Integration av rationella funktioner

En funktion f på formen

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

där $p(x)$ och $q(x)$ är polynom kallas för en rationell funktion.

Somliga rationella funktioner kan vi redan integrera, som tex.:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + C = \arctan x + C,$$

och

$$\int \frac{p'(x)}{p(x)}\,dx = \ln p(x) + C$$

(Notera att den första integralen är ett specialfall av den sista.)

Antag att $p(x)$ och $q(x)$ är polynom med grad n och m, respektive.

Om $n \geq m$ så ger polynomdivision polynom $k(x)$ ("kvoten") och $r(x)$ ("resten") sådana att

$$\frac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \quad \text{och}$$

graden av $r(x) < m =$ graden av $q(x)$.

Så i denna situation ($n \geq m$) får vi

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int k(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}dx$$

där $r(x)$ har lägre grad än $q(x)$.

Eftersom $\int k(x)\,dx$ är lätt att beräkna om $k(x)$ är ett polynom, så koncentrerar vi oss nu på integraler

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx \quad \text{där } p(x) \text{ är ett}$$

polynom med lägre grad än polynomet $q(x)$.

Följande integraler, för konstanter a, b, c behöver man kunna beräkna, eftersom metoden för att beräkna integraler av godtyckliga rationella funktioner använder integralerna nedan:

Övning Beräkna

1) $\int \frac{a}{(x+b)^n}\,dx$ där $n \geq 1$.

2) $\int \frac{a}{(x+b)^2+c}\,dx$ där $c > 0$.

3) $\int \frac{a}{(x+b)^2-c}\,dx$ där $c > 0$.

4) $\int \frac{ax}{(x+b)^2+c}\,dx$ (där c kan vara vad som helst.)

Svar/lösn.

1) Om $n=1$ så $\int \frac{a}{(x+b)^n}\,dx = a\ln(x+b) + C$.

Om $n>1$ så $\int \frac{a}{(x+b)^n}\,dx = -\frac{a}{(n-1)(x+b)^{n-1}} + C$.

2) Antag $c > 0$.

$$\int \frac{a}{(x+b)^2 + c}\,dx = \frac{a}{c}\int \frac{1}{\left(\frac{x+b}{\sqrt{c}}\right)^2 + 1}\,dx$$

$$= \frac{a}{\sqrt{c}} \arctan\left(\frac{x+b}{\sqrt{c}}\right) + C.$$

3) Antag $c > 0$.

$$\int \frac{a}{(x+b)^2 - c}\,dx = a\int \frac{1}{((x+b) - \sqrt{c})((x+b) + \sqrt{c})}\,dx$$

$$= a\int\left(\frac{1}{2\sqrt{c}(x+b-\sqrt{c})} - \frac{1}{2\sqrt{c}(x+b+\sqrt{c})}\right)dx$$

$$= \frac{a}{2\sqrt{c}}\int \frac{1}{x+b-\sqrt{c}}\,dx - \frac{a}{2\sqrt{c}}\int \frac{1}{x+b+\sqrt{c}}\,dx$$

$$= \frac{a}{2\sqrt{c}} \ln(x+b-\sqrt{c}) - \frac{a}{2\sqrt{c}} \ln(x+b+\sqrt{c}) + C$$

$$= \frac{a}{2\sqrt{c}} \ln \frac{x+b-\sqrt{c}}{x+b+\sqrt{c}} + C.$$

(5)

4) $\displaystyle\int \frac{ax}{(x+b)^2+c}\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} t &= (x+b)^2+c \\ \frac{dt}{dx} &= 2x+2b \\ dt &= (2x+2b)\,dx \end{aligned}}$$

i vänstra integralen

$$= \frac{a}{2}\int \frac{2x+2b-2b}{(x+b)^2+c}\,dx =$$

$$= \frac{a}{2}\int \frac{2x+2b}{(x+b)^2+c}\,dx - \frac{a}{2}\int \frac{2b}{(x+b)^2+c}\,dx =$$

$$= \frac{a}{2}\int \frac{1}{t}\,dt - \frac{a}{2}\int \frac{2b}{(x+b)^2+c}\,dx =$$

$$= \frac{a}{2}\ln t - \frac{a}{2}\int \frac{2b}{(x+b)^2+c}\,dx$$

$$= \frac{a}{2}\ln\left((x+b)^2+c\right) - \underbrace{\frac{a}{2}\int \frac{2b}{(x+b)^2+c}\,dx}$$

kan räknas ut som i 1), 2) eller 3) beroende på om $c=0$, $c>0$ eller $c<0$.

Om $b=0$ så förenklas det till

$$\int \frac{ax}{x^2+c}\,dx = \frac{a}{2}\ln(x^2+c) + C.$$

Följande är en konsekvens av "faktoriseringssatsen" för polynom:

Sats Antag att $q(x)$ är ett icke-konstant polynom med reella koefficienter.
Då finns $k, \ell, m_1, \ldots, m_k, n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{N}$
$a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ (där $a_i \neq a_j$ om $i \neq j$) och andragradspolynom $r_1(x), \ldots, r_n(x)$ (där $r_i(x) \neq r_j(x)$ om $i \neq j$) utan reella nollställen sådana att

$$q(x) = (x-a_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_k)^{m_k} \cdot (r_1(x))^{n_1} \cdot \ldots \cdot (r_\ell(x))^{n_\ell}.$$

Exempel Om $q(x) = x^5 - x^4 - x + 1$,
$k = 2$, $\ell = 1$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $n_1 = 1$,
$a_1 = -1$, $a_2 = 1$ och $r_1(x) = x^2 + 1$, så

$$x^5 - x^4 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2(x^2+1)$$
$$= (x-a_1)(x-a_2)^2 r_1(x).$$

Följande sats hjälper oss att integrera rationella funktioner:

Sats (Partialbråksuppdelning)

Antag att $p(x)$ och $q(x)$ är polynom med reella koefficienter och att $p(x)$ har lägre grad än $q(x)$.

Antag dessutom att

$$q(x) = (x-a_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_k)^{m_k} \cdot (r_1(x))^{n_1} \cdot \ldots \cdot (r_\ell(x))^{n_\ell}$$

är en faktorisering som i föregående sats.

Då finns termer $t_1(x), \ldots, t_k(x)$ och $s_1(x), \ldots, s_\ell(x)$ sådana att

(a) $\dfrac{p(x)}{q(x)} = t_1(x) + \ldots + t_k(x) + s_1(x) + \ldots + s_\ell(x)$,

(b) varje term $t_i(x)$ $(i = 1, \ldots, k)$ har formen

$$\frac{A_1}{x-a_i} + \frac{A_2}{(x-a_i)^2} + \ldots + \frac{A_{m_i}}{(x-a_i)^{m_i}}$$

där $A_1, \ldots, A_{m_i}$ är konstanter, och

(c) varje term $s_i(x)$ $(i = 1, \ldots, \ell)$ har formen

$$\frac{B_1 x + C_1}{r_i(x)} + \frac{B_2 x + C_2}{(r_i(x))^2} + \ldots + \frac{B_{n_i} x + C_{n_i}}{(r_i(x))^{n_i}}$$

där $B_1, \ldots, B_{n_i}, C_1, \ldots, C_{n_i}$ är konstanter.

En term på formen $\frac{Bx+C}{r(x)}$ kan skrivas som $\frac{Bx}{r(x)} + \frac{C}{r(x)}$, och om $r(x)$ har grad 2 så kan varje term integreras som i 2), 3) eller 4) ovan.

Varför det? Jo, om $r(x)$ har grad 2 så $r(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma =$

$$= \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

$\boxed{\text{kvadrat-komplettering}}$ $= \alpha\left(\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)$,

och om $b = \frac{\beta}{2\alpha}$, $c = \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2}$ så

$r(x) = \alpha\left((x+b)^2 + c\right)$ vilket ger

$$\int \frac{Bx}{r(x)}\,dx = \frac{1}{\alpha}\int \frac{Bx}{(x+b)^2+c}\,dx \quad \text{och}$$

$$\int \frac{C}{r(x)}\,dx = \frac{1}{\alpha}\int \frac{C}{(x+b)^2+c}\,dx$$

vilket är samma sorts integraler som i 2), 3) eller 4) ovan.

<u>Exempel</u> Beräkna $\int \frac{x^2+2}{x^3-x}\,dx$.

<u>Lösning.</u> Vi faktoriserar först nämnaren

$$x^3-x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1), \text{ så}$$

$$\frac{x^2+2}{x^3-x} = \frac{x^2+2}{x(x-1)(x+1)}.$$

Satsen om partialbråksuppdelning säger att det finns A_1, A_2, A_3 s. a.

$$\frac{x^2+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1}.$$

Högerledet kan skrivas som

$$\frac{A_1(x-1)(x+1) + A_2x(x+1) + A_3x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

så likheten ovan medför att

$$x^2+2 = A_1(x-1)(x+1) + A_2x(x+1) + A_3x(x-1)$$

$\vdots$ omskrivningar

$$= (A_1+A_2+A_3)x^2 + (A_2-A_3)x - A_1.$$

Detta ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 1 \\ \quad\; A_2 - A_3 = 0 \\ \qquad\;\; -A_1 = 2 \end{cases}$$

som har lösningen

$$A_1 = -2\,, \quad A_2 = \frac{3}{2}\,, \quad A_3 = \frac{3}{2}\,.$$

Detta ger

$$\int \frac{x^2+2}{x^3-x}\,dx = \int \frac{x^2+2}{x(x-1)(x+1)}\,dx =$$

$$\int \left(-\frac{2}{x} + \frac{3}{2(x-1)} + \frac{3}{2(x+1)} \right) dx =$$

$$-2\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$-2\ln x + \frac{3}{2}\ln(x-1) + \frac{3}{2}\ln(x+1) + C =$$

$$\frac{3}{2}\ln(x^2-1) - 2\ln x + C\,.$$

För att få ekvationssystemet ovan, så använde vi faktumet att om $\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \ldots, \beta_n$ är konstanter och $\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_n x^n$ för alla x i ett intervall $[a,b]$ (där $a<b$), så $\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$.

<u>Exempel</u> Beräkna $\int \frac{x^2-x+2}{x(x^2+1)}\,dx$.

<u>Lösning.</u> Lägg märke till att x^2+1 har grad 2 och saknar reella nollställen (dvs. $x^2+1=0$ saknar reella rötter).

Enligt satsen om partialbråksuppdelning så finns konstanter A, B, C så att

$$\frac{x^2-x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Högerledet kan skrivas som

$$\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)}$$ och likheten ovan ger

$$\begin{aligned} x^2-x+2 &= A(x^2+1)+(Bx+C)x \\ &= (A+B)x^2+Cx+A. \end{aligned}$$

Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} A+B=1 \\ C=-1 \\ A=2 \end{cases}$$

som har lösningen $A=2$, $B=-1$, $C=-1$.

Vi får nu

$$\int \frac{x^2-x+2}{x(x^2+1)}\,dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{-x-1}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \int \frac{2}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= 2\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x + D.$$

<u>Exempel</u> Beräkna $\int \frac{x^3}{x^3-1}\,dx$.

Observera att täljare och nämnare har samma grad, så vi dividerar x^3 med x^3-1.

$$\begin{array}{r|l} & \;1 \quad \leftarrow \text{kvot} \\ \hline x^3-1 & \;x^3 \\ & \;\underline{x^3-1} \\ & \quad\;\, 1 \quad \leftarrow \text{rest} \end{array}$$

Det följer att $x^3 = 1\cdot(x^3-1)+1$ (vilket man ser direkt i detta enkla fall)

så $\frac{x^3}{x^3-1} = 1 + \frac{1}{x^3-1}$.

Vi faktoriserar nu x^3-1. Man ser att $x=1$ är en rot till $x^3-1=0$.

Vi dividerar därför x^3-1 med $x-1$:

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+x+1 \leftarrow \text{kvot} \\
\hline
x-1 & x^3-1 \\
 & \underline{x^3-x^2} \\
 & x^2-1 \\
 & \underline{x^2-x} \\
 & x-1 \\
 & \underline{x-1} \\
 & 0 \leftarrow \text{rest}
\end{array}$$

Vi ser att $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$.
Med hjälp av "p-q-formeln", exempelvis, ser man också att $x^2+x+1=0$ saknar reella rötter. Satsen om partialbråksuppdelning säger att det finns konstanter A, B, C så att

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Högerledet kan skrivas som

$$\frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)},$$

så likheten ovan ger

$$1 = A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1) =$$

$$= Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

$$= (A+B)x^2 + (A-B+C)x + (A-C).$$

Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ A-B+C = 0 \\ A-C = 1 \end{cases}$$

som har lösningen $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = -\frac{2}{3}$.

Sammantaget så har vi

$$\frac{x^3}{x^3-1} = 1 + \frac{1}{x^3-1} = 1 + \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{3(x-1)} + \frac{-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{x^2+x+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x}{3(x^2+x+1)} - \frac{2}{3(x^2+x+1)}$$

$\boxed{\text{kvadrat kompl.}}$

$$= 1 + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x}{3\left((x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right)}$$

$$- \frac{2}{3\left((x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right)}.$$

Integration ger nu (som i punkterna 1) – 4))

$$\int \frac{x^3}{x^3-1}\,dx = \int 1\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx -$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{x}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx - \frac{2}{3}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$$= x + \frac{1}{3}\ln(x-1) + I_3 + I_4 \quad \text{där}$$

$$I_3 = \frac{1}{3}\int \frac{x}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx \quad \text{och}$$

$$I_4 = \frac{2}{3}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx.$$

Som i punkt 2) ovan,

$$I_4 = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C_1\right),$$

och som i punkt 4)

$$I_3 = \frac{1}{2}\ln\left((x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$\boxed{\text{som i 1)}}$ $$= \frac{1}{2}\ln\left((x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}\right) -$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C_2\right).$$

Om vi lägger ihop integralerna så får vi

$$\int \frac{x^3}{x^3-1}\,dx = x + \frac{1}{3}\ln(x-1) +$$

$$+ \frac{1}{2}\ln\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) - \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$+ \frac{8}{9}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C =$$

$$= x + \frac{1}{3}\ln(x-1) +$$

$$+ \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{2}{9}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

I föregående exempel räknade vi ut en integral på formen $\displaystyle\int \frac{Bx+C}{x^2+x+1}\,dx$

där $x^2+x+1=0$ saknar reella rötter.

Men vad gör vi om vi istället ställer vill integrera $\displaystyle\frac{Bx+C}{(x^2+x+1)^m}$ där $m>1$?

(Partialbråksuppdelning kan ge den sortens "partialbråk".)

Det finns en metod, "Hermites metod",

med vilken man i princip kan beräkna vilken integral som helst $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ där $p(x)$ och $q(x)$ är polynom och p har lägre grad än q. Eftersom denna metod varken ingår i kursen (enligt formell kursplan) eller tas upp av kurslitteraturen, så går vi inte igenom Hermites metod.

I vissa specialfall klarar vi dock att integrera $\frac{Bx+C}{(x^2+x+1)^m}$ för $m>1$ utan Hermites metod.

<u>Till exempel:</u>

$$\int \frac{4x+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx = 2\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \boxed{\begin{array}{l} t = x^2+x+1 \\ \frac{dt}{dx} = 2x+1 \\ dt = (2x+1)\,dx \end{array}}$$

$$= 2\int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{2}{t} + C = \boxed{\text{återsubst.}}$$

$$= -\frac{2}{x^2+x+1} + C.$$