

Envariabelanalys: Föreläsning 8

Vera Koponen

Uppsala Universitet

Envariabelanalys, vt 2011

Inledande exempel. Ekvationen $y^2 + (x - 1)^2 = 4$ beskriver en cirkel med radien 2 och centrum i punkten $(1, 0)$.

Inledande exempel. Ekvationen $y^2 + (x - 1)^2 = 4$ beskriver en cirkel med radien 2 och centrum i punkten $(1, 0)$.

Lägg märke till att ekvationen/cirkeln *implicit* definierar två funktioner på intervallet $-1 \leq x \leq 3$:

$$y(x) = \sqrt{4 - (x - 1)^2} \quad \text{och} \quad y(x) = -\sqrt{4 - (x - 1)^2}.$$

Inledande exempel. Ekvationen $y^2 + (x - 1)^2 = 4$ beskriver en cirkel med radien 2 och centrum i punkten $(1, 0)$.

Lägg märke till att ekvationen/cirkeln *implicit* definierar två funktioner på intervallet $-1 \leq x \leq 3$:

$$y(x) = \sqrt{4 - (x - 1)^2} \quad \text{och} \quad y(x) = -\sqrt{4 - (x - 1)^2}.$$

I denna situation kan derivatan av respektive funktion beskrivas av en ekvation som innehåller variablerna x och y , på följande sätt:

Inledande exempel (forts)

Vi betraktar y som en funktion av x och deriverar båda leden i ekvationen (om de båda leden är lika så måste derivatan av respektive led vara lika), vilket ger

Inledande exempel (forts)

Vi betraktar y som en funktion av x och deriverar båda leden i ekvationen (om de båda leden är lika så måste derivatan av respektive led vara lika), vilket ger

$$2yy' + 2(x - 1) = 0$$

där y' framträder eftersom det är den "inre derivatan" av y^2 (där y betraktas som funktion av x).

Inledande exempel (forts)

Vi betraktar y som en funktion av x och deriverar båda leden i ekvationen (om de båda leden är lika så måste derivatan av respektive led vara lika), vilket ger

$$2yy' + 2(x - 1) = 0$$

där y' framträder eftersom det är den "inre derivatan" av y^2 (där y betraktas som funktion av x). Om man vill framhäva att man betraktar y som funktion av x så kan man skriva $y(x)$ och $y'(x)$ i stället för y och y' .

Inledande exempel (forts)

Vi betraktar y som en funktion av x och deriverar båda leden i ekvationen (om de båda leden är lika så måste derivatan av respektive led vara lika), vilket ger

$$2yy' + 2(x - 1) = 0$$

där y' framträder eftersom det är den "inre derivatan" av y^2 (där y betraktas som funktion av x). Om man vill framhäva att man betraktar y som funktion av x så kan man skriva $y(x)$ och $y'(x)$ i stället för y och y' .

Vi löser nu ut y' och får

$$y' = -\frac{x-1}{y}.$$

Inledande exempel (forts)

Vi kan nu (exempelvis) räkna ut vad lutningen är för den linje som tangerar cirkeln $y^2 + (x - 1)^2 = 4$ i punkten $(2, \sqrt{3})$.

Inledande exempel (forts)

Vi kan nu (exempelvis) räkna ut vad lutningen är för den linje som tangerar cirkeln $y^2 + (x - 1)^2 = 4$ i punkten $(2, \sqrt{3})$.

Den sökta lutningen är densamma som derivatan av $y(x) = \sqrt{4 - (x - 1)^2}$ i punkten $x = 2$ (dvs. $y'(2)$),

Inledande exempel (forts)

Vi kan nu (exempelvis) räkna ut vad lutningen är för den linje som tangerar cirkeln $y^2 + (x - 1)^2 = 4$ i punkten $(2, \sqrt{3})$.

Den sökta lutningen är densamma som derivatan av $y(x) = \sqrt{4 - (x - 1)^2}$ i punkten $x = 2$ (dvs. $y'(2)$), men kan också räknas ut med hjälp av ekvationen $y'(x) = -\frac{x-1}{y}$ från föregående sida:

Inledande exempel (forts)

Vi kan nu (exempelvis) räkna ut vad lutningen är för den linje som tangerar cirkeln $y^2 + (x - 1)^2 = 4$ i punkten $(2, \sqrt{3})$.

Den sökta lutningen är densamma som derivatan av $y(x) = \sqrt{4 - (x - 1)^2}$ i punkten $x = 2$ (dvs. $y'(2)$), men kan också räknas ut med hjälp av ekvationen $y'(x) = -\frac{x-1}{y}$ från föregående sida:

$$y'(2) = -\frac{2-1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Inledande exempel (forts)

Vi kan nu (exempelvis) räkna ut vad lutningen är för den linje som tangerar cirkeln $y^2 + (x - 1)^2 = 4$ i punkten $(2, \sqrt{3})$.

Den sökta lutningen är densamma som derivatan av $y(x) = \sqrt{4 - (x - 1)^2}$ i punkten $x = 2$ (dvs. $y'(2)$), men kan också räknas ut med hjälp av ekvationen $y'(x) = -\frac{x-1}{y}$ från föregående sida:

$$y'(2) = -\frac{2-1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

På samma sätt kan vi räkna ut lutningen för den linje som tangerar cirkeln $y^2 + (x - 1)^2 = 4$ i punkten $(2, -\sqrt{3})$ på den undre halvan av cirkeln:

Inledande exempel (forts)

Vi kan nu (exempelvis) räkna ut vad lutningen är för den linje som tangerar cirkeln $y^2 + (x - 1)^2 = 4$ i punkten $(2, \sqrt{3})$.

Den sökta lutningen är densamma som derivatan av $y(x) = \sqrt{4 - (x - 1)^2}$ i punkten $x = 2$ (dvs. $y'(2)$), men kan också räknas ut med hjälp av ekvationen $y'(x) = -\frac{x-1}{y}$ från föregående sida:

$$y'(2) = -\frac{2-1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

På samma sätt kan vi räkna ut lutningen för den linje som tangerar cirkeln $y^2 + (x - 1)^2 = 4$ i punkten $(2, -\sqrt{3})$ på den undre halvan av cirkeln:

$$y'(2) = -\frac{2-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

där y' i detta fall syftar på derivatan av funktionen vars graf utgörs av den undre halvan av cirkeln (dvs. funktionen $y(x) = -\sqrt{4 - (x - 1)^2}$).

Föregående exempel illustrerar metoden som kallas **implicit deriving**.

Implicit deriving

Föregående exempel illustrerar metoden som kallas **implicit deriving**.

Denna metod kan användas när man har en ekvation $F(x, y) = G(x, y)$ där $F(x, y)$ och $G(x, y)$ är uttryck som involverar variablerna x och y , och där man vet att, för något intervall $a \leq x \leq b$, så finns en funktion $y(x)$ sådan att $F(x, y(x)) = G(x, y(x))$ är uppfylld för alla $a \leq x \leq b$.

Föregående exempel illustrerar metoden som kallas **implicit deriving**.

Denna metod kan användas när man har en ekvation $F(x, y) = G(x, y)$ där $F(x, y)$ och $G(x, y)$ är uttryck som involverar variablerna x och y , och där man vet att, för något intervall $a \leq x \leq b$, så finns en funktion $y(x)$ sådan att $F(x, y(x)) = G(x, y(x))$ är uppfylld för alla $a \leq x \leq b$. I exemplet ovan kan man ta $F(x, y) = y^2 + (x - 1)^2$ och $G(x, y) = 4$, och då blir $F(x, y) = G(x, y)$ samma som $y^2 + (x - 1)^2 = 4$.

Föregående exempel illustrerar metoden som kallas **implicit derivinging**.

Denna metod kan användas när man har en ekvation $F(x, y) = G(x, y)$ där $F(x, y)$ och $G(x, y)$ är uttryck som involverar variablerna x och y , och där man vet att, för något intervall $a \leq x \leq b$, så finns en funktion $y(x)$ sådan att $F(x, y(x)) = G(x, y(x))$ är uppfylld för alla $a \leq x \leq b$. I exemplet ovan kan man ta $F(x, y) = y^2 + (x - 1)^2$ och $G(x, y) = 4$, och då blir $F(x, y) = G(x, y)$ samma som $y^2 + (x - 1)^2 = 4$.

Implicit derivinging kan också göras om x kan betraktas som funktion av y och ekvationen $F(x(y), y) = G(x(y), y)$ är uppfylld. (Mer om detta senare.)

Implicit derivering

Implicit derivering är användbar när man har en ekvation $F(x, y) = G(x, y)$ och det är svårt, eller till och med omöjligt, att beskriva y explicit (alltså med ett konkret uttryck/formel) som funktion av x (eller x som funktion av y).

Implicit derivering

Implicit derivering är användbar när man har en ekvation $F(x, y) = G(x, y)$ och det är svårt, eller till och med omöjligt, att beskriva y explicit (alltså med ett konkret uttryck/formel) som funktion av x (eller x som funktion av y).

Exempel. Följande ekvation definierar *implicit* en funktion $y(x)$ som inte kan uttryckas explicit med hjälp av ett elementärt uttryck (dvs. ett uttryck som är uppbyggt av de fyra räknesätten, polynom, trigonometriska-, exponential- och/eller logaritmfunktioner, samt sammansättningar av dessa):

Implicit derivering

Implicit derivering är användbar när man har en ekvation $F(x, y) = G(x, y)$ och det är svårt, eller till och med omöjligt, att beskriva y explicit (alltså med ett konkret uttryck/formel) som funktion av x (eller x som funktion av y).

Exempel. Följande ekvation definierar *implicit* en funktion $y(x)$ som inte kan uttryckas explicit med hjälp av ett elementärt uttryck (dvs. ett uttryck som är uppbyggt av de fyra räknesätten, polynom, trigonometriska-, exponential- och/eller logaritmfunktioner, samt sammansättningar av dessa): $y^5 + xy + x^5 = 1$.

Implicit derivering

Implicit derivering är användbar när man har en ekvation $F(x, y) = G(x, y)$ och det är svårt, eller till och med omöjligt, att beskriva y explicit (alltså med ett konkret uttryck/formel) som funktion av x (eller x som funktion av y).

Exempel. Följande ekvation definierar *implicit* en funktion $y(x)$ som inte kan uttryckas explicit med hjälp av ett elementärt uttryck (dvs. ett uttryck som är uppbyggt av de fyra räknesätten, polynom, trigonometriska-, exponential- och/eller logaritmfunktioner, samt sammansättningar av dessa): $y^5 + xy + x^5 = 1$.

Övning 19. Derivera ovanstående ekvation implicit där y betraktas som funktion av x och bestäm kurvans lutning (som funktion av x) i punkten $(1, 0)$. Med andra ord, bestäm $y'(1)$ där $y(x)$ är den funktion som implicit bestäms av kurvan som beskrivs av $y^5 + xy + x^5 = 1$.

Implicit deriving

Lösning: Implicit deriving av $y^5 + xy + x^5 = 1$ ger

$$5y^4y' + y + xy' + 5x^4 = 0.$$

Implicit derivering

Lösning: Implicit derivering av $y^5 + xy + x^5 = 1$ ger

$$5y^4y' + y + xy' + 5x^4 = 0.$$

Utbrytning av y' ger sedan

$$y' = -\frac{5x^4 + y}{5y^4 + x},$$

Implicit derivering

Lösning: Implicit derivering av $y^5 + xy + x^5 = 1$ ger

$$5y^4y' + y + xy' + 5x^4 = 0.$$

Utbrytning av y' ger sedan

$$y' = -\frac{5x^4 + y}{5y^4 + x},$$

och insättning av $x = 1$ och $y = 0$ ger nu

$$y'(1) = -\frac{5 \cdot 1^4 + 0}{5 \cdot 0^4 + 1} = -5.$$

Implicit derivering

Lösning: Implicit derivering av $y^5 + xy + x^5 = 1$ ger

$$5y^4y' + y + xy' + 5x^4 = 0.$$

Utbrytning av y' ger sedan

$$y' = -\frac{5x^4 + y}{5y^4 + x},$$

och insättning av $x = 1$ och $y = 0$ ger nu

$$y'(1) = -\frac{5 \cdot 1^4 + 0}{5 \cdot 0^4 + 1} = -5.$$

Obs! Det är *inte* så att alla ekvationer definierar en kurva som ger upphov till en implicit funktion på något intervall med mer än en punkt.

Implicit derivering

Lösning: Implicit derivering av $y^5 + xy + x^5 = 1$ ger

$$5y^4y' + y + xy' + 5x^4 = 0.$$

Utbrytning av y' ger sedan

$$y' = -\frac{5x^4 + y}{5y^4 + x},$$

och insättning av $x = 1$ och $y = 0$ ger nu

$$y'(1) = -\frac{5 \cdot 1^4 + 0}{5 \cdot 0^4 + 1} = -5.$$

Obs! Det är *inte* så att alla ekvationer definierar en kurva som ger upphov till en implicit funktion på något intervall med mer än en punkt. Exempelvis så saknar ekvationen $x^2 + y^2 = -1$ reella lösningar överhuvudtaget,

Implicit derivering

Lösning: Implicit derivering av $y^5 + xy + x^5 = 1$ ger

$$5y^4y' + y + xy' + 5x^4 = 0.$$

Utbrytning av y' ger sedan

$$y' = -\frac{5x^4 + y}{5y^4 + x},$$

och insättning av $x = 1$ och $y = 0$ ger nu

$$y'(1) = -\frac{5 \cdot 1^4 + 0}{5 \cdot 0^4 + 1} = -5.$$

Obs! Det är *inte* så att alla ekvationer definierar en kurva som ger upphov till en implicit funktion på något intervall med mer än en punkt. Exempelvis så saknar ekvationen $x^2 + y^2 = -1$ reella lösningar överhuvudtaget, och ekvationen $x^2 + y^2 = 0$ har bara lösningen $(x, y) = (0, 0)$.

Implicit derivering: exempel

Exempel/Övning. Ekvationen

$$x^2 + y^2 \cos x = 0$$

definierar en funktion $y(x)$ implicit i på ett intervall kring $x = \pi$.
Ange ekvationen för linjen som tangerar kurvan (som beskrivs av ekvationen) i punkten (π, π) .

Implicit deriving: exempel

Exempel/Övning. Ekvationen

$$x^2 + y^2 \cos x = 0$$

definierar en funktion $y(x)$ implicit i på ett intervall kring $x = \pi$.
Ange ekvationen för linjen som tangerar kurvan (som beskrivs av ekvationen) i punkten (π, π) .

Lösning. Implicit deriving (m.a.p. x) av båda leden ger

$$2x + 2yy' \cos x - y^2 \sin x = 0.$$

Implicit derivering: exempel

Exempel/Övning. Ekvationen

$$x^2 + y^2 \cos x = 0$$

definierar en funktion $y(x)$ implicit i på ett intervall kring $x = \pi$.
Ange ekvationen för linjen som tangerar kurvan (som beskrivs av ekvationen) i punkten (π, π) .

Lösning. Implicit derivering (m.a.p. x) av båda leden ger

$$2x + 2yy' \cos x - y^2 \sin x = 0.$$

Utbrytning av y' ger

$$y' = \frac{y^2 \sin x - 2x}{2y \cos x}.$$

Implicit derivering: exempel

Exempel/Övning. Ekvationen

$$x^2 + y^2 \cos x = 0$$

definierar en funktion $y(x)$ implicit i på ett intervall kring $x = \pi$. Ange ekvationen för linjen som tangerar kurvan (som beskrivs av ekvationen) i punkten (π, π) .

Lösning. Implicit derivering (m.a.p. x) av båda leden ger

$$2x + 2yy' \cos x - y^2 \sin x = 0.$$

Utbrytning av y' ger

$$y' = \frac{y^2 \sin x - 2x}{2y \cos x}.$$

Insättning av $x = \pi$ och $y = \pi$ ger $y'(\pi) = 1$.

Implicit derivering: exempel

Exempel/Övning. Ekvationen

$$x^2 + y^2 \cos x = 0$$

definierar en funktion $y(x)$ implicit i på ett intervall kring $x = \pi$. Ange ekvationen för linjen som tangerar kurvan (som beskrivs av ekvationen) i punkten (π, π) .

Lösning. Implicit derivering (m.a.p. x) av båda leden ger

$$2x + 2yy' \cos x - y^2 \sin x = 0.$$

Utbrytning av y' ger

$$y' = \frac{y^2 \sin x - 2x}{2y \cos x}.$$

Insättning av $x = \pi$ och $y = \pi$ ger $y'(\pi) = 1$. Så tangentlinjen i punkten $(\pi, y(\pi)) = (\pi, \pi)$ har lutning 1 och dess ekvation ges då av $y = (x - \pi) + \pi = x$ eftersom linjen går igenom (π, π) .

Implicit derivering: exempel

Exempel/Övning. Finn den eller de punkter på kurvan $x = \frac{y^3}{3} + \frac{4}{3}$ som ligger närmast origo (dvs. $(0,0)$).

Implicit derivering: exempel

Exempel/Övning. Finn den eller de punkter på kurvan $x = \frac{y^3}{3} + \frac{4}{3}$ som ligger närmast origo (dvs. $(0, 0)$).

Lösning. Vi söker en punkt (a, b) (eller punkter) på kurvan sådan att linjen från $(0, 0)$ till (a, b) är en normallinje till kurvan i punkten (a, b) . Implicit derivering (m.a.p. x) av ekvationen ger

$$1 = y^2 y',$$

Implicit derivering: exempel

Exempel/Övning. Finn den eller de punkter på kurvan $x = \frac{y^3}{3} + \frac{4}{3}$ som ligger närmast origo (dvs. $(0, 0)$).

Lösning. Vi söker en punkt (a, b) (eller punkter) på kurvan sådan att linjen från $(0, 0)$ till (a, b) är en normallinje till kurvan i punkten (a, b) . Implicit derivering (m.a.p. x) av ekvationen ger

$$1 = y^2 y',$$

och vi får också

$$y' = \frac{1}{y^2}.$$

Implicit derivering: exempel

Exempel/Övning. Finn den eller de punkter på kurvan $x = \frac{y^3}{3} + \frac{4}{3}$ som ligger närmast origo (dvs. $(0, 0)$).

Lösning. Vi söker en punkt (a, b) (eller punkter) på kurvan sådan att linjen från $(0, 0)$ till (a, b) är en normallinje till kurvan i punkten (a, b) . Implicit derivering (m.a.p. x) av ekvationen ger

$$1 = y^2 y',$$

och vi får också

$$y' = \frac{1}{y^2}.$$

I punkten (a, b) får vi $y'(a) = \frac{1}{b^2}$, så normallinjens lutning är $-b^2$ i punkten (a, b) .

Implicit derivering: exempel

Exempel/Övning. Finn den eller de punkter på kurvan $x = \frac{y^3}{3} + \frac{4}{3}$ som ligger närmast origo (dvs. $(0, 0)$).

Lösning. Vi söker en punkt (a, b) (eller punkter) på kurvan sådan att linjen från $(0, 0)$ till (a, b) är en normallinje till kurvan i punkten (a, b) . Implicit derivering (m.a.p. x) av ekvationen ger

$$1 = y^2 y',$$

och vi får också

$$y' = \frac{1}{y^2}.$$

I punkten (a, b) får vi $y'(a) = \frac{1}{b^2}$, så normallinjens lutning är $-b^2$ i punkten (a, b) . Så normallinjen till kurvan i punkten (a, b) har ekvationen $y = -b^2 x + m$ för något m .

Implicit derivering: exempel

Exempel/Övning. Finn den eller de punkter på kurvan $x = \frac{y^3}{3} + \frac{4}{3}$ som ligger närmast origo (dvs. $(0, 0)$).

Lösning. Vi söker en punkt (a, b) (eller punkter) på kurvan sådan att linjen från $(0, 0)$ till (a, b) är en normallinje till kurvan i punkten (a, b) . Implicit derivering (m.a.p. x) av ekvationen ger

$$1 = y^2 y',$$

och vi får också

$$y' = \frac{1}{y^2}.$$

I punkten (a, b) får vi $y'(a) = \frac{1}{b^2}$, så normallinjens lutning är $-b^2$ i punkten (a, b) . Så normallinjen till kurvan i punkten (a, b) har ekvationen $y = -b^2 x + m$ för något m . Men eftersom normallinjen som vi söker skall gå igenom $(0, 0)$ så måste vi ha $m = 0$.

Implicit derivering: exempel

Eftersom den sökta linjen $y = -b^2x$ skall innehålla punkten (a, b) så får vi $b = -b^2a$, vilket ger

$$b = -\frac{1}{a}.$$

Implicit derivering: exempel

Eftersom den sökta linjen $y = -b^2x$ skall innehålla punkten (a, b) så får vi $b = -b^2a$, vilket ger

$$b = -\frac{1}{a}.$$

Dessutom skall (a, b) ligga på kurvan $x = \frac{y^3}{3} + \frac{4}{3}$ vilket ger

$$a = \frac{b^3}{3} + \frac{4}{3},$$

Implicit derivering: exempel

Eftersom den sökta linjen $y = -b^2x$ skall innehålla punkten (a, b) så får vi $b = -b^2a$, vilket ger

$$b = -\frac{1}{a}.$$

Dessutom skall (a, b) ligga på kurvan $x = \frac{y^3}{3} + \frac{4}{3}$ vilket ger

$$a = \frac{b^3}{3} + \frac{4}{3},$$

och efter substitutionen $b = -1/a$ och förenklingar får vi

$$3a^4 - 4a^3 + 1 = 0.$$

Implicit derivering: exempel

Eftersom den sökta linjen $y = -b^2x$ skall innehålla punkten (a, b) så får vi $b = -b^2a$, vilket ger

$$b = -\frac{1}{a}.$$

Dessutom skall (a, b) ligga på kurvan $x = \frac{y^3}{3} + \frac{4}{3}$ vilket ger

$$a = \frac{b^3}{3} + \frac{4}{3},$$

och efter substitutionen $b = -1/a$ och förenklingar får vi

$$3a^4 - 4a^3 + 1 = 0.$$

Generellt sett är 4e-gradsekvationer inte lätta att lösa för hand, men i detta fall ser man att $a = 1$ är en lösning, vilket ger $b = -\frac{1}{a} = -1$.

Implicit derivering: exempel

Vi undersöker om det finns fler lösningar till $3a^4 - 4a^3 + 1 = 0$.
Polynomdivision av $3a^4 - 4a^3 + 1 = 0$ med $a - 1$ ger
 $3a^3 - a^2 - a - 1$ och man ser att $3a^3 - a^2 - a - 1 = 0$ har
lösningen $a = 1$ (som alltså är en dubbelrot till den ursprungliga
4e-gradsekvationen).

Implicit derivering: exempel

Vi undersöker om det finns fler lösningar till $3a^4 - 4a^3 + 1 = 0$.
Polynomdivision av $3a^4 - 4a^3 + 1 = 0$ med $a - 1$ ger
 $3a^3 - a^2 - a - 1$ och man ser att $3a^3 - a^2 - a - 1 = 0$ har
lösningen $a = 1$ (som alltså är en dubbelrot till den ursprungliga
4e-gradsekvationen). Polynomdivision av $3a^3 - a^2 - a - 1$ med
 $a - 1$ ger polynomet $3a^2 + 2a + 1$.

Implicit derivering: exempel

Vi undersöker om det finns fler lösningar till $3a^4 - 4a^3 + 1 = 0$. Polynomdivision av $3a^4 - 4a^3 + 1 = 0$ med $a - 1$ ger $3a^3 - a^2 - a - 1$ och man ser att $3a^3 - a^2 - a - 1 = 0$ har lösningen $a = 1$ (som alltså är en dubbelrot till den ursprungliga 4e-gradsekvationen). Polynomdivision av $3a^3 - a^2 - a - 1$ med $a - 1$ ger polynomet $3a^2 + 2a + 1$. Med hjälp av standardmetoder ("p-q formeln" tex.) ser man att $3a^2 + 2a + 1 = 0$ saknar reella lösningar.

Implicit derivering: exempel

Vi undersöker om det finns fler lösningar till $3a^4 - 4a^3 + 1 = 0$. Polynomdivision av $3a^4 - 4a^3 + 1 = 0$ med $a - 1$ ger $3a^3 - a^2 - a - 1$ och man ser att $3a^3 - a^2 - a - 1 = 0$ har lösningen $a = 1$ (som alltså är en dubbelrot till den ursprungliga 4e-gradsekvationen). Polynomdivision av $3a^3 - a^2 - a - 1$ med $a - 1$ ger polynomet $3a^2 + 2a + 1$. Med hjälp av standardmetoder ("p-q formeln" tex.) ser man att $3a^2 + 2a + 1 = 0$ saknar reella lösningar. Därmed är $(a, b) = (1, -1)$ den enda punkt på kurvan vars normallinje går igenom $(0, 0)$ och därför är $(1, -1)$ den punkt på kurvan som är närmast $(0, 0)$.

Övning 20. (a) Derivera ekvationerna

$$x = \frac{y^3}{3} + \frac{4}{3},$$

$$x^2 + y^2 \cos x = 0 \text{ och}$$

$$y^2 + (x - 1)^2 = 4$$

implicit med avseende på y , dvs. betrakta x som funktion av y , och lös ut $x'(y)$ var och en av fallen.

Övning 21. Titta tillbaka på de implicita deriveringarna med avseende på x , på föregående sidor, och se hur uttrycket för $y'(x)$ ser ut. Kan du beskriva något samband mellan $y'(x)$ och $x'(y)$?

Övning 20. (a) Derivera ekvationerna

$$x = \frac{y^3}{3} + \frac{4}{3},$$

$$x^2 + y^2 \cos x = 0 \text{ och}$$

$$y^2 + (x - 1)^2 = 4$$

implicit med avseende på y , dvs. betrakta x som funktion av y , och lös ut $x'(y)$ var och en av fallen.

Övning 21. Titta tillbaka på de implicita deriveringarna med avseende på x , på föregående sidor, och se hur uttrycket för $y'(x)$ ser ut. Kan du beskriva något samband mellan $y'(x)$ och $x'(y)$?

Övning 22. Försök att förklara sambandet.

Övning 23. Härled (för heltal $n > 1$) formeln

$$\frac{d}{dx} x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}}$$

med hjälp av implicit derivering. (Ledning: om $y(x) = x^{1/n}$ så uppfyller $y(x)$ sambandet $y^n = x$.)