Potensserier

En serie på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots$$

kallas för <u>potensserie</u> kring (punkten) c (eller "i närheten av c"). I denna situation tänker vi oss c och $a_0, a_1, a_2, \dots$ som konstanter, men x kan variera.

<u>Exempel</u>:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!} = 1 + (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{(x-2)^3}{3!} + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!} = 1 + (x+1) + \frac{(x+1)^2}{2!} + \frac{(x+1)^3}{3!} + \dots$$

<u>Exempel</u> Vi vet att om $|r| < 1$ så konvergerar $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ mot $\frac{1}{1-r}$. Detta medför att för alla $-1 < x < 1$ så $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, så funktionen $\frac{1}{1-x}$ kan också beskrivas med

hjälp av potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ på intervallet $(-1,1)$.

Def. Punkten c i serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ kallas för seriens konvergenscentrum.

Observera att om $x=c$ så blir alla termerna noll och därför är serien konvergent om $x=c$.

Sats 13. Låt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ vara en potensserie. Då gäller exakt ett av följande alternativ:

(1) Serien är konvergent endast om $x=c$.

(2) Serien är konvergent för varje reellt tal x.

(3) Det finns ett reellt tal R, som kallas konvergensradie, sådant att serien är konvergent om $|x-c|<R$ och serien är divergent om $|x-c|>R$.
(I allmänhet kan vi inte säga något om fallet $|x-c|=R$. Det beror på serien.)

(Se kursboken, kap 9.5, för bevis.)

Om fallet (1) i Sats 13 gäller, så säger man att seriens <u>konvergensradie</u> är 0. Om fallet (2) gäller så säger man att seriens <u>konvergensradie</u> är ∞.

Under alla omständigheter så kommer potensserien att konvergera för alla x i ett intervall, som kallas <u>konvergensintervall</u>, vilket är

- $[0,0]$ i fallet (1),
- $(-\infty, \infty)$ i fallet (2), och
- $(c-R, c+R)$ eller $[c-R, c+R]$ eller $(c-R, c+R]$ eller $[c-R, c+R)$ i fallet (3).

<u>Sats 14</u> Antag att $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ där L är ett reellt tal eller ∞. Då har serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ konvergensradie $\frac{1}{L}$, där '$\frac{1}{L}$' tolkas som '∞' om $L=0$, och som '0' om $L=\infty$.

Bevis. Antag att $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$.

Då gäller att

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n}\right| = |x-c|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-c|L.$$

vilket pga. kvottestet (Sats 8) innebär att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ är absolutkonvergent, och därmed konvergent, om

$$|x-c|L < 1 \iff |x-c| < \frac{1}{L},$$

och divergent om

$$|x-c|L > 1 \iff |x-c| > \frac{1}{L}.$$

Övn./Ex. Bestäm konvergensradien för följande potensserier:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2}(x-1)^n$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Svar: (a) 1 (b) ∞ (c) 0 (d) ∞