 0$ om $x < 2$.

Övning 18. Skissa kurvan $y = \frac{x-2}{x^2}$ i stora drag. Det skall framgå var kurvan skär x - eller y -axeln, om (och var i så fall) kurvans y -värde antar eventuella lokala maximal- eller minimivärden, hur kurvan beter sig då $x \rightarrow \pm\infty$, och hur kurvan beter sig i närheten av eventuella punkter där $\frac{x-2}{x^2}$ inte är definierad.

Lösning. Låt $y = f(x) = \frac{x-2}{x^2}$. Vi ser direkt att $f(x)$ är odefinierad i $x = 0$, $f(2) = 0$, $f(x) > 0$ om $x > 2$, och $f(x) < 0$ om $x < 2$. Derivering och förenklingar ger $f'(x) = \frac{4-x}{x^3}$, så $f'(x) = 0 \iff x = 4$.

Övning 18. Skissa kurvan $y = \frac{x-2}{x^2}$ i stora drag. Det skall framgå var kurvan skär x - eller y -axeln, om (och var i så fall) kurvans y -värde antar eventuella lokala maximal- eller minimivärden, hur kurvan beter sig då $x \rightarrow \pm\infty$, och hur kurvan beter sig i närheten av eventuella punkter där $\frac{x-2}{x^2}$ inte är definierad.

Lösning. Låt $y = f(x) = \frac{x-2}{x^2}$. Vi ser direkt att $f(x)$ är odefinierad i $x = 0$, $f(2) = 0$, $f(x) > 0$ om $x > 2$, och $f(x) < 0$ om $x < 2$. Derivering och förenklingar ger $f'(x) = \frac{4-x}{x^3}$, så $f'(x) = 0 \iff x = 4$. Derivatn är positiv då $0 < x < 4$ och negativ då $x < 0$ och då $x > 4$, så f är växande då $0 < x < 4$ och avtagande då $x < 0$ och då $x > 4$.

Övning 18. Skissa kurvan $y = \frac{x-2}{x^2}$ i stora drag. Det skall framgå var kurvan skär x - eller y -axeln, om (och var i så fall) kurvans y -värde antar eventuella lokala maximal- eller minimivärden, hur kurvan beter sig då $x \rightarrow \pm\infty$, och hur kurvan beter sig i närheten av eventuella punkter där $\frac{x-2}{x^2}$ inte är definierad.

Lösning. Låt $y = f(x) = \frac{x-2}{x^2}$. Vi ser direkt att $f(x)$ är odefinierad i $x = 0$, $f(2) = 0$, $f(x) > 0$ om $x > 2$, och $f(x) < 0$ om $x < 2$. Derivering och förenklingar ger $f'(x) = \frac{4-x}{x^3}$, så $f'(x) = 0 \iff x = 4$. Derivatans tecken är positiv då $0 < x < 4$ och negativ då $x < 0$ och då $x > 4$, så f är växande då $0 < x < 4$ och avtagande då $x < 0$ och då $x > 4$. Alltså är $x = 4$ en lokal maximalpunkt för f (till och med en total maximalpunkt).

Övning/exempel (forts)

Eftersom $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x^2} = 0$ och $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^2} = -\infty$, så kommer kurvan $y = f(x)$ att närma sig x -axeln då $x \rightarrow \infty$, och den kommer att närma sig y -axeln då $x \rightarrow 0$ (från såväl vänster som höger).

Övning/exempel (forts)

Eftersom $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x^2} = 0$ och $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^2} = -\infty$, så kommer kurvan $y = f(x)$ att närma sig x -axeln då $x \rightarrow \infty$, och den kommer att närma sig y -axeln då $x \rightarrow 0$ (från såväl vänster som höger).

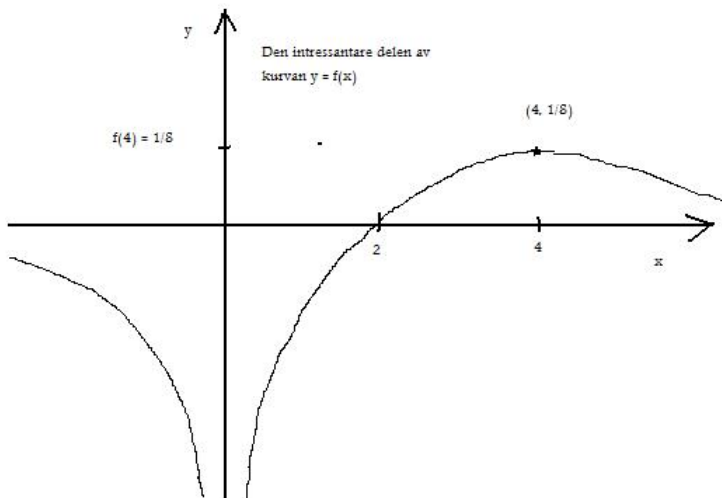
Vi har också $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x^2} = 0$, men notera att $f(x) < 0$ när $x < 0$.

Övning/exempel (forts)

Eftersom $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x^2} = 0$ och $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^2} = -\infty$, så kommer kurvan $y = f(x)$ att närma sig x -axeln då $x \rightarrow \infty$, och den kommer att närma sig y -axeln då $x \rightarrow 0$ (från såväl vänster som höger).

Vi har också $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x^2} = 0$, men notera att $f(x) < 0$ när $x < 0$. Med den information vi nu har så kan vi skissa kurvan $y = f(x) = \frac{x-2}{x^2}$.

Övning/exempel (forts)



Rolles sats. Antag att $a < b$, g är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) . Om $g(a) = g(b)$ så finns ett tal c i intervallet (a, b) så att $g'(c) = 0$.

Rolles sats. Antag att $a < b$, g är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) . Om $g(a) = g(b)$ så finns ett tal c i intervallet (a, b) så att $g'(c) = 0$.

Bevis. Antag att $g(a) = g(b)$. Om g är konstant på $[a, b]$ så vet vi att $g'(c) = 0$ för alla c i intervallet (a, b) .

Rolles sats. Antag att $a < b$, g är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) . Om $g(a) = g(b)$ så finns ett tal c i intervallet (a, b) så att $g'(c) = 0$.

Bevis. Antag att $g(a) = g(b)$. Om g är konstant på $[a, b]$ så vet vi att $g'(c) = 0$ för alla c i intervallet (a, b) . Så låt oss anta att $g(x) > g(a)$ för något x i (a, b) . (Fallet $g(x) < g(a)$ för något x i (a, b) behandlas på liknande sätt.)

Rolles sats. Antag att $a < b$, g är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) . Om $g(a) = g(b)$ så finns ett tal c i intervallet (a, b) så att $g'(c) = 0$.

Bevis. Antag att $g(a) = g(b)$. Om g är konstant på $[a, b]$ så vet vi att $g'(c) = 0$ för alla c i intervallet (a, b) . Så låt oss anta att $g(x) > g(a)$ för något x i (a, b) . (Fallet $g(x) < g(a)$ för något x i (a, b) behandlas på liknande sätt.) Pga av sin kontinuitet på $[a, b]$ så antar g ett största värde på $[a, b]$.

Rolles sats. Antag att $a < b$, g är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) . Om $g(a) = g(b)$ så finns ett tal c i intervallet (a, b) så att $g'(c) = 0$.

Bevis. Antag att $g(a) = g(b)$. Om g är konstant på $[a, b]$ så vet vi att $g'(c) = 0$ för alla c i intervallet (a, b) . Så låt oss anta att $g(x) > g(a)$ för något x i (a, b) . (Fallet $g(x) < g(a)$ för något x i (a, b) behandlas på liknande sätt.) Pga av sin kontinuitet på $[a, b]$ så antar g ett största värde på $[a, b]$. Eftersom det största värdet är större än $g(a) = g(b)$ så antas det i någon punkt c i intervallet (a, b) .

Rolles sats. Antag att $a < b$, g är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) . Om $g(a) = g(b)$ så finns ett tal c i intervallet (a, b) så att $g'(c) = 0$.

Bevis. Antag att $g(a) = g(b)$. Om g är konstant på $[a, b]$ så vet vi att $g'(c) = 0$ för alla c i intervallet (a, b) . Så låt oss anta att $g(x) > g(a)$ för något x i (a, b) . (Fallet $g(x) < g(a)$ för något x i (a, b) behandlas på liknande sätt.) Pga av sin kontinuitet på $[a, b]$ så antar g ett största värde på $[a, b]$. Eftersom det största värdet är större än $g(a) = g(b)$ så antas det i någon punkt c i intervallet (a, b) . Eftersom g antas vara deriverbar på (a, b) så följer från föregående sats att $g'(c) = 0$.

Medelvårdessatsen

Medelvårdessatsen. Antag att f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) . Då finns en punkt c i (a, b) så att

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Medelvårdessatsen. Antag att f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) . Då finns en punkt c i (a, b) så att

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Man kan säga att satsen bevisas med ett litet “trick” (men ett tillåtet sådant). Låt

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right).$$

Medelvårdessatsen. Antag att f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) . Då finns en punkt c i (a, b) så att

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Man kan säga att satsen bevisas med ett litet “trick” (men ett tillåtet sådant). Låt

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right).$$

Då är g också kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) , och dessutom gäller att $g(a) = g(b)$.

Medelvärdessatsen. Antag att f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) . Då finns en punkt c i (a, b) så att

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Man kan säga att satsen bevisas med ett litet “trick” (men ett tillåtet sådant). Låt

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right).$$

Då är g också kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) , och dessutom gäller att $g(a) = g(b)$. Så man kan använda Rolles sats som säger att det finns en punkt c i (a, b) så att $g'(c) = 0$.

Medelvårdessatsen. Antag att f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) . Då finns en punkt c i (a, b) så att

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

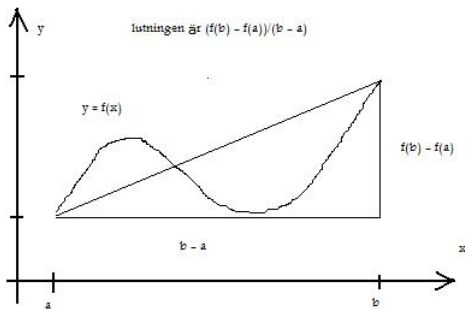
Man kan säga att satsen bevisas med ett litet “trick” (men ett tillåtet sådant). Låt

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right).$$

Då är g också kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) , och dessutom gäller att $g(a) = g(b)$. Så man kan använda Rolles sats som säger att det finns en punkt c i (a, b) så att $g'(c) = 0$. Om man deriverar vänster och högerled i definitionen av g ovan, och sätter in $x = c$ så får man, med användning av $g'(c) = 0$ och lite omskrivningar, $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Visuell tolkning av medelvärdessatsen

Medelvärdessatsen säger att det finns en punkt c i (a, b) så att $f'(c)$ är lika med lutningen för linjen mellan punkterna $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$.



Exempel. Med hjälp av medelvärdessatsen kan man visa att

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} < 1 + \frac{x}{3}$$

för alla $x > 0$.

Ett exempel

Exempel. Med hjälp av medelvärdessatsen kan man visa att

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} < 1 + \frac{x}{3}$$

för alla $x > 0$.

Låt $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$.

Exempel. Med hjälp av medelvärdessatsen kan man visa att

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} < 1 + \frac{x}{3}$$

för alla $x > 0$.

Låt $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$. Eftersom $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ är kontinuerlig och deriverbar på $[0, b]$ för varje reellt tal $b > 0$, så finns, enligt medelvärdessatsen $c \in [0, b]$ så att

$$\frac{(1+b)^{\frac{1}{3}} - 1}{b} = \frac{f(b) - f(0)}{b - 0} = f'(c) = \frac{1}{3(1+c)^{\frac{2}{3}}} < \frac{1}{3}.$$

Exempel. Med hjälp av medelvärdessatsen kan man visa att

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} < 1 + \frac{x}{3}$$

för alla $x > 0$.

Låt $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$. Eftersom $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ är kontinuerlig och deriverbar på $[0, b]$ för varje reellt tal $b > 0$, så finns, enligt medelvärdessatsen $c \in [0, b]$ så att

$$\frac{(1+b)^{\frac{1}{3}} - 1}{b} = \frac{f(b) - f(0)}{b - 0} = f'(c) = \frac{1}{3(1+c)^{\frac{2}{3}}} < \frac{1}{3}.$$

Multiplikation med b , och sedan addition med ett (på båda sidorna) ger

$$(1+b)^{\frac{1}{3}} < 1 + \frac{b}{3},$$

om vi antar att $b > 0$.

Högre derivator

Om f deriveras så fås derivatan f' , om f' deriveras så fås derivatan till f' som betecknas f'' , och som också kallas **andraderivatan** till f . Man kan fortsätta och derivera f'' och på så sätt få f''' , dvs. **tredje derivatan** till f .

Högre derivator

Om f deriveras så fås derivatan f' , om f' deriveras så fås derivatan till f' som betecknas f'' , och som också kallas **andraderivatan** till f . Man kan fortsätta och derivera f'' och på så sätt få f''' , dvs. **tredje derivatan** till f .

Om man behöver derivera många gånger så kan följande notation vara lättare att hantera:

$f^{(1)} = f'$, och $f^{(n+1)} = (f^{(n)})' =$ derivatan av $f^{(n)}$.

Exempelvis betyder $f^{(3)}$ tredje derivatan av f .

Om f deriveras så fås derivatan f' , om f' deriveras så fås derivatan till f' som betecknas f'' , och som också kallas **andraderivatan** till f . Man kan fortsätta och derivera f'' och på så sätt få f''' , dvs. **tredje derivatan** till f .

Om man behöver derivera många gånger så kan följande notation vara lättare att hantera:

$f^{(1)} = f'$, och $f^{(n+1)} = (f^{(n)})' =$ derivatan av $f^{(n)}$.

Exempelvis betyder $f^{(3)}$ tredje derivatan av f .

Exempel. Om $f(x) = x^2 + 3x + 5$ och $g(x) = \sin x$ så

$$f'(x) = 2x + 3, \quad f''(x) = 2,$$

$$g'(x) = \cos x, \quad g''(x) = -\sin x.$$