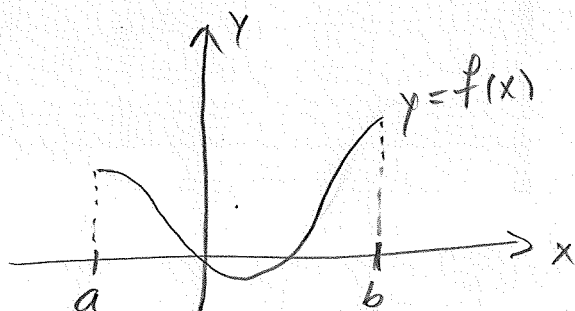


Kurvors längd (båglängd)

①

Låt f vara en funktion som är deriverbar på intervallet $[a, b]$.

Problem Vad har kurvan $y = f(x)$ mellan $x = a$ och $x = b$ för längd?



Vi gör en uppskattning/approximering av kurvans längd, den sk. 'båglängden', som kommer leda oss till ett integraluttryck.

Vi delar upp $[a, b]$ i n lika stora delar, så varje del-intervall har längd

$h = \frac{b-a}{n}$. Med andra ord, vi väljer

punkter $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

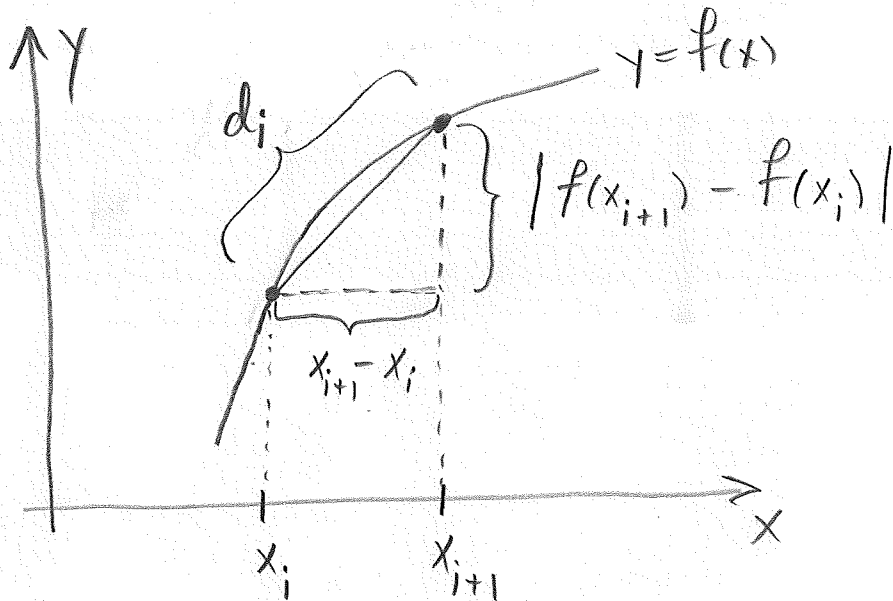
sådana att $x_{i+1} - x_i = h = \frac{b-a}{n}$ för

varje $i = 0, 1, \dots, n-1$.

(2)

För varje $i = 0, 1, \dots, n-1$, så uppskattar vi längden på kurvan $y = f(x)$ mellan x_i och x_{i+1} med avståndet mellan

$(x_i, f(x_i))$ och $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$:



$$\text{Vi har } d_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$$

$$= \sqrt{h^2 + (f(x_i + h) - f(x_i))^2}$$

$$= h \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} \right)^2}$$

Följande summa uppskattar längden av $y = f(x)$ mellan $x = a$ och $x = b$:

$$S(n) = \sum_{i=0}^{n-1} d_i.$$

(3)

Det är förhoppningsvis tydligt att större n , dvs. fler men kortare delintervall, ger en bättre uppskattning av kurvans längd, och att uppskattningarna rimligen går mot kurvans verkliga längd då $n \rightarrow \infty$.

Eftersom $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_i+h) - f(x_i)}{h} = f'(x_i)$

och pga. integraler kan definieras genom s.k. Riemann-summor så följer att

$$S(n) = \sum_{i=0}^{n-1} h \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i+h) - f(x_i)}{h} \right)^2}$$

$$\rightarrow \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad \text{då } n \rightarrow \infty$$

(vilket medför att $h \rightarrow 0$).

Detta ger oss följande slutsats:

Längden av kurvan $y = f(x)$ mellan $x = a$ och $x = b$ är

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Exempel Beräkna längden av kurvan

$$y = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(x^3 + \frac{1}{x} \right) \text{ mellan } x=1 \text{ och } x=2.$$

Lösning. Låt $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(x^3 + \frac{1}{x} \right)$, så

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(3x^2 - \frac{1}{x^2} \right). \text{ Längden av}$$

kurvan $y = f(x)$ mellan $x=1$ och $x=2$ är

$$\int_1^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx =$$

$$\int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{12} \left(9x^4 - 6 + \frac{1}{x^4} \right)} dx =$$

(5)

$$= \int_1^2 \sqrt{\frac{12x^4 + 9x^8 - 6x^4 + 1}{12x^4}} dx =$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\frac{(3x^4 + 1)^2}{12x^4}} dx = \int_1^2 \frac{3x^4 + 1}{\sqrt{12} x^2} dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{3}{\sqrt{12}} x^2 + \frac{1}{\sqrt{12} x^2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{\sqrt{12}} - \frac{1}{\sqrt{12} x} \right]_1^2$$

$$= \frac{8}{\sqrt{12}} - \frac{1}{\sqrt{12} \cdot 2} - \left(\frac{1}{\sqrt{12}} - \frac{1}{\sqrt{12}} \right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3} \cdot 4} = \frac{15}{\sqrt{3} \cdot 4}.$$

Exempel Beräkna längden av kurvan

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ mellan } x=0$$

och $x=1$.

Lösning. Låt $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ så

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \text{ Kurvans längd mellan}$$

$x=0$ och $x=1$ är

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}} dx =$$

(6)

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4}} dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{4}{4} + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}} dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}} dx$$

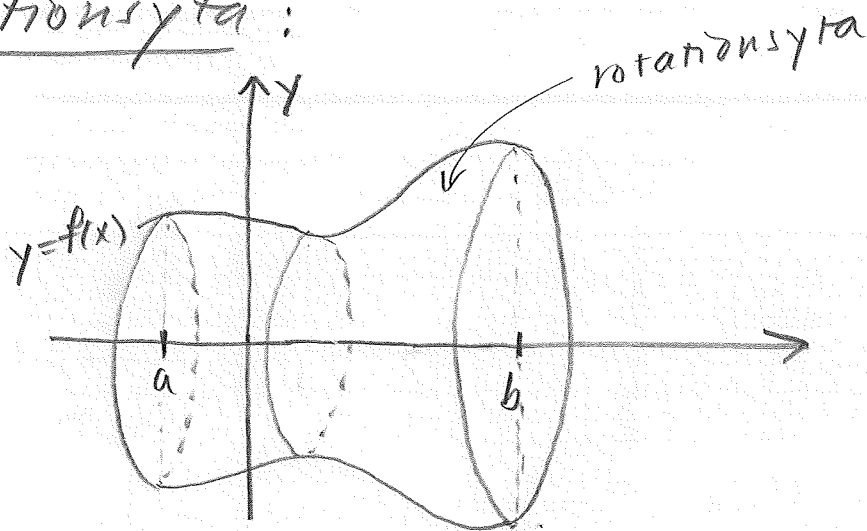
$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{e - e^{-1}}{2} - \frac{1 - 1}{2} = \frac{e - e^{-1}}{2}.$$

Rotationsytor

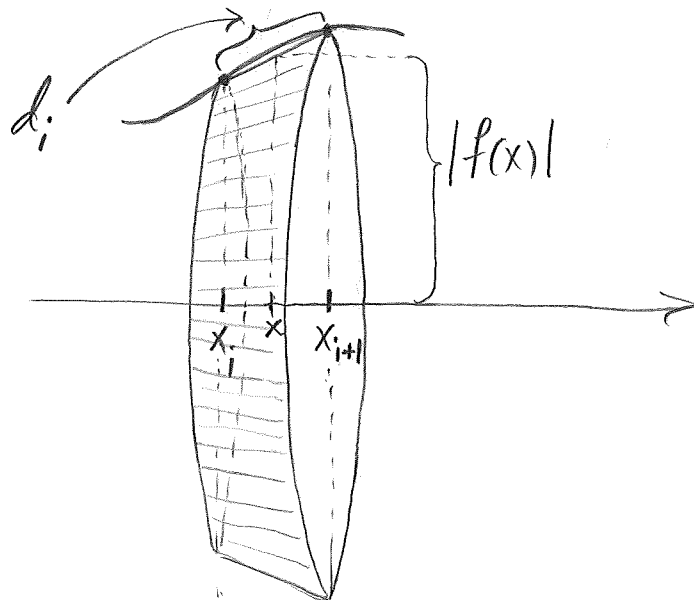
Om kurvan $y = f(x)$ mellan $x = a$ och $x = b$ roterar kring x -axeln så bildas en rotationsyta:



Om man tar en tunn "skiva" av rotationsytan så är denna skivas area ungefär

$$2\pi |f(x)| d_i$$

om $x \in [x_i, x_{i+1}]$ och d_i är avståndet mellan $(x_i, f(x_i))$ och $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$:



(8)

Skälet är att skivans radie är ungefär $f(x)$, där $f(x)$ varierar (endast) lite om x_i och x_{i+1} är tillräckligt nära varandra. Det följer att skivans omkrets är ungefär $2\pi|f(x)|$, och om man "klipper upp" skivan så får man en nästan rektangelformad yta vars sidor är ungefär $2\pi|f(x)|$ och d_i .

Faktum är att, om $h = \frac{b-a}{n}$, så

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi|f(x)|d_i &= \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi|f(x)|h\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+h}) - f(x_i)}{h}\right)^2} \\ &\rightarrow 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \end{aligned}$$

och att de beskrivna uppskattningarna av rotationsytan går mot rotationsytans verkliga area. Detta ger:

(9)

Arealen av den rotationsyta som alstras då kurvan $y=f(x)$ mellan $x=a$ och $x=b$ roterar kring x -axeln är

$$2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Exempel Beräkna arean av den rotationsyta som alstras då $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ mellan $x=0$ och $x=1$ roterar kring x -axeln.

Lösning: På intervallet $[0, 1]$ så är $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ icke-negativ, så den sökta arean är

$$2\pi \int_0^1 f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \boxed{\text{enligt föregående uppgift}}$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} dx = 2\pi \left[\frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} \right]_0^1 =$$

$$= 2 \left(\frac{e^2 + e^{-2}}{4} - \frac{2}{4} \right) = \frac{e^2 + e^{-2} - 2}{2},$$

(10)

Övn. Beräkna arean av den rotationsyta som uppstår då kurvan $y = x^3$ mellan $x = -1$ och $x = 1$ roterar kring x-axeln.

Lös. Eftersom $(-x)^3 = -x^3$ så är den

sökta ytan $2 \cdot 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx$

$$= 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = \boxed{\begin{array}{l} t = 1 + 9x^4 \\ \frac{dt}{dx} = 36x^3 \\ dt = 36x^3 dx \end{array}}$$

$$= \frac{2\pi}{36} \int_{1+9 \cdot 0^4}^{1+9 \cdot 1^4} \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{18} \left[\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_1^{10}$$

$$= \frac{\pi}{18} \left(\frac{2 \cdot 10^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2}{3} \right) = \frac{\pi}{27} (10^{\frac{3}{2}} - 1).$$

⑪

Övn. Beräkna arean av den rotationsyta som uppstår då kurvan $y = x^{\frac{1}{3}}$ mellan $x = -1$ och $x = 1$ roterar kring y -axeln.

Lösn. Vi har $y = x^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow y^3 = x$

För alla reella x och y . Dessutom gäller att om $x = 1$ så $y = x^{\frac{1}{3}} = 1$ och om $x = -1$ så $y = x^{\frac{1}{3}} = -1$.

Därför är den sökta area samma som arean då kurvan $x = f(y) = y^3$ mellan $y = -1$ och $y = 1$ roterar kring y -axeln.

Detta är samma problem (med samma lösning) som föregående problem, fast där ' x ' och ' y ' har bytt roller.

Anmärkning: Integralerna som fås vid beräkning av båglängder eller rotationsytors area blir ofta väldigt svåra (eller omöjliga) att beräkna exakt, pga. rotenstecknet, så exemplen som givits är inte representativa i den bemärkelsen.