Inversa substitutioner

Vi har sett följande ("framåt") substitutioner

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \boxed{\begin{array}{l} t = g(x) \\ \frac{dt}{dx} = g'(x) \\ dt = g'(x)\,dx \end{array}} =$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt.$$

Låt $g(b) = d$, $g(a) = c$. Om g är inverterbar på intervallet ifråga och vi går "baklänges" i stället så får vi denna <u>inversa substitution</u>:

$$\int_c^d f(t)\,dt = \boxed{\begin{array}{l} t = g(x) \\ \frac{dt}{dx} = g'(x) \\ dt = g'(x)\,dx \end{array}} =$$

$$= \int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} f(g(x))\,g'(x)\,dx.$$

Om symbolerna 'x' och 't' byter roller så kan detta skrivas som

$$\int_c^d f(x)\,dx = \boxed{\begin{aligned} x &= g(t) \\ \frac{dx}{dt} &= g'(t) \\ dx &= g'(t)\,dt \end{aligned}}$$

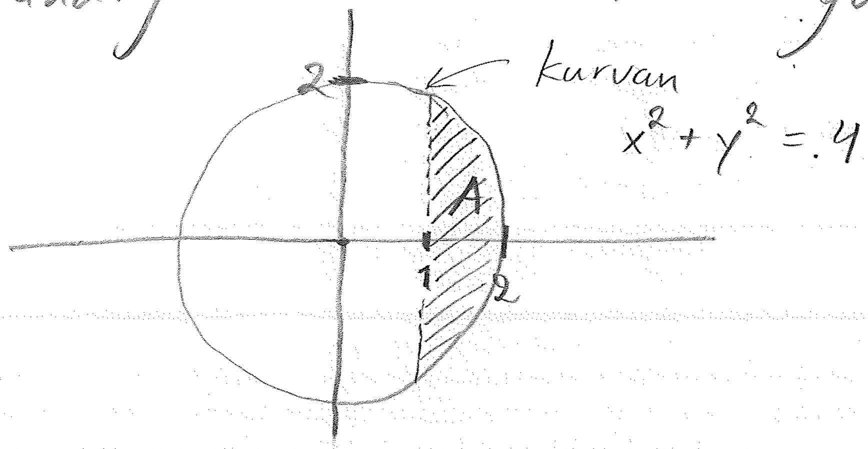
$$= \int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} f(g(t))\,g'(t)\,dt.$$

Vi har till synes fått en integral som ser mer komplicerad ut än den ursprungliga. Men i vissa fall kan den senare integralen vara enklare att beräkna.

Ex. En cirkulär pappersskiva har radien 2. Genom den klipper man längs en rät linje vars närmaste avstånd till skivans centrum är 1.

Hur stor area har den mindre biten efter att man på detta sätt har klippt itu pappersskivan?

Lösning. Den mindre biten motsvarar det randiga området A i figuren.



Eftersom $y(x)=\sqrt{4-x^2}$ beskriver den övre cirkelhalvan, så är områdets area

$$2\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \boxed{\begin{array}{l|l} x = 2\sin t & t=\arcsin\frac{x}{2} \\ \frac{dx}{dt} = 2\cos t & \\ dx = 2\cos t\,dt & \end{array}}$$

$$= 2\int_{\arcsin\frac{1}{2}}^{\arcsin\frac{2}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt =$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt =$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\cdot 2\cos t\,dt =$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t \, dt =$$

$$\cos(2a) = \cos(a+a) = (\cos a)(\cos a) - (\sin a)(\sin a)$$
$$= \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - 1 + \cos^2 a$$
$$= 2\cos^2 a - 1$$

Så $2\cos^2 a = 1 + \cos(2a)$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2t))\, dt =$$

$$= 4\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4\left(\frac{\pi}{2} + 0 - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right) = 4\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

Integraler som innehåller $\sqrt{a - x^2}$ kan ibland lösas genom den inversa substitutionen $x = \sqrt{a}\sin t$, som i exemplet ovan.

Observera att trigonometriska omskrivningar kan underlätta integration, som i exemplet

Observera att substitutionen $x = \tan\frac{\theta}{2}$, dvs. $\theta = 2\arctan x$ ger

- $\cos^2\frac{\theta}{2} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}} = \boxed{\dfrac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = 1 + \tan^2\frac{\theta}{2}} =$

$$= \frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \boxed{x = \tan\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{1+x^2}.$$

- $\cos\theta = \cos(2\frac{\theta}{2}) = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = \boxed{\text{enligt föregående punkt}}$

$$= \frac{2}{1+x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

- $\sin\theta = \sin(2\frac{\theta}{2}) = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} =$

$$= 2\tan\frac{\theta}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2} = \boxed{\begin{array}{c} x = \tan\frac{\theta}{2} \\ \text{och första} \\ \text{punkten} \end{array}}$$

$$= 2x\frac{1}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2}.$$

De sista två punkterna visar att den (inversa) substitutionen $x = \tan\frac{\theta}{2}$ gör följande omvandling:

(1) $$\cos\theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

(2) $$\sin\theta = \frac{2x}{1+x^2}$$

Av detta skäl kan varje funktion som är uppbyggd med (endast) $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $+$, $-$, $\cdot$ och/eller division omvandlas till en rationell funktion med substitutionen $x = \tan\frac{\theta}{2}$ (dvs $\theta = 2\arctan x$).

Exempel. $$\int \frac{1}{\cos t}\,dt =$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \tan\frac{t}{2} \\ t &= 2\arctan x \\ \frac{dt}{dx} &= \frac{2}{1+x^2} \\ dt &= \frac{2}{1+x^2}\,dx \\ &\text{Enligt (2) så} \\ \cos t &= \frac{1-x^2}{1+x^2} \end{aligned}}$$

$$= \int \frac{1+x^2}{1-x^2}\cdot\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= 2\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = -2\int \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,dx$$

$$= \boxed{\text{med partialbråksuppdelning}} = -2\int\left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}\right)dx =$$

$$= -\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= -\ln(x-1) + \ln(x+1) + C$$

$$= \ln \frac{x+1}{x-1} + C = \boxed{\begin{array}{c}\text{återsubst.}\\ x = \tan\frac{t}{2}\end{array}}$$

$$= \ln \frac{\tan\frac{t}{2}+1}{\tan\frac{t}{2}-1} + C.$$

---

fortsätter

Om integralen innehåller $\sqrt{a+x^2}$ eller $\dfrac{1}{\sqrt{a+x^2}}$, och $a>0$, så kan den inversa substitutionen $x=\sqrt{a}\tan t$ vara till hjälp.

Motivationen till ovanstående är att vi kan bli av med rotentecknet så här:

$$\sqrt{a+x^2} = \boxed{x=\sqrt{a}\tan t} =$$

$$= \sqrt{a}\sqrt{1+\tan^2 t} = \sqrt{a}\sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} =$$

$$= \sqrt{a}\sqrt{1+\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{\sqrt{a}}{\cos t}.$$

<u>Exempel</u> $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \boxed{\begin{array}{l} x=\tan t \\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\cos^2 t} \\ dx = \dfrac{1}{\cos^2 t}\,dt \end{array}}$$

$$= \int \frac{1}{\frac{1}{\cos t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{\cos t}\,dt = \boxed{\begin{array}{c}\text{enligt}\\ \text{föregående}\\ \text{exempel}\end{array}} = \ln \frac{\tan\frac{t}{2}+1}{\tan\frac{t}{2}-1} + C =$$

$$= \boxed{\begin{matrix}\text{återsubst.}\\ t=\arctan x\end{matrix}} = \ln \frac{\tan\frac{\arctan x}{2}+1}{\tan\frac{\arctan x}{2}-1} + C.$$

Det blir ett krångligt uttryck, som även efter omskrivningar förblir ganska osnyggt på ett eller annat sätt.

Övn. Beräkna $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$.

Lösning. Substitutionen $t=\tan\frac{x}{2}$, dvs. $x = 2\arctan t$, ger (se sid. 5.)

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{t}\,dt = \ln t + C = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) + C.$$

Trigonometriska omskrivningar

Man har ofta nytta av trigonometriska formler när man beräknar integraler som innehåller sin, cos eller tan.

"Trigonometriska ettan" samt formler för dubbla vinkeln är särskilt användbara.

Exempel $\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx$

$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$

Exempel $\int \sin^4 x \, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{4}\right) dx =$ $\boxed{\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}}$

$= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{8} + \frac{\cos 4x}{8}\right) dx$

$= \int \left(\frac{3}{8} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}\right) dx$

$= \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$

Övning. Beräkna $\int \sin^3 x \, dx$.
(Ledning: "trig. ettan" och subst. $\cos x = t$)

Lösn. $\int \sin^3 x \, dx = \int \sin^2 x \sin x \, dx =$

$= \int (1-\cos^2 x) \sin x \, dx =$ $\boxed{\begin{array}{l} t = \cos x \\ \frac{dt}{dx} = -\sin x \\ dt = -\sin x \, dx \end{array}}$ $=$

$$= \int -(1-t^2)\,dt = \int (t^2-1)\,dt =$$

$$\frac{t^3}{3} - t + C = \boxed{\text{åter-subst.}} = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

Till sist:

Integraler som innehåller $\sqrt{x^2-a}$ där $a>0$ kan ibland lösas genom den inversa substitutionen $x = \dfrac{\sqrt{a}}{\cos t}$
(Se bokens kapitel 6.3).

Av att döma från hur bokens exempel i kapitel 6.3 löses, så verkar bokens författare mena att man skall titta i bokens formelsamling för att lösa vissa av integral-uppgifterna i boken. (Om man inte gör det så blir vissa lösningar mycket längre och svårare.)