

Första ordningens linjära ekv.

En första ordningens ekvation kallas för linjär om den har följande form

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + p(x)y(x) = q(x)$$

(där alla inblandade funktioner endast beror på x).

Det finns en lösningsmetod för alla första ordningens linjära ekv.

Vi observerar först att (med produktregeln)

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{d}{dx} (y e^{\int p dx}) &= \\ &= \frac{dy}{dx} \cdot e^{\int p dx} + y \cdot p \cdot e^{\int p dx} \\ &= e^{\int p dx} \left(\frac{dy}{dx} + p \cdot y \right) \end{aligned}$$

Om (1) multipliceras med $e^{\int p dx}$
Får vi

$$e^{\int p dx} \left(\frac{dy}{dx} + p \cdot y \right) = e^{\int p dx} \cdot q$$

vilket tillsammans med (2) ger

$$\frac{d}{dx} (y e^{\int p dx}) = q e^{\int p dx}$$

Integrering ger

$$y \cdot e^{\int p dx} = \int q e^{\int p dx} dx + C$$

så

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + C \right)$$

är den allmänna lös. till (1).

Funktionen $e^{\int p dx}$ som vi multiplicerade
(1) med kallas för integrerande faktor
(i detta sammanhang).

Exempel Lös ekv.

$$(3) \quad x \frac{dy}{dx} - 3y = x^4$$

Vi kan skriva (1) som en linjär ekv.

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} - \frac{3}{x} \cdot y = x^3$$

$$\text{Låt } p(x) = -\frac{3}{x} \text{ och } q(x) = x^3.$$

Vi multiplicerar (4) med $e^{\int p(x) dx}$ vilket ger.

$$e^{-3 \int \frac{1}{x} dx} \left(\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x} y \right) = x^3 e^{-3 \int \frac{1}{x} dx}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot e^{-3 \int \frac{1}{x} dx} - y \cdot 3x \cdot e^{-3 \int \frac{1}{x} dx}$$

$$= x^3 e^{-3 \int \frac{1}{x} dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left(y \cdot e^{-3 \int \frac{1}{x} dx} \right) = x^3 e^{-3 \int \frac{1}{x} dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left(y \cdot e^{\log x^{-3}} \right) = x^3 \cdot e^{\log x^{-3}}$$

$$\frac{d}{dx} (y \cdot x^{-3}) = x^3 \cdot x^{-3} = 1$$

Integrering ger

$$y \cdot x^{-3} = \int 1 dx = x + C$$

$$y(x) = x^4 + Cx^3.$$

Reduktion av ordningen

Ibland kan andra ordningens ekv. reduceras till första ordningens ekv.

Antag att y inte förekommer i en given ^(andra ordn.) diff. ekv. / detta fall kan ekvationen skrivas som

$$(1) \quad F(x, y', y'') = 0.$$

Vi kan göra följande substitution

$$(2) \quad p(x) = y'(x) \text{ och } p'(x) = y''(x).$$

Då motsvarar (1) ekvationen

$$(3) \quad f(x, p, p') = 0$$

som är en första ordningens ekv.

Om $p(x)$ är en lösn. till (3) så är, enligt (2), $y(x) = \int p(x) dx$ en lösn. till (1).

Exempel

Lös följande ekvation.

$$(4) \quad xy'' + y' = 4x$$

Vi ser att y inte är närvarande.

Sätt $p(x) = y'(x)$ och $p'(x) = y''(x)$.

Detta ger

$$xp' + p = 4x, \text{ eller}$$

$$(5) \quad \frac{dp}{dx} + \frac{1}{x}p = 4$$

som är linjär.

Multiplikation med $e^{\int \frac{1}{x} dx}$ ger

$$\frac{dp}{dx} e^{\int \frac{1}{x} dx} + p \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} = 4 e^{\int \frac{1}{x} dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left(p \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} \right) = 4 e^{\int \frac{1}{x} dx}$$

$$\frac{d}{dx} (p \cdot e^{\log x}) = 4 e^{\log x}$$

$$\frac{d}{dx} (p \cdot x) = 4x$$

Integration ger

$$p \cdot x = 2x^2 + C_1, \quad \text{så}$$

$$p(x) = 2x + \frac{C_1}{x}, \quad \text{vilket ger}$$

$$y(x) = \int p(x) dx = x^2 + C_1 \log x + C_2.$$

Antag nu att variabeln x inte förekommer i en given andra ordn. diff. ekv. / detta fall kan ekv. skrivas som

$$(6) \quad g(y, y', y'') = 0.$$

/ detta fall kan vi göra substitutionen $y' = p$ och $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$.

Då motsvarar (6) ekv.

$$(7) \quad g(y, p, p \cdot \frac{dp}{dy}) = 0$$

som är en första ordn. ekv, fast nu är derivation med avseende på y ; stället för x .

Exempel Lös ekv.

$$(8) \quad 2yy'' = 1 + (y')^2$$

Vi ser att x inte förekommer så vi substituerar

$$y' = p \quad \text{och} \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

Detta ger

$$2y \cdot \frac{dp}{dy} \cdot p = 1 + p^2, \quad \text{eller}$$

$$(9) \quad \frac{dp}{dy} = \frac{1}{2y} \cdot \frac{1+p^2}{p}$$

som är separabel.

$$\int \frac{p}{1+p^2} dp = \int \frac{1}{2y} dy + c_1$$

$$\frac{1}{2} \log(1+p^2) = \frac{1}{2} \log y + c_1$$

$$\log(1+p^2) = \log y + 2c_1$$

$$1+p^2 = y^{c_2}$$

$$p = \pm \sqrt{y^{c_2} - 1}$$

Enligt substitutionen så $\frac{dy}{dx} = p$, så

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{yc_2 - 1}$$

Detta är också en separabel ekv. så

$$\int \frac{dy}{\sqrt{yc_2 - 1}} = \int \pm 1 dx + c_3.$$

$$c_2 \sqrt{yc_2 - 1} = \pm x + c_3.$$

Den sista ekv. är en implicit lösning till (8) (den beskriver familjen av kurvor som löser (8)).