

Homogena ekvationer

Definition En funktion $f(x, y)$ är homogen av grad n om

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

○ För alla lämpliga x, y och t .

○ Exempel

(a) Låt $f(x, y) = x^p y^q$.

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= (tx)^p (ty)^q = t^{p+q} x^p y^q \\ &= t^{p+q} f(x, y) \end{aligned}$$

○ så f är homogen av grad $p+q$.

○ (b) Låt $g(x, y) = x^2 + xy$.

$$\begin{aligned} g(tx, ty) &= (tx)^2 + (tx)(ty) \\ &= t^2(x^2 + xy) = t^2 g(x, y) \end{aligned}$$

○ så g är homogen av grad 2.

(c) $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ är homogen av grad 1.

(d) $k(x, y) = \sin\left(\frac{x}{y}\right)$ är homogen av grad 0.

Anmärkning $f(x,y)$ är homogen av grad 0
 $\Leftrightarrow f(tx,ty) = f(x,y)$.

Om $f(x,y)$ och $g(x,y)$ är homogena av grad 0 så gäller det samma för $f(x,y) + g(x,y)$.

Definition En ekvation

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

kallas för homogen om $f(x,y)$ är homogen av grad 0.

Betrakta den homogena ekvationen

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Vi visar att (1) alltid kan omvandlas till en separabel eku. genom substitutionen $z = \frac{y}{x}$. Eftersom

$$f(tx,ty) = t^0 f(x,y) = f(x,y)$$

så ger $t = \frac{1}{x}$ att

$$(2) \quad f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(1, z).$$

Eftersom $y = zx$ och

$$\frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}$$

(enligt produktregeln för derivering
eftersom vi tänker oss z som en funktion av x)

så kan (1) (med hjälp av (2)) omvandlas
till

$$(3) \quad z + x \frac{dz}{dx} = f(x, y) = f(1, z)$$

Detta kan skrivas om som

$$(4) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdot (f(1, z) - z)$$

vilket är en separabel ekvation.

Om $z(x)$ är en lösning till (4)

så är $y(x) = z(x) \cdot x$ en lösning
till (1), eftersom vi gjorde substitu-
tionen $z = \frac{y}{x}$.

Exempel Lös ekvationen

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = 2 + \frac{3y}{x}.$$

Denna är inte separabel.

Men 2 och $\frac{3y}{x}$ är homogena av grad 0. Alltså är $f(x,y) = 2 + \frac{3y}{x}$ homogen av grad 0, så ekvationen (1) är homogen.

Sätt $z = \frac{y}{x}$. Eftersom $y = xz$ får vi

$$\frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}.$$

som tillsammans med (1) ger

$$z + x \frac{dz}{dx} = 2 + \frac{3y}{x} = 2 + 3z$$

som medför att

$$(2) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2}{x} \cdot (1+z)$$

vilket är en separabel eku.

Vi löser (2). Vi vet att (2) kan omvandlas till

$$\int \frac{1}{1+z} dz = \int \frac{2}{x} dx + C.$$

Om vi utför integrationerna får vi

$$\log|1+z| = 2 \log|x| + C, \text{ så}$$

$$|1+z| = e^{\log|1+z|} = e^{2 \log|x| + C} = e^C \cdot e^{\log x^2} \\ = e^C x^2.$$

Om vi sätter $D = \pm e^C$ får vi

$$1+z = Dx^2, \text{ så}$$

$$z = Dx^2 - 1 \text{ löser (2).}$$

Eftersom $z = \frac{y}{x}$ så löser

$$y = Dx^3 - x \quad (1).$$

(Dessa är allmänna lösningar av (1) och (2) eftersom våra resonemang visar att varje lös. måste ha samma form som de givna lös.)