

Envariabelanalys: Föreläsning 9–11

Vera Koponen

Uppsala Universitet

Envariabelanalys, vt 2011

Definition. En funktion f kallas **injektiv** (boken säger **one-to-one/en-till-en**) på intervallet I om följande villkor gäller:

Definition. En funktion f kallas **injektiv** (boken säger **one-to-one/en-till-en**) på intervallet I om följande villkor gäller: Om $x, y \in I$ och $x \neq y$ så $f(x) \neq f(y)$.

Definition. En funktion f kallas **injektiv** (boken säger **one-to-one/en-till-en**) på intervallet I om följande villkor gäller: Om $x, y \in I$ och $x \neq y$ så $f(x) \neq f(y)$.
Med andra ord så måste olika input från intervallet ge olika output.

Definition. En funktion f kallas **injektiv** (boken säger **one-to-one/en-till-en**) på intervallet I om följande villkor gäller: Om $x, y \in I$ och $x \neq y$ så $f(x) \neq f(y)$.
Med andra ord så måste olika input från intervallet ge olika output.

Övning 24. Ange så stora intervall som möjligt där funktionerna som ges av uttrycken nedan är injektiva:

$$x^2, \quad x^3, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \tan x.$$

Antag att f är injektiv på intervallet I .

Inversfunktioner

Antag att f är injektiv på intervallet I .

Låt $V_f = \{f(x) : x \in I\}$ vara f 's värdemängd på intervallet I .

Inversfunktioner

Antag att f är injektiv på intervallet I .

Låt $V_f = \{f(x) : x \in I\}$ vara f :s värdemängd på intervallet I .

Nu kan man definiera en funktion f^{-1} , kallad **inversen till f (på intervallet I)**, vars domän/definitionsområde är V_f och vars värdemängd är I :

Inversfunktioner

Antag att f är injektiv på intervallet I .

Låt $V_f = \{f(x) : x \in I\}$ vara f 's värdemängd på intervallet I .

Nu kan man definiera en funktion f^{-1} , kallad **inversen till f (på intervallet I)**, vars domän/definitionsområde är V_f och vars värdemängd är I :

$$\text{För varje } y \in V_f, \quad f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Inversfunktioner

Antag att f är injektiv på intervallet I .

Låt $V_f = \{f(x) : x \in I\}$ vara f 's värdemängd på intervallet I .

Nu kan man definiera en funktion f^{-1} , kallad **inversen till f (på intervallet I)**, vars domän/definitionsområde är V_f och vars värdemängd är I :

$$\text{För varje } y \in V_f, \quad f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Då är f^{-1} definierad för alla $y \in V_f$, för om $y \in V_f$ så finns (pga. definitionen av V_f och att f antas vara injektiv på I) exakt ett $x \in I$ sådant att $f(x) = y$.

Inversfunktioner

Antag att f är injektiv på intervallet I .

Låt $V_f = \{f(x) : x \in I\}$ vara f 's värdemängd på intervallet I .

Nu kan man definiera en funktion f^{-1} , kallad **inversen till f (på intervallet I)**, vars domän/definitionsområde är V_f och vars värdemängd är I :

$$\text{För varje } y \in V_f, \quad f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Då är f^{-1} definierad för alla $y \in V_f$, för om $y \in V_f$ så finns (pga. definitionen av V_f och att f antas vara injektiv på I) exakt ett $x \in I$ sådant att $f(x) = y$.

Exempel. Om $f(x) = \sin x$ så är f injektiv på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ och $V_f = \{\sin x : x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\} = [-1, 1]$, så inversen till f (på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) är definierad för alla $x \in [-1, 1]$.

Inversfunktioner

Antag att f är injektiv på intervallet I .

Låt $V_f = \{f(x) : x \in I\}$ vara f 's värdemängd på intervallet I .

Nu kan man definiera en funktion f^{-1} , kallad **inversen till f (på intervallet I)**, vars domän/definitionsområde är V_f och vars värdemängd är I :

$$\text{För varje } y \in V_f, f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Då är f^{-1} definierad för alla $y \in V_f$, för om $y \in V_f$ så finns (pga. definitionen av V_f och att f antas vara injektiv på I) exakt ett $x \in I$ sådant att $f(x) = y$.

Exempel. Om $f(x) = \sin x$ så är f injektiv på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ och $V_f = \{\sin x : x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\} = [-1, 1]$, så inversen till f (på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) är definierad för alla $x \in [-1, 1]$. Inversen till $\sin x$ (på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) brukar betecknas $\sin^{-1} y$ eller $\arcsin y$; eller $\sin^{-1} x$ eller $\arcsin x$ om man använder variabeln x istället, som vi är vana med.

Inversfunktioners egenskaper

Antag att f är injektiv på intervallet I , så inversen f^{-1} existerar och är definierad på f :s värdemängd $V_f = \{f(x) : x \in I\}$ (för intervallet I).

Inversfunktioners egenskaper

Antag att f är injektiv på intervallet I , så inversen f^{-1} existerar och är definierad på f :s värdemängd $V_f = \{f(x) : x \in I\}$ (för intervallet I).

För alla $x \in I$ gäller att $f^{-1}(f(x)) = x$, för om $y = f(x)$ så $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$ enligt definitionen av f^{-1} .

Inversfunktioners egenskaper

Antag att f är injektiv på intervallet I , så inversen f^{-1} existerar och är definierad på f 's värdemängd $V_f = \{f(x) : x \in I\}$ (för intervallet I).

För alla $x \in I$ gäller att $f^{-1}(f(x)) = x$, för om $y = f(x)$ så $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$ enligt definitionen av f^{-1} .

För alla $y \in V_f$ gäller att $f(f^{-1}(y)) = y$, för om $y \in V_f$ så finns $x \in I$ så att $f(x) = y$, vilket ger $f(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(f(x))) = f(x) = y$.

Inversfunktioners egenskaper

Antag att f är injektiv på intervallet I , så inversen f^{-1} existerar och är definierad på f 's värdemängd $V_f = \{f(x) : x \in I\}$ (för intervallet I).

För alla $x \in I$ gäller att $f^{-1}(f(x)) = x$, för om $y = f(x)$ så $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$ enligt definitionen av f^{-1} .

För alla $y \in V_f$ gäller att $f(f^{-1}(y)) = y$, för om $y \in V_f$ så finns $x \in I$ så att $f(x) = y$, vilket ger $f(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(f(x))) = f(x) = y$.

Exempel. Om $\sin^{-1}$ (som vanligt) betecknar inversen till $\sin$ på intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ så gäller att

$$\sin^{-1}(\sin x) = x, \quad \text{för alla} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

Inversfunktioners egenskaper

Antag att f är injektiv på intervallet I , så inversen f^{-1} existerar och är definierad på f 's värdemängd $V_f = \{f(x) : x \in I\}$ (för intervallet I).

För alla $x \in I$ gäller att $f^{-1}(f(x)) = x$, för om $y = f(x)$ så $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$ enligt definitionen av f^{-1} .

För alla $y \in V_f$ gäller att $f(f^{-1}(y)) = y$, för om $y \in V_f$ så finns $x \in I$ så att $f(x) = y$, vilket ger $f(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(f(x))) = f(x) = y$.

Exempel. Om $\sin^{-1}$ (som vanligt) betecknar inversen till $\sin$ på intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ så gäller att

$$\sin^{-1}(\sin x) = x, \quad \text{för alla } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\text{och } \sin(\sin^{-1} y) = y, \quad \text{för alla } -1 \leq y \leq 1.$$

Inversfunktioner: exempel

Ibland (men oftast inte) kan man finna inversen till en funktion $f(x)$ genom att lösa ut x ur uttrycket som beskriver $f(x)$.

Inversfunktioner: exempel

Ibland (men oftast inte) kan man finna inversen till en funktion $f(x)$ genom att lösa ut x ur uttrycket som beskriver $f(x)$.

Exempel. Låt $f(x) = (x - 1)^5 + 2$.

Inversfunktioner: exempel

Ibland (men oftast inte) kan man finna inversen till en funktion $f(x)$ genom att lösa ut x ur uttrycket som beskriver $f(x)$.

Exempel. Låt $f(x) = (x - 1)^5 + 2$. Då gäller att

$$y = f(x) = (x - 1)^5 + 2$$

$$\iff y - 2 = (x - 1)^5$$

$$\iff (y - 2)^{\frac{1}{5}} = x - 1$$

$$\iff x = (y - 2)^{\frac{1}{5}} + 1,$$

Inversfunktioner: exempel

Ibland (men oftast inte) kan man finna inversen till en funktion $f(x)$ genom att lösa ut x ur uttrycket som beskriver $f(x)$.

Exempel. Låt $f(x) = (x - 1)^5 + 2$. Då gäller att

$$y = f(x) = (x - 1)^5 + 2$$

$$\iff y - 2 = (x - 1)^5$$

$$\iff (y - 2)^{\frac{1}{5}} = x - 1$$

$$\iff x = (y - 2)^{\frac{1}{5}} + 1,$$

$$\text{så } f^{-1}(y) = (y - 2)^{\frac{1}{5}} + 1,$$

Inversfunktioner: exempel

Ibland (men oftast inte) kan man finna inversen till en funktion $f(x)$ genom att lösa ut x ur uttrycket som beskriver $f(x)$.

Exempel. Låt $f(x) = (x - 1)^5 + 2$. Då gäller att

$$\begin{aligned}y &= f(x) = (x - 1)^5 + 2 \\ \iff y - 2 &= (x - 1)^5 \\ \iff (y - 2)^{\frac{1}{5}} &= x - 1 \\ \iff x &= (y - 2)^{\frac{1}{5}} + 1,\end{aligned}$$

så $f^{-1}(y) = (y - 2)^{\frac{1}{5}} + 1$,
eller $f^{-1}(x) = (x - 2)^{\frac{1}{5}} + 1$ om vi hellre vill använda variabeln x .

Inversfunktioner: exempel

Ibland (men oftast inte) kan man finna inversen till en funktion $f(x)$ genom att lösa ut x ur uttrycket som beskriver $f(x)$.

Exempel. Låt $f(x) = (x - 1)^5 + 2$. Då gäller att

$$\begin{aligned}y &= f(x) = (x - 1)^5 + 2 \\ \iff y - 2 &= (x - 1)^5 \\ \iff (y - 2)^{\frac{1}{5}} &= x - 1 \\ \iff x &= (y - 2)^{\frac{1}{5}} + 1,\end{aligned}$$

så $f^{-1}(y) = (y - 2)^{\frac{1}{5}} + 1$,
eller $f^{-1}(x) = (x - 2)^{\frac{1}{5}} + 1$ om vi hellre vill använda variabeln x .
(Man kan nu också kontrollera att $f^{-1}(f(x)) = x$ verkligen gäller.)

Övning 25. Ange så stora intervall som möjligt där följande funktioner är injektiva, och beskriv deras inverser på dessa intervall:

$$x, \quad x^2, \quad x^3, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \frac{1}{1-x}$$

Övning 25. Ange så stora intervall som möjligt där följande funktioner är injektiva, och beskriv deras inverser på dessa intervall:

$$x, \quad x^2, \quad x^3, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \frac{1}{1-x}$$

Övning 26. Förklara, med hjälp av deras definitioner, varför

- (a) $\sin x$ är injektiv på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
- (b) $\cos x$ är injektiv på $[0, \pi]$, och
- (c) $\tan x$ är injektiv på $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Övning 25. Ange så stora intervall som möjligt där följande funktioner är injektiva, och beskriv deras inverser på dessa intervall:

$$x, \quad x^2, \quad x^3, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \frac{1}{1-x}$$

Övning 26. Förklara, med hjälp av deras definitioner, varför

- (a) $\sin x$ är injektiv på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
- (b) $\cos x$ är injektiv på $[0, \pi]$, och
- (c) $\tan x$ är injektiv på $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Inverserna till ovanstående funktioner på respektive intervall betecknas

$$\sin^{-1}, \cos^{-1}, \tan^{-1}, \text{ eller } \arcsin, \arccos, \arctan.$$

Övning 25. Ange så stora intervall som möjligt där följande funktioner är injektiva, och beskriv deras inverser på dessa intervall:

$$x, \quad x^2, \quad x^3, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \frac{1}{1-x}$$

Övning 26. Förklara, med hjälp av deras definitioner, varför

- (a) $\sin x$ är injektiv på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
- (b) $\cos x$ är injektiv på $[0, \pi]$, och
- (c) $\tan x$ är injektiv på $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Inverserna till ovanstående funktioner på respektive intervall betecknas

$$\sin^{-1}, \cos^{-1}, \tan^{-1}, \text{ eller } \arcsin, \arccos, \arctan.$$

Övning 27. Vad är följande gränsvärden?

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+} \tan x, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \tan x.$$

Geometrisk tolkning av inversfunktioner

Antag att f är injektiv på ett intervall I . Ett enkelt samband föreligger mellan kurvan/grafen $y = f(x)$ (för $x \in I$ och $y \in V_f$) och kurvan/grafen $y = f^{-1}(x)$ (för $x \in V_f$ och $y \in I$).

Geometrisk tolkning av inversfunktioner

Antag att f är injektiv på ett intervall I . Ett enkelt samband föreligger mellan kurvan/grafen $y = f(x)$ (för $x \in I$ och $y \in V_f$) och kurvan/grafen $y = f^{-1}(x)$ (för $x \in V_f$ och $y \in I$).

Antag att $a \in I$ och att punkten $(x, y) = (a, b)$ ligger på kurvan $y = f(x)$.

Geometrisk tolkning av inversfunktioner

Antag att f är injektiv på ett intervall I . Ett enkelt samband föreligger mellan kurvan/grafen $y = f(x)$ (för $x \in I$ och $y \in V_f$) och kurvan/grafen $y = f^{-1}(x)$ (för $x \in V_f$ och $y \in I$).

Antag att $a \in I$ och att punkten $(x, y) = (a, b)$ ligger på kurvan $y = f(x)$. Då gäller att $b = f(a)$ och därmed $f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$, så punkten $(x, y) = (b, a) = (b, f^{-1}(b))$ ligger på kurvan $y = f^{-1}(x)$.

Geometrisk tolkning av inversfunktioner

Antag att f är injektiv på ett intervall I . Ett enkelt samband föreligger mellan kurvan/grafen $y = f(x)$ (för $x \in I$ och $y \in V_f$) och kurvan/grafen $y = f^{-1}(x)$ (för $x \in V_f$ och $y \in I$).

Antag att $a \in I$ och att punkten $(x, y) = (a, b)$ ligger på kurvan $y = f(x)$. Då gäller att $b = f(a)$ och därmed $f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$, så punkten $(x, y) = (b, a) = (b, f^{-1}(b))$ ligger på kurvan $y = f^{-1}(x)$. Betrakta linjen mellan (a, b) och (b, a) . Dess lutning är $\frac{b-a}{a-b} = -1$, så den är vinkelrät mot linjen $y = x$, eftersom den senare linjen har lutning 1.

Geometrisk tolkning av inversfunktioner

Antag att f är injektiv på ett intervall I . Ett enkelt samband föreligger mellan kurvan/grafen $y = f(x)$ (för $x \in I$ och $y \in V_f$) och kurvan/grafen $y = f^{-1}(x)$ (för $x \in V_f$ och $y \in I$).

Antag att $a \in I$ och att punkten $(x, y) = (a, b)$ ligger på kurvan $y = f(x)$. Då gäller att $b = f(a)$ och därmed $f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$, så punkten $(x, y) = (b, a) = (b, f^{-1}(b))$ ligger på kurvan $y = f^{-1}(x)$. Betrakta linjen mellan (a, b) och (b, a) . Dess lutning är $\frac{b-a}{a-b} = -1$, så den är vinkelrät mot linjen $y = x$, eftersom den senare linjen har lutning 1. **Sammantaget betyder detta att om varje punkt (a, b) på grafen $y = f(x)$ flyttas till punkten (b, a) – en spegling kring linjen $y = x$ – så får man grafen för $y = f^{-1}(x)$.**

Geometrisk tolkning: exempel

Betrakta $f(x) = x^3$ som är injektiv på hela tallinjen och vars värdemängd också är hela tallinjen.

Geometrisk tolkning: exempel

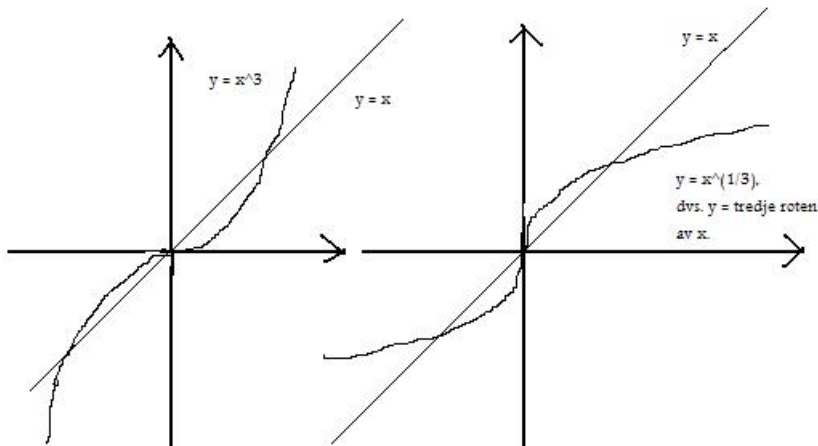
Betrakta $f(x) = x^3$ som är injektiv på hela tallinjen och vars värdemängd också är hela tallinjen. Inversen till f är $f^{-1}(x) = x^{1/3}$.

Geometrisk tolkning: exempel

Betrakta $f(x) = x^3$ som är injektiv på hela tallinjen och vars värdemängd också är hela tallinjen. Inversen till f är $f^{-1}(x) = x^{1/3}$. Om man vet hur grafen $y = f(x)$ ser ut så kan man förstå hur grafen $y = f^{-1}(x)$ ser ut genom att spegla grafen $y = f(x)$ kring linjen $y = x$ (dvs “flytta” varje punkt (a, b) på grafen $y = f(x)$ till punkten (b, a)). På nästa sida görs detta för (en grov skiss av) grafen $y = x^3$.

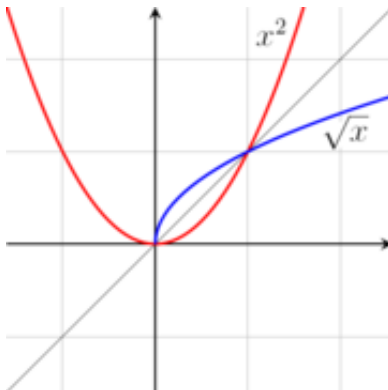
Geometrisk tolkning: exempel

Eftersom skisserna är väldigt grova så måste läsaren själv föreställa sig den perfekta speglingen av grafen $y = x^3$ kring linjen $y = x$.



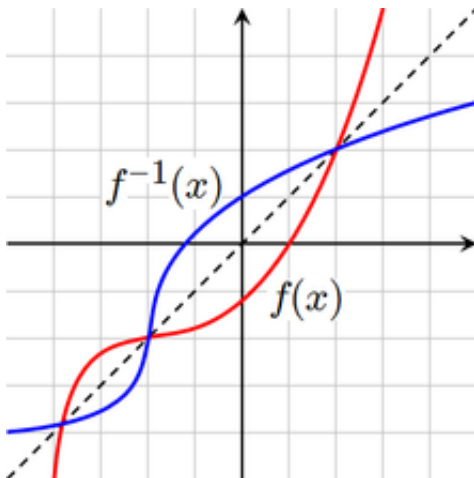
Geometrisk tolkning: exempel

Här skissas grafen till $f(x) = x^2$ och grafen till dess invers $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ på intervallet $[0, \infty)$.



Geometrisk tolkning: exempel

Här skissas grafen till en funktion f (i rött) och grafen till dess invers f^{-1} (i blått).



Övning 28. (a) Skissa graferna till inverserna till funktionerna $\sin$, $\cos$ och $\tan$ på intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. **Obs!** Inversernas domän/definitionsområde kommer vara $[-1, 1]$ för $\sin$ och $\cos$, och hela tallinjen för $\tan$.

(b) Skissa grafen till inversen av $f(x) = 2x - 1$.

(c) På intervallet $(-\infty, 0]$ så är $g(x) = -x^2 + 4$ injektiv. Skissa kurvan $y = g^{-1}(x)$ för $x \leq 2$. (Domänen/definitionsområdet till g^{-1} är $(-\infty, 2]$, eftersom vi i denna uppgift betraktar $(-\infty, 0]$ som f 's domän.)

Derivator av inversfunktioner

Antag att f är injektiv och deriverbar på intervallet I , och antag dessutom att $f'(x) \neq 0$ för alla $x \in I$. För alla $x \in V_f = \{f(a) : a \in I\}$ gäller då att

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Derivator av inversfunktioner

Antag att f är injektiv och deriverbar på intervallet I , och antag dessutom att $f'(x) \neq 0$ för alla $x \in I$. För alla $x \in V_f = \{f(a) : a \in I\}$ gäller då att

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Bevis. Vi vet att om $y = f^{-1}(x)$ så $f(y) = x$. Implicit derivering (m.a.p. x) av sambandet $f(y) = x$ där y betraktas som en funktion av x enligt $y(x) = f^{-1}(x)$ ger $\frac{d}{dx}f(y(x)) = \frac{d}{dx}x$,

Derivator av inversfunktioner

Antag att f är injektiv och deriverbar på intervallet I , och antag dessutom att $f'(x) \neq 0$ för alla $x \in I$. För alla $x \in V_f = \{f(a) : a \in I\}$ gäller då att

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Bevis. Vi vet att om $y = f^{-1}(x)$ så $f(y) = x$. Implicit derivering (m.a.p. x) av sambandet $f(y) = x$ där y betraktas som en funktion av x enligt $y(x) = f^{-1}(x)$ ger $\frac{d}{dx}f(y(x)) = \frac{d}{dx}x$, som i sin tur ger $f'(y(x))y'(x) = 1$,

Derivator av inversfunktioner

Antag att f är injektiv och deriverbar på intervallet I , och antag dessutom att $f'(x) \neq 0$ för alla $x \in I$. För alla $x \in V_f = \{f(a) : a \in I\}$ gäller då att

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Bevis. Vi vet att om $y = f^{-1}(x)$ så $f(y) = x$. Implicit derivering (m.a.p. x) av sambandet $f(y) = x$ där y betraktas som en funktion av x enligt $y(x) = f^{-1}(x)$ ger $\frac{d}{dx}f(y(x)) = \frac{d}{dx}x$, som i sin tur ger $f'(y(x))y'(x) = 1$, vilket slutligen ger

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{d}{dx}y(x) = y'(x) = \frac{1}{f'(y(x))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Derivator av trigonometriska inversfunktioner

Vi har följande derivator:

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Bevis av det första sambandet. Låt $f(x) = \sin x$, så (för $-1 \leq x \leq 1$) $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$. Vi har då $f'(x) = \cos x$, så enligt den allmänna regeln från föregående sida så

Bevis av det första sambandet. Låt $f(x) = \sin x$, så (för $-1 \leq x \leq 1$) $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$. Vi har då $f'(x) = \cos x$, så enligt den allmänna regeln från föregående sida så

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \sin^{-1} x &= \frac{1}{f'(\sin^{-1} x)} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} \\&= \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\sin^{-1} x)}} \\&= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)}} \quad (\text{pga. } \sin^2 u + \cos^2 u = 1) \\&= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (\text{eftersom } \sin(\sin^{-1} x) = x).\end{aligned}$$

Bevis av det sista sambandet. Låt $f(x) = \tan x$, så $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$ och $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ (enligt en av möjligheterna att beskriva derivatan av $\tan x$).

Bevis av det sista sambandet. Låt $f(x) = \tan x$, så $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$ och $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ (enligt en av möjligheterna att beskriva derivatan av $\tan x$). Med hjälp av det allmänna sambandet får vi

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1 + \tan^2(\tan^{-1} x)} = \frac{1}{1 + x^2},$$

eftersom $\tan(\tan^{-1} x) = x$.

Bevis av det sista sambandet. Låt $f(x) = \tan x$, så $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$ och $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ (enligt en av möjligheterna att beskriva derivatan av $\tan x$). Med hjälp av det allmänna sambandet får vi

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1 + \tan^2(\tan^{-1} x)} = \frac{1}{1 + x^2},$$

eftersom $\tan(\tan^{-1} x) = x$.

Övning 29. Bevisa att $\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exponentialfunktionen: heltalsexponenter

Antag att a är ett positivt reellt tal.

Exponentialfunktionen: heltalsexponenter

Antag att a är ett positivt reellt tal.

För varje positivt heltal n , så

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ gånger}},$$

och $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Vi bestämmer också att $a^0 = 1$.

Exponentialfunktioner: heltalsexponenter

Antag att a är ett positivt reellt tal.

För varje positivt heltal n , så

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ gånger}},$$

och $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Vi bestämmer också att $a^0 = 1$.

Från dessa definitioner är det inte svårt att övertyga sig om att följande räkneregler gäller så länge x är ett heltal.

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad (a^x)^y = a^{xy},$$

$$a > 1, x > y \implies a^x > a^y > 0,$$

$$a < 1, x > y \implies 0 < a^x < a^y.$$

Exponentialfunktionen: rationella exponenter

Antag att $a \geq 0$. **För varje heltal n så definierar vi $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ till att vara det tal b som uppfyller att $b^n = a$.**

Exponentialfunktionen: rationella exponenter

Antag att $a \geq 0$. **För varje heltal n så definierar vi $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ till att vara det tal b som uppfyller att $b^n = a$.**

Hur vet vi att ett sådant b finns?

Exponentialfunktionen: rationella exponenter

Antag att $a \geq 0$. **För varje heltal n så definierar vi $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ till att vara det tal b som uppfyller att $b^n = a$.**

Hur vet vi att ett sådant b finns? Sådär, till exempel: Funktionen $f(x) = x^n$ är växande på $[0, \infty)$ och därmed injektiv på $[0, \infty)$. Dessutom är x^n kontinuerlig och antar godtyckligt stora värden, så $\{x^n : x \geq 0\} = [0, \infty)$ (med hjälp av satsen om mellanliggande värden).

Exponentialfunktioner: rationella exponenter

Antag att $a \geq 0$. **För varje heltal n så definierar vi $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ till att vara det tal b som uppfyller att $b^n = a$.**

Hur vet vi att ett sådant b finns? Sådär, till exempel: Funktionen $f(x) = x^n$ är växande på $[0, \infty)$ och därmed injektiv på $[0, \infty)$. Dessutom är x^n kontinuerlig och antar godtyckligt stora värden, så $\{x^n : x \geq 0\} = [0, \infty)$ (med hjälp av satsen om mellanliggande värden). Därför existerar inversen f^{-1} till $f(x) = x^n$ (begränsad till $[0, \infty)$), och $f^{-1}(x)$ är definierad på hela $[0, \infty)$ och dess värdemängd är också $[0, \infty)$.

Exponentialfunktioner: rationella exponenter

Antag att $a \geq 0$. **För varje heltal n så definierar vi $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ till att vara det tal b som uppfyller att $b^n = a$.**

Hur vet vi att ett sådant b finns? Sådär, till exempel: Funktionen $f(x) = x^n$ är växande på $[0, \infty)$ och därmed injektiv på $[0, \infty)$. Dessutom är x^n kontinuerlig och antar godtyckligt stora värden, så $\{x^n : x \geq 0\} = [0, \infty)$ (med hjälp av satsen om mellanliggande värden). Därför existerar inversen f^{-1} till $f(x) = x^n$ (begränsad till $[0, \infty)$), och $f^{-1}(x)$ är definierad på hela $[0, \infty)$ och dess värdemängd är också $[0, \infty)$. Om $a \geq 0$ så tillhör a domänen/definitionsområdet till f^{-1} så låt $b = f^{-1}(a)$ och vi får $b^n = f(b) = f(f^{-1}(a)) = a$.

Exponentialfunktioner: rationella exponenter

Antag att $a > 0$. **För varje rationellt tal $\frac{p}{q}$ (där p, q är heltal) så definierar vi**

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Exponentialfunktioner: rationella exponenter

Antag att $a > 0$. **För varje rationellt tal $\frac{p}{q}$ (där p, q är heltal) så definierar vi**

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Genom att använda räkneregler för heltalsexponenter och ovanstående definition så kan man visa att samma räkneregler gäller för alla rationella exponenter.

Antag att $a > 0$. **För varje rationellt tal $\frac{p}{q}$ (där p, q är heltal) så definierar vi**

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Genom att använda räknereglerna för heltalsexponenter och ovanstående definition så kan man visa att samma räkneregler gäller för alla rationella exponenter.

Men vad betyder a^x om x är irrationellt? Vad betyder a^π , exempelvis?

Exponentialfunktioner: rationella exponenter

Antag att $a > 0$. **För varje rationellt tal $\frac{p}{q}$ (där p, q är heltal) så definierar vi**

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Genom att använda räknereglerna för heltalsexponenter och ovanstående definition så kan man visa att samma räkneregler gäller för alla rationella exponenter.

Men vad betyder a^x om x är irrationellt? Vad betyder a^π , exempelvis? Definitionen av a^x för alla reella x kräver mer arbete.

Exponentialfunktioner: reella exponenter

Antag att $a > 1$, vilket är den vanligaste situationen. Men huvudresultaten gäller även för $0 < a < 1$ och kan visas på liknande sätt.

Exponentialfunktioner: reella exponenter

Antag att $a > 1$, vilket är den vanligaste situationen. Men huvudresultaten gäller även för $0 < a < 1$ och kan visas på liknande sätt. Vi kommer använda följande:

Exponentialfunktioner: reella exponenter

Antag att $a > 1$, vilket är den vanligaste situationen. Men huvudresultaten gäller även för $0 < a < 1$ och kan visas på liknande sätt. Vi kommer använda följande:

Hjälpsats: För alla rationella x, y, z sådana att $x < y < z$ så gäller att

$$0 < \frac{a^y - a^x}{y - x} < \frac{a^z - a^x}{z - x}.$$

Exponentialfunktioner: reella exponenter

Antag att $a > 1$, vilket är den vanligaste situationen. Men huvudresultaten gäller även för $0 < a < 1$ och kan visas på liknande sätt. Vi kommer använda följande:

Hjälpsats: För alla rationella x, y, z sådana att $x < y < z$ så gäller att

$$0 < \frac{a^y - a^x}{y - x} < \frac{a^z - a^x}{z - x}.$$

Ovanstående visas i slutet av denna text.

Exponentialfunktioner: reella exponenter

Antag att $a > 1$, vilket är den vanligaste situationen. Men huvudresultaten gäller även för $0 < a < 1$ och kan visas på liknande sätt. Vi kommer använda följande:

Hjälpsats: För alla rationella x, y, z sådana att $x < y < z$ så gäller att

$$0 < \frac{a^y - a^x}{y - x} < \frac{a^z - a^x}{z - x}.$$

Ovanstående visas i slutet av denna text.

Antag nu att α är ett reellt tal (vilket som helst).

Exponentialfunktioner: reella exponenter

Antag att $a > 1$, vilket är den vanligaste situationen. Men huvudresultaten gäller även för $0 < a < 1$ och kan visas på liknande sätt. Vi kommer använda följande:

Hjälpsats: För alla rationella x, y, z sådana att $x < y < z$ så gäller att

$$0 < \frac{a^y - a^x}{y - x} < \frac{a^z - a^x}{z - x}.$$

Ovanstående visas i slutet av denna text.

Antag nu att α är ett reellt tal (vilket som helst).

Pga. den *fundamentala egenskapen hos de rationella talen* (från föreläsning 1–3) så finns rationella tal $p_n, q_n, n = 1, 2, 3, \dots$ sådana att

$$p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots < \alpha < \dots < q_n < \dots < q_2 < q_1$$

och $q_n - p_n \leq \frac{1}{2^n}$ för alla n , så $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \alpha$.

Exponentialfunktioner: reella exponenter

Enligt hjälpsatsen, tillämpad ett par gånger, så

$$0 < \frac{a^{q_n} - a^{p_n}}{q_n - p_n} < \frac{a^{q_1} - a^{p_n}}{q_1 - p_n} < \frac{a^{q_1} - a^{q_2}}{q_1 - q_2}.$$

Exponentialfunktioner: reella exponenter

Enligt hjälpsatsen, tillämpad ett par gånger, så

$$0 < \frac{a^{q_n} - a^{p_n}}{q_n - p_n} < \frac{a^{q_1} - a^{p_n}}{q_1 - p_n} < \frac{a^{q_1} - a^{q_2}}{q_1 - q_2}.$$

Om vi låter $K = \frac{a^{q_1} - a^{q_2}}{q_1 - q_2}$ (som inte beror på n), så får vi

$$0 < a^{q_n} - a^{p_n} < K(q_n - p_n) \leq \frac{K}{2^n},$$

Exponentialfunktioner: reella exponenter

Enligt hjälpsatsen, tillämpad ett par gånger, så

$$0 < \frac{a^{q_n} - a^{p_n}}{q_n - p_n} < \frac{a^{q_1} - a^{p_n}}{q_1 - p_n} < \frac{a^{q_1} - a^{q_2}}{q_1 - q_2}.$$

Om vi låter $K = \frac{a^{q_1} - a^{q_2}}{q_1 - q_2}$ (som inte beror på n), så får vi

$$0 < a^{q_n} - a^{p_n} < K(q_n - p_n) \leq \frac{K}{2^n},$$

vilket innebär att det finns **ett unikt** reellt tal ξ (som beror på α) sådant att

$$a^{q_n} < \xi < a^{p_n} \quad \text{för alla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Exponentialfunktioner: reella exponenter

Enligt hjälpsatsen, tillämpad ett par gånger, så

$$0 < \frac{a^{q_n} - a^{p_n}}{q_n - p_n} < \frac{a^{q_1} - a^{p_n}}{q_1 - p_n} < \frac{a^{q_1} - a^{q_2}}{q_1 - q_2}.$$

Om vi låter $K = \frac{a^{q_1} - a^{q_2}}{q_1 - q_2}$ (som inte beror på n), så får vi

$$0 < a^{q_n} - a^{p_n} < K(q_n - p_n) \leq \frac{K}{2^n},$$

vilket innebär att det finns **ett unikt** reellt tal ξ (som beror på α) sådant att

$$a^{q_n} < \xi < a^{p_n} \quad \text{för alla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Vi definierar a^α till att vara talet ξ .

Exponentialfunktioner: reella exponenter

Enligt hjälpsatsen, tillämpad ett par gånger, så

$$0 < \frac{a^{q_n} - a^{p_n}}{q_n - p_n} < \frac{a^{q_1} - a^{p_n}}{q_1 - p_n} < \frac{a^{q_1} - a^{q_2}}{q_1 - q_2}.$$

Om vi låter $K = \frac{a^{q_1} - a^{q_2}}{q_1 - q_2}$ (som inte beror på n), så får vi

$$0 < a^{q_n} - a^{p_n} < K(q_n - p_n) \leq \frac{K}{2^n},$$

vilket innebär att det finns **ett unikt** reellt tal ξ (som beror på α) sådant att

$$a^{q_n} < \xi < a^{p_n} \quad \text{för alla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Vi definierar a^α till att vara talet ξ .

Med denna definition, för varje reellt $x = \alpha$, så blir $f(x) = a^x$ en **kontinuerlig funktion** på $(-\infty, \infty)$ (men jag hoppar över detaljerna),

Exponentialfunktioner: reella exponenter

Enligt hjälpsatsen, tillämpad ett par gånger, så

$$0 < \frac{a^{q_n} - a^{p_n}}{q_n - p_n} < \frac{a^{q_1} - a^{p_n}}{q_1 - p_n} < \frac{a^{q_1} - a^{q_2}}{q_1 - q_2}.$$

Om vi låter $K = \frac{a^{q_1} - a^{q_2}}{q_1 - q_2}$ (som inte beror på n), så får vi

$$0 < a^{q_n} - a^{p_n} < K(q_n - p_n) \leq \frac{K}{2^n},$$

vilket innebär att det finns **ett unikt** reellt tal ξ (som beror på α) sådant att

$$a^{q_n} < \xi < a^{p_n} \quad \text{för alla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Vi definierar a^α till att vara talet ξ .

Med denna definition, för varje reellt $x = \alpha$, så blir $f(x) = a^x$ en **kontinuerlig funktion** på $(-\infty, \infty)$ (men jag hoppar över detaljerna), *och det går inte att definiera a^x på något annat sätt om man vill få en kontinuerlig funktion som sammanfaller med a^x så som den är definierad för rationella x .*

Exponentialfunktioner: reella exponenter

När a^x är definierad som ovan för alla reella exponenter så gäller de tidigare nämnda räknereglererna för alla reella x och y (vilket kan visas med viss möda genom att använda definitionen).

Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ har en invers

Notera att $a > 1$ och $h > 0$ medför att $a^h > 1$ och $a^{x+h} = a^x a^h > a^x$.

Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ har en invers

Notera att $a > 1$ och $h > 0$ medför att $a^h > 1$ och $a^{x+h} = a^x a^h > a^x$. Från detta följer att $f(x) = a^x$ är en **växande funktion**, och därmed injektiv, på hela $\mathbb{R}$.

Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ har en invers

Notera att $a > 1$ och $h > 0$ medför att $a^h > 1$ och $a^{x+h} = a^x a^h > a^x$. Från detta följer att $f(x) = a^x$ är en **växande funktion**, och därmed injektiv, på hela $\mathbb{R}$. Därmed har $f(x) = a^x$ en invers $f^{-1}(x)$ som är definierad för alla $x \in \{a^x : x \in \mathbb{R}\} = (0, \infty)$.

Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ har en invers

Notera att $a > 1$ och $h > 0$ medför att $a^h > 1$ och $a^{x+h} = a^x a^h > a^x$. Från detta följer att $f(x) = a^x$ är en **växande funktion**, och därmed injektiv, på hela $\mathbb{R}$. Därmed har $f(x) = a^x$ en invers $f^{-1}(x)$ som är definierad för alla $x \in \{a^x : x \in \mathbb{R}\} = (0, \infty)$.

Inversen $f^{-1}(x)$ **till** $f(x) = a^x$ **betecknas** $\log_a x$ (dvs. om $f(x) = a^x$ så $f^{-1}(x) = \log_a x$), och kallas **logaritmen av x i basen a** .

Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ har en invers

Notera att $a > 1$ och $h > 0$ medför att $a^h > 1$ och $a^{x+h} = a^x a^h > a^x$. Från detta följer att $f(x) = a^x$ är en **växande funktion**, och därmed injektiv, på hela $\mathbb{R}$. Därmed har $f(x) = a^x$ en invers $f^{-1}(x)$ som är definierad för alla $x \in \{a^x : x \in \mathbb{R}\} = (0, \infty)$.

Inversen $f^{-1}(x)$ **till** $f(x) = a^x$ **betecknas** $\log_a x$ (dvs. om $f(x) = a^x$ så $f^{-1}(x) = \log_a x$), och kallas **logaritmen av x i basen a** .

Om $0 < a < 1$ så är $f(x) = a^x$ avtagande på hela $\mathbb{R}$ och har då också en invers som betecknas $\log_a x$. (Detta kan visas på liknande sätt som då $a > 1$.)

Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ har en invers

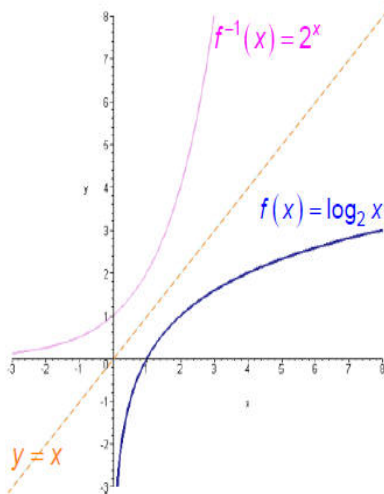
Notera att $a > 1$ och $h > 0$ medför att $a^h > 1$ och $a^{x+h} = a^x a^h > a^x$. Från detta följer att $f(x) = a^x$ är en **växande funktion**, och därmed injektiv, på hela $\mathbb{R}$. Därmed har $f(x) = a^x$ en invers $f^{-1}(x)$ som är definierad för alla $x \in \{a^x : x \in \mathbb{R}\} = (0, \infty)$.

Inversen $f^{-1}(x)$ **till** $f(x) = a^x$ **betecknas** $\log_a x$ (dvs. om $f(x) = a^x$ så $f^{-1}(x) = \log_a x$), och kallas **logaritmen av x i basen a** .

Om $0 < a < 1$ så är $f(x) = a^x$ avtagande på hela $\mathbb{R}$ och har då också en invers som betecknas $\log_a x$. (Detta kan visas på liknande sätt som då $a > 1$.) Om $a = 1$ så är $f(x) = a^x$ konstant, och saknar invers.

Grafer till exponential- och logaritmfunktioner

Nedan tas $f(x) = \log_2 x$ som utgångsfunktionen, och då är $f^{-1}(x) = 2^x$ dess invers.



Exponentialfunktioner är deriverbara

Antag att $a > 1$. (Liknande resonemang funkar om $0 < a < 1$.)

Man kan bevisa, genom användning av definitionen av a^x , att, **för alla reella** $x < y < z$ **så**

$$0 < \frac{a^y - a^x}{y - x} < \frac{a^z - a^x}{z - x}.$$

Exponentialfunktioner är deriverbara

Antag att $a > 1$. (Liknande resonemang funkar om $0 < a < 1$.)

Man kan bevisa, genom användning av definitionen av a^x , att, **för alla reella** $x < y < z$ **så**

$$0 < \frac{a^y - a^x}{y - x} < \frac{a^z - a^x}{z - x}.$$

Man kan uttrycka ovanstående genom att säga att funktionen $f(x) = a^x$ är **konvex**.

Speciellt har vi för alla $0 < h < k$ att

$$0 < \frac{a^{x+h} - a^x}{h} < \frac{a^{x+k} - a^x}{k},$$

Exponentialfunktioner är deriverbara

Antag att $a > 1$. (Liknande resonemang funkar om $0 < a < 1$.)

Man kan bevisa, genom användning av definitionen av a^x , att, **för alla reella** $x < y < z$ **så**

$$0 < \frac{a^y - a^x}{y - x} < \frac{a^z - a^x}{z - x}.$$

Man kan uttrycka ovanstående genom att säga att funktionen $f(x) = a^x$ är **konvex**.

Speciellt har vi för alla $0 < h < k$ att

$$0 < \frac{a^{x+h} - a^x}{h} < \frac{a^{x+k} - a^x}{k},$$

så funktionen $g(h) = \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$ är avtagande på $(0, 1)$ och alltid större än 0,

Exponentialfunktioner är deriverbara

Antag att $a > 1$. (Liknande resonemang funkar om $0 < a < 1$.)

Man kan bevisa, genom användning av definitionen av a^x , att, **för alla reella** $x < y < z$ **så**

$$0 < \frac{a^y - a^x}{y - x} < \frac{a^z - a^x}{z - x}.$$

Man kan uttrycka ovanstående genom att säga att funktionen $f(x) = a^x$ är **konvex**.

Speciellt har vi för alla $0 < h < k$ att

$$0 < \frac{a^{x+h} - a^x}{h} < \frac{a^{x+k} - a^x}{k},$$

så funktionen $g(h) = \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$ är avtagande på $(0, 1)$ och alltid större än 0, vilket medför att $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$ existerar som reellt tal. (Eftersom noll är en undre gräns till mängden $\{g(h) : 0 < h < 1\}$, så finns en största undre gräns till den mängden; och den största undre gränsen är gränsvärdet.)

Exponentialfunktioner är deriverbara

På liknande sätt kan man visa att $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$ existerar.

Exponentialfunktioner är deriverbara

På liknande sätt kan man visa att $\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$ existerar. För att visa att $f(x) = a^x$ är deriverbar behöver vi nu bara visa att

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}.$$

Exponentialfunktioner är deriverbara

På liknande sätt kan man visa att $\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$ existerar. För att visa att $f(x) = a^x$ är deriverbar behöver vi nu bara visa att

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}.$$

Detta kan göras så här, med substitutionen $k = -h$:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0-} \frac{a^{x+k} - a^x}{k} &= a^x \lim_{k \rightarrow 0-} \frac{a^k - 1}{k} \\ &= a^x \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{a^{-h} - 1}{-h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{a^h - 1}{h} \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0+} a^{-h}}_{=a^0=1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}. \end{aligned}$$

Derivatan av exponentialfunktioner

Ovanstående resonemang fungerar för alla $x \in \mathbb{R}$, så speciellt för $x = 0$, vilket innebär att $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = C_a$ för någon konstant C_a , som beror på a .

Derivatan av exponentialfunktioner

Ovanstående resonemang fungerar för alla $x \in \mathbb{R}$, så speciellt för $x = 0$, vilket innebär att $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = C_a$ för någon konstant C_a , som beror på a .

Derivering av $f(x) = a^x$ ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} \\ &= a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = C_a a^x. \end{aligned}$$

Talet 'e'

Vi undersöker nu konstanten $C_a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$.

Talet 'e'

Vi undersöker nu konstanten $C_a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$.

Substitutionen $a^h - 1 = s$ är ekvivalent med $h = \log_a(1 + s)$ (om $s > -1$), och eftersom $h \rightarrow 0$ medför $s = a^h - 1 \rightarrow 0$, så får vi

$$\begin{aligned} C_a &= \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{\log_a(1 + s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{s} \log_a(1 + s)} \\ &= \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{s} \log_a(1 + s) \right)} = \frac{1}{\log_a \left(\lim_{s \rightarrow 0} (1 + s)^{1/s} \right)}, \end{aligned}$$

Talet 'e'

Vi undersöker nu konstanten $C_a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$.

Substitutionen $a^h - 1 = s$ är ekvivalent med $h = \log_a(1 + s)$ (om $s > -1$), och eftersom $h \rightarrow 0$ medför $s = a^h - 1 \rightarrow 0$, så får vi

$$\begin{aligned} C_a &= \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{\log_a(1 + s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{s} \log_a(1 + s)} \\ &= \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{s} \log_a(1 + s) \right)} = \frac{1}{\log_a \left(\lim_{s \rightarrow 0} (1 + s)^{1/s} \right)}, \end{aligned}$$

där vi i sista steget använde att $\log_a x$ är *kontinuerlig*, vilket är en följd av att $\log_a x$ är inversen till a^x som är kontinuerlig.

Talet 'e'

Vi undersöker nu konstanten $C_a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$.

Substitutionen $a^h - 1 = s$ är ekvivalent med $h = \log_a(1 + s)$ (om $s > -1$), och eftersom $h \rightarrow 0$ medför $s = a^h - 1 \rightarrow 0$, så får vi

$$\begin{aligned} C_a &= \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{\log_a(1 + s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{s} \log_a(1 + s)} \\ &= \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{s} \log_a(1 + s) \right)} = \frac{1}{\log_a \left(\lim_{s \rightarrow 0} (1 + s)^{1/s} \right)}, \end{aligned}$$

där vi i sista steget använde att $\log_a x$ är *kontinuerlig*, vilket är en följd av att $\log_a x$ är inversen till a^x som är kontinuerlig.

Pga av att vi har likheter ovan och C_a är ett reellt tal så existerar $\lim_{s \rightarrow 0} (1 + s)^{1/s}$ som ett reellt tal.

Talet 'e'

Vi undersöker nu konstanten $C_a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$.

Substitutionen $a^h - 1 = s$ är ekvivalent med $h = \log_a(1 + s)$ (om $s > -1$), och eftersom $h \rightarrow 0$ medför $s = a^h - 1 \rightarrow 0$, så får vi

$$\begin{aligned} C_a &= \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{\log_a(1 + s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{s} \log_a(1 + s)} \\ &= \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{s} \log_a(1 + s) \right)} = \frac{1}{\log_a \left(\lim_{s \rightarrow 0} (1 + s)^{1/s} \right)}, \end{aligned}$$

där vi i sista steget använde att $\log_a x$ är *kontinuerlig*, vilket är en följd av att $\log_a x$ är inversen till a^x som är kontinuerlig.

Pga av att vi har likheter ovan och C_a är ett reellt tal så existerar $\lim_{s \rightarrow 0} (1 + s)^{1/s}$ som ett reellt tal. **Detta tal kallas/betecknas 'e'**, och vi har

$$e = \lim_{s \rightarrow 0} (1 + s)^{1/s} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t.$$

Derivatan av e^x och den naturliga logaritmen

Vi har tidigare funnit att $\frac{d}{dx} a^x = C_a a^x$, och föregående sidas resultat medför att $C_a = \frac{1}{\log_a(e)}$, så

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{a^x}{\log_a(e)}.$$

Derivatan av e^x och den naturliga logaritmen

Vi har tidigare funnit att $\frac{d}{dx} a^x = C_a a^x$, och föregående sidas resultat medför att $C_a = \frac{1}{\log_a(e)}$, så

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{a^x}{\log_a(e)}.$$

Eftersom $\log_a x$ är inversen till a^x så gäller $\log_a(a^x) = x$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Derivatan av e^x och den naturliga logaritmen

Vi har tidigare funnit att $\frac{d}{dx} a^x = C_a a^x$, och föregående sidas resultat medför att $C_a = \frac{1}{\log_a(e)}$, så

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{a^x}{\log_a(e)}.$$

Eftersom $\log_a x$ är inversen till a^x så gäller $\log_a(a^x) = x$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

För $a = e$ och $x = 1$ så får vi $C_e = \frac{1}{\log_e(e)} = \frac{1}{\log_e(e^1)}$, och

$$\frac{d}{dx} e^x = C_e e^x = \frac{e^x}{\log_e(e^1)} = e^x,$$

så derivatan av e^x är alltså e^x , vilket gör deriveringar i basen e enklare.

Derivatan av e^x och den naturliga logaritmen

Vi har tidigare funnit att $\frac{d}{dx} a^x = C_a a^x$, och föregående sidas resultat medför att $C_a = \frac{1}{\log_a(e)}$, så

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{a^x}{\log_a(e)}.$$

Eftersom $\log_a x$ är inversen till a^x så gäller $\log_a(a^x) = x$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

För $a = e$ och $x = 1$ så får vi $C_e = \frac{1}{\log_e(e)} = \frac{1}{\log_e(e^1)}$, och

$$\frac{d}{dx} e^x = C_e e^x = \frac{e^x}{\log_e(e^1)} = e^x,$$

så derivatan av e^x är alltså e^x , vilket gör deriveringar i basen e enklare.

Logaritmen i basen e , $\log_e x$, kallas också för den **naturliga logaritmen** och betecknas även $\ln x$.

Derivatan av $\log_a x$

Kom ihåg deriveringsregeln för inversfunktioner:

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Derivatan av $\log_a x$

Kom ihåg deriveringsregeln för inversfunktioner:

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Eftersom $\frac{d}{dx} a^x = \frac{a^x}{\log_a(e)}$ och $a^{\log_a x} = x$ så får vi

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{\frac{a^{\log_a x}}{\log_a(e)}} = \frac{\log_a(e)}{a^{\log_a x}} = \frac{\log_a(e)}{x}.$$

Derivatan av $\log_a x$

Kom ihåg deriveringsregeln för inversfunktioner:

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Eftersom $\frac{d}{dx} a^x = \frac{a^x}{\log_a(e)}$ och $a^{\log_a x} = x$ så får vi

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{\frac{a^{\log_a x}}{\log_a(e)}} = \frac{\log_a(e)}{a^{\log_a x}} = \frac{\log_a(e)}{x}.$$

För $a = e$ så förenklas det till

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{\log_e(e)x} = \frac{1}{x}.$$

Derivatan av $\log_a x$

Kom ihåg deriveringsregeln för inversfunktioner:

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Eftersom $\frac{d}{dx} a^x = \frac{a^x}{\log_a(e)}$ och $a^{\log_a x} = x$ så får vi

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{\frac{a^{\log_a x}}{\log_a(e)}} = \frac{\log_a(e)}{a^{\log_a x}} = \frac{\log_a(e)}{x}.$$

För $a = e$ så förenklas det till

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{\log_e(e)x} = \frac{1}{x}.$$

Sammanfattningsvis: För basen e har vi

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \quad \text{och} \quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

Exempel. Med hjälp av exponentialfunktionen e^x och logaritmreglerna så kan man derivera funktionen $f(x) = x^x$. (Metoden kallas ibland 'logaritmisk derivering'.)

Exempel. Med hjälp av exponentialfunktionen e^x och logaritmreglerna så kan man derivera funktionen $f(x) = x^x$. (Metoden kallas ibland 'logaritmisk derivering'.)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} x^x &= \frac{d}{dx} e^{\ln(x^x)} = \frac{d}{dx} e^{x \ln x} \\ &= e^{x \ln x} \frac{d}{dx} (x \ln x) \quad (\text{med kedjeregeln}) \\ &= e^{x \ln x} \left(\ln x + x \frac{1}{x} \right) \quad (\text{med produktregeln}) \\ &= e^{x \ln x} (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1).\end{aligned}$$

Exempel

En bakteriekultur innehåller vid en viss tidpunkt, som vi kan kalla $t = 0$, 10^4 bakterier. Bakteriernas antal fördubblas var tredje dag.

(a) Hur många bakterier finns efter tolv dagar (då $t = 12$)?

(b) Vad är tillväxthastigheten efter tolv dagar.

Exempel

En bakteriekultur innehåller vid en viss tidpunkt, som vi kan kalla $t = 0$, 10^4 bakterier. Bakteriernas antal fördubblas var tredje dag.

(a) Hur många bakterier finns efter tolv dagar (då $t = 12$)?

(b) Vad är tillväxthastigheten efter tolv dagar.

Lösning. Vid tidpunkten t så har bakterierna (ursprungligen 10^4) hunnit fördubbla sig $t/3$ gånger, och varje fördubbling motsvaras av multiplikation med två. Så funktionen som beskriver bakteriernas tillväxt med avseende på tiden har formen

$$f(t) = 10^4 \cdot 2^{\frac{t}{3}} = 10^4 \cdot e^{\frac{t \ln 2}{3}}.$$

(Man kan beskriva funktionen såväl i basen 2 som i basen e .)

Exempel

En bakteriekultur innehåller vid en viss tidpunkt, som vi kan kalla $t = 0$, 10^4 bakterier. Bakteriernas antal fördubblas var tredje dag.

(a) Hur många bakterier finns efter tolv dagar (då $t = 12$)?

(b) Vad är tillväxthastigheten efter tolv dagar.

Lösning. Vid tidpunkten t så har bakterierna (ursprungligen 10^4) hunnit fördubbla sig $t/3$ gånger, och varje fördubbling motsvaras av multiplikation med två. Så funktionen som beskriver bakteriernas tillväxt med avseende på tiden har formen

$$f(t) = 10^4 \cdot 2^{\frac{t}{3}} = 10^4 \cdot e^{\frac{t \ln 2}{3}}.$$

(Man kan beskriva funktionen såväl i basen 2 som i basen e .)

Man får

$$f'(t) = \frac{10^4}{3} \cdot \frac{2^{\frac{t}{3}}}{\log_2(e)} \text{ eller } f'(t) = \frac{10^4 \ln 2}{3} \cdot e^{\frac{t \ln 2}{3}},$$

beroende på vilken uttryck för $f(t)$ som man valde att derivera.

- (a) Den 12e dagen är antalet bakterier $f(12) = 10^4 \cdot 2^4 = 16 \cdot 10^4$.
- (b) Den 12e dagen är tillväxthastigheten $f'(12) = \frac{16 \cdot 10^4}{3 \log_2(e)}$.

Några standardgränsvärden

Följande “standardgränsvärden” uttrycker att vissa funktioner växer eller avtar snabbt (för tillräckligt stora, eller små, x) i förhållande andra funktioner. **Det är viktigt att känna till dem.**

Några standardgränsvärden

Följande “standardgränsvärden” uttrycker att vissa funktioner växer eller avtar snabbt (för tillräckligt stora, eller små, x) i förhållande andra funktioner. **Det är viktigt att känna till dem.**

Om $a > 1$ och $r > 0$ är konstanter, så gäller följande:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^r}{a^x} = 0 \quad \left(\text{så} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^r} = \infty \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^r a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} x^r a^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a x}{x^r} = 0 \quad \left(\text{så} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^r}{\log_a x} = \infty \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \log_a x = 0.$$

Definition. En funktion F som är deriverbar och har egenskapen att $F' = f$ (på något intervall I) kallas för **antiderivata**, eller **primitiv funktion**, till f (på I).

Definition. En funktion F som är deriverbar och har egenskapen att $F' = f$ (på något intervall I) kallas för **antiderivata**, eller **primitiv funktion**, till f (på I).

Exempel. (a) Om $f(x) = 5x^3 - 2x + 4$ så är $F(x) = \frac{5x^4}{4} - x^2 + 4x$ en antiderivata till f .

Definition. En funktion F som är deriverbar och har egenskapen att $F' = f$ (på något intervall I) kallas för **antiderivata**, eller **primitiv funktion**, till f (på I).

Exempel. (a) Om $f(x) = 5x^3 - 2x + 4$ så är

$F(x) = \frac{5x^4}{4} - x^2 + 4x$ en antiderivata till f .

(b) Om $f(x) = \sin x$ så är $F(x) = -\cos x$ en primitiv funktion till f .

Definition. En funktion F som är deriverbar och har egenskapen att $F' = f$ (på något intervall I) kallas för **antiderivata**, eller **primitiv funktion**, till f (på I).

Exempel. (a) Om $f(x) = 5x^3 - 2x + 4$ så är

$F(x) = \frac{5x^4}{4} - x^2 + 4x$ en antiderivata till f .

(b) Om $f(x) = \sin x$ så är $F(x) = -\cos x$ en primitiv funktion till f .

Eftersom konstanter försvinner vid derivering så gäller följande:

Om $F(x)$ är en antiderivata till $f(x)$ och C är en konstant (vilken som helst), så är även $F(x) + C$ en antiderivata till $f(x)$.

Definition. En funktion F som är deriverbar och har egenskapen att $F' = f$ (på något intervall I) kallas för **antiderivata**, eller **primitiv funktion**, till f (på I).

Exempel. (a) Om $f(x) = 5x^3 - 2x + 4$ så är

$F(x) = \frac{5x^4}{4} - x^2 + 4x$ en antiderivata till f .

(b) Om $f(x) = \sin x$ så är $F(x) = -\cos x$ en primitiv funktion till f .

Eftersom konstanter försvinner vid derivering så gäller följande:

Om $F(x)$ är en antiderivata till $f(x)$ och C är en konstant (vilken som helst), så är även $F(x) + C$ en antiderivata till $f(x)$. Exempelvis så är $-\cos x + C$ en antiderivata till $\sin x$, för varje konstant C .

Antiderivator är unika upp till addition med konstant

På grund av “analysens fundamentalsats”, som vi kommer att se senare i kursen (i kapitel 5.5) så gäller följande:

Antiderivator är unika upp till addition med konstant

På grund av “analysens fundamentalsats”, som vi kommer att se senare i kursen (i kapitel 5.5) så gäller följande:

(a) Om f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ så finns en antiderivata F till f på intervallet $[a, b]$.

(b) Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ och F_1 och F_2 är två antiderivator till f på $[a, b]$, så finns en konstant C så att för alla $x \in [a, b]$, $F_2(x) = F_1(x) + C$. (Det kan hända att $C < 0$.)

Antiderivator är unika upp till addition med konstant

På grund av “analysens fundamentalsats”, som vi kommer att se senare i kursen (i kapitel 5.5) så gäller följande:

(a) Om f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ så finns en antiderivata F till f på intervallet $[a, b]$.

(b) Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ och F_1 och F_2 är två antiderivator till f på $[a, b]$, så finns en konstant C så att för alla $x \in [a, b]$, $F_2(x) = F_1(x) + C$. (Det kan hända att $C < 0$.)

Från ovanstående följer (exempelvis) att varje antiderivata till $f(x) = 5x^3 - 2x + 4$ kan skrivas på formen

$F(x) = \frac{5x^4}{4} - x^2 + 4x + C$ för någon konstant C .

Antiderivator: ett exempel

Exempel. Antag att ett objekt rör sig längs x -axeln och att hastigheten vid tidpunkten t ges av $v(t) = t^2 + 2t$. Antag dessutom att objektets position vid tidpunkten $t = 0$ är $x = 1$. Var befinner sig objektet vid tidpunkten $t = 3$?

Antiderivator: ett exempel

Exempel. Antag att ett objekt rör sig längs x -axeln och att hastigheten vid tidpunkten t ges av $v(t) = t^2 + 2t$. Antag dessutom att objektets position vid tidpunkten $t = 0$ är $x = 1$. Var befinner sig objektet vid tidpunkten $t = 3$?

Lösning. Vi vet att om $x(t)$ beskriver objektets position på x -axeln vid tidpunkten t , så gäller $v(t) = x'(t)$.

Antiderivator: ett exempel

Exempel. Antag att ett objekt rör sig längs x -axeln och att hastigheten vid tidpunkten t ges av $v(t) = t^2 + 2t$. Antag dessutom att objektets position vid tidpunkten $t = 0$ är $x = 1$. Var befinner sig objektet vid tidpunkten $t = 3$?

Lösning. Vi vet att om $x(t)$ beskriver objektets position på x -axeln vid tidpunkten t , så gäller $v(t) = x'(t)$. Vi söker alltså en antiderivata till $v(t) = x'(t)$.

Antiderivator: ett exempel

Exempel. Antag att ett objekt rör sig längs x -axeln och att hastigheten vid tidpunkten t ges av $v(t) = t^2 + 2t$. Antag dessutom att objektets position vid tidpunkten $t = 0$ är $x = 1$. Var befinner sig objektet vid tidpunkten $t = 3$?

Lösning. Vi vet att om $x(t)$ beskriver objektets position på x -axeln vid tidpunkten t , så gäller $v(t) = x'(t)$. Vi söker alltså en antiderivata till $v(t) = x'(t)$. Enligt det som sades på föregående sida så har varje antiderivata till $v(t) = x'(t)$ formen $x(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 + C$.

Antiderivator: ett exempel

Exempel. Antag att ett objekt rör sig längs x -axeln och att hastigheten vid tidpunkten t ges av $v(t) = t^2 + 2t$. Antag dessutom att objektets position vid tidpunkten $t = 0$ är $x = 1$. Var befinner sig objektet vid tidpunkten $t = 3$?

Lösning. Vi vet att om $x(t)$ beskriver objektets position på x -axeln vid tidpunkten t , så gäller $v(t) = x'(t)$. Vi söker alltså en antiderivata till $v(t) = x'(t)$. Enligt det som sades på föregående sida så har varje antiderivata till $v(t) = x'(t)$ formen $x(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 + C$. Eftersom objektets position vid $t = 0$ antas vara $x = 1$ så gäller $x(0) = 1$, vilket medför att $C = 1$. Objektets position på x -axeln beskrivs alltså av funktionen $x(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 + 1$.

Antiderivator: ett exempel

Exempel. Antag att ett objekt rör sig längs x -axeln och att hastigheten vid tidpunkten t ges av $v(t) = t^2 + 2t$. Antag dessutom att objektets position vid tidpunkten $t = 0$ är $x = 1$. Var befinner sig objektet vid tidpunkten $t = 3$?

Lösning. Vi vet att om $x(t)$ beskriver objektets position på x -axeln vid tidpunkten t , så gäller $v(t) = x'(t)$. Vi söker alltså en antiderivata till $v(t) = x'(t)$. Enligt det som sades på föregående sida så har varje antiderivata till $v(t) = x'(t)$ formen $x(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 + C$. Eftersom objektets position vid $t = 0$ antas vara $x = 1$ så gäller $x(0) = 1$, vilket medför att $C = 1$. Objektets position på x -axeln beskrivs alltså av funktionen $x(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 + 1$. Vid tiden $t = 3$ befinner sig alltså objektet i punkten $x(3) = 19$ på x -axeln.

Exempel. Antag att en funktion $f(x)$ uppfyller sambandet $xf'(x) = 2$ och att $f(1) = 1$. Beskriv funktionen f .

Exempel. Antag att en funktion $f(x)$ uppfyller sambandet $xf'(x) = 2$ och att $f(1) = 1$. Beskriv funktionen f .

Lösning. Vi har

$$xf'(x) = 2 \implies f'(x) = \frac{2}{x} \implies f(x) = 2 \ln x + C,$$

för någon konstant C . Villkoret $f(1) = 1$ ger nu

$1 = f(1) = 2 \ln 1 + C$, så $C = 1$ (eftersom $\ln 1 = 0$). Detta ger $f(x) = 2 \ln x + 1$.