Potensserier

En serie på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots$$

kallas för <u>potensserie</u> kring (punkten) c (eller "i närheten av c"). I denna situation tänker vi oss c och $a_0, a_1, a_2, \dots$ som konstanter, men x kan variera.

<u>Exempel</u>:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!} = 1 + (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{(x-2)^3}{3!} + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!} = 1 + (x+1) + \frac{(x+1)^2}{2!} + \frac{(x+1)^3}{3!} + \dots$$

<u>Exempel</u> Vi vet att om $|r|<1$ så konvergerar $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ mot $\frac{1}{1-r}$. Detta medför att för alla $-1<x<1$ så $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, så funktionen $\frac{1}{1-x}$ kan också beskrivas med

hjälp av potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ på intervallet $(-1,1)$.

Def. Punkten c i serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ kallas för seriens konvergenscentrum.

Observera att om $x=c$ så blir alla termerna noll och därför är serien konvergent om $x=c$.

Sats 13. Låt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ vara en potensserie. Då gäller exakt ett av följande alternativ:

(1) Serien är konvergent endast om $x=c$.

(2) Serien är konvergent för varje reellt tal x.

(3) Det finns ett reellt tal R, som kallas konvergensradie, sådant att serien är konvergent om $|x-c|<R$ och serien är divergent om $|x-c|>R$.
(I allmänhet kan vi inte säga något om fallet $|x-c|=R$. Det beror på serien.)

(Se kursboken, kap 9.5, för bevis.)

Om fallet (1) i Sats 13 gäller, så säger man att seriens konvergensradie är 0. Om fallet (2) gäller så säger man att seriens konvergensradie är ∞.

Under alla omständigheter så kommer potens-serien att konvergera för alla x i ett intervall, som kallas konvergensintervall, vilket är

- $[0,0]$ i fallet (1),
- $(-\infty, \infty)$ i fallet (2), och
- $(c-R, c+R)$ eller $[c-R, c+R]$ eller $(c-R, c+R]$ eller $[c-R, c+R)$ i fallet (3).

Sats 14 Antag att $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ där L är ett reellt tal eller ∞. Då har serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ konvergensradie $\frac{1}{L}$, där '$\frac{1}{L}$' tolkas som '∞' om $L=0$, och som '0' om $L=\infty$.

Bevis. Antag att $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$.

Då gäller att

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n}\right| = |x-c|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-c|L.$$

vilket pga. kvottestet (Sats 8) innebär att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ är absolutkonvergent, och därmed konvergent, om

$$|x-c|L < 1 \iff |x-c| < \frac{1}{L},$$

och divergent om

$$|x-c|L > 1 \iff |x-c| > \frac{1}{L}.$$

Övn./Ex. Bestäm konvergensradien för följande potensserier:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2}(x-1)^n$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Svar: (a) 1 (b) ∞ (c) 0 (d) ∞

Taylorserier

Antag att f är en funktion som är deriverbar hur många gånger som helst i punkten $x = c$, dvs. alla derivatorna

$$f'(c),\ f''(c),\ f^{(3)}(c),\ f^{(4)}(c),\ \ldots$$

existerar.

Då kallas potensserien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

för Taylorserien av f kring (eller "i närheten av") punkten c. Om $c=0$ så kallas Taylorserien av f kring c även för Maclaurinserien av f.

Observera att om man endast tar med de N första termerna i $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ så får man Taylorpolynomet

$$f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(N)}(c)(x-c)^N}{N!}$$

av f kring c av grad N.

<u>Anmärkning</u> Det kan hända att en funk. f är deriverbar hur många gånger som helst i c och att, för något $x \neq c$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \text{ konvergerar mot}$$

<u>ett annat</u> tal än $f(x)$.

> Se uppgift 40 i Kap. 9.6 i kursboken

<u>Definition.</u> Om det finns ett öppet intervall I som innehåller c och

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \text{ konvergerar mot } f(x)$$

för alla $x \in I$ så säger man att f är <u>analytisk</u> i c.

<u>Anmärkning</u> I det senare exempler så är serierna (b) och (d) Taylorserierna av e^x kring $x=-2$, respektive av $\sin x$ kring $x=0$.

Övn./Ex. För vilka punkter är $f(x) = \sin x$ analytisk?

Lösn. Låt $x \in \mathbb{R}$. Välj $c \in \mathbb{R}$ s.a. $|x-c| < 1$. Taylors sats (den precisa versionen) säger att

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(N+1)}(t_{N+1})}{(N+1)!}(x-c)^{N+1}$$

där t_{N+1} ligger mellan c och x.

Eftersom $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$, $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

så gäller $-1 \leq \frac{f^{(N+1)}(t_{N+1})}{(N+1)!} \leq 1$,

för alla $N = 0, 1, 2, \ldots$

Eftersom $|x-c| < 1$ så följer att

$$\lim_{N\to\infty} \frac{f^{(N+1)}(t_{N+1})}{(N+1)!}(x-c)^{N+1} = 0$$

vilket medför att

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(x)$$

Det följer att $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ konvergerar

mot $f(x)$. Eftersom argumentet fungerar närhelst som $|x-c|<1$ så är f analytisk i alla punkter $x \in \mathbb{R}$.

Liknande argument kan genomföras om man vet att det finns en konstant K sådan att, för alla $N = 0, 1, 2, \ldots$ och alla x i ett intervall I

$$\left| \frac{f^{(N)}(x)}{N!} \right| \leq K .$$

<u>Sats 15</u>. Antag att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ och $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n$ är potensserier vars konvergensradier är R_a och R_b respektive. Låt R vara det minsta talet av R_a och R_b.

(1) För varje konstant K så har $\sum_{n=0}^{\infty} K a_n (x-c)^n$ konvergensradien R_a och
$$\sum_{n=0}^{\infty} K a_n (x-c)^n = K \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$ närhelst den högra serien konvergerar.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-c)^n$ har konvergensradie R och konvergerar mot $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n$ närhelst båda de senare serierna är konvergenta.

(3) Om $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$ så har $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-c)^n$ konvergensradien R och

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-c)^n$$

närhelst båda serierna i högerledet är konvergenta.

Delarna (1) och (2) följer på ett rätt framt rätt från Sats 3. Del (3) är svårare att bevisa, och bevis kan man hitta i mer avancerade analysböcker (om t.ex. analytiska funktioner).

Ex. Enligt tidigare exempel så har $f(x) = \sin x$ Taylorserien $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n+1)!}$ kring $x = 0$, och $g(x) = x$ har Taylorserien x kring $x = 0$. I båda fallen konvergerar resp. Taylorserie mot $f(x)$, resp $g(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Det följer från Sats 15 (3) att

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{konvergerar mot } f(x)g(x) = x\sin x$$

för alla $x \in \mathbb{R}$. Med hjälp av unikhetssatsen för Taylorpolynom (från tidigare i kursen) kan man också dra slutsatsen att serien ovan är Taylorserien för $x \sin x$ kring $x = 0$.

Sats 16 Antag att $R>0$ och att
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$ konvergerar mot $f(x)$ för varje x i intervallet $(c-R, c+R)$.

(1) Då är deriverbar på $(c-R, c+R)$, och därmed kontinuerlig på samma intervall, och sålunda integrerbar på varje slutet delintervall av $(c-R, c+R)$.

(2) $$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}$$ för alla $x \in (c-R, c+R)$.

(3) En antiderivata till $f(x)$ ges av
$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$$ för $x \in (c-R, c+R)$.

Bevis för satsen finns i kursboken (Kap 9.5).

Ex. Enligt föregående exempel så konvergerar
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(2n+1)!}$$ mot $h(x) = x \sin x$
för alla $x \in (-\infty, \infty)$. Enligt Sats 16

så $h'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)(2n+1)!}$ och

en antiderivata till h ges av

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{(n+2)(2n+1)!}, \quad \text{för alla } x \in (-\infty, \infty).$$

Med hjälp av Sats 16 så kan man bevisa följande (se kursboken, kap. 9.6):

Sats 17 Antag att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ konvergerar mot $f(x)$ för varje x i intervallet $(c-R, c+R)$ där $R > 0$. Då gäller att f är deriverbar hur många gånger som helst på det intervallet och att

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad \text{för } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Med andra ord så är $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ Taylorserien för f på intervallet $(c-R, c+R)$

Obs! Vi tillåter fallet $R = \infty$ och i detta fall är $(c-R, c+R)$ samma som $(-\infty, \infty)$.

Ex. I föregående exempel kom vi fram till att $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(2n+1)!}$ konvergerar mot $h(x) = x\sin x$ för alla $x \in (-\infty, \infty)$.

Sats 17 implicerar att $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(2n+1)!}$ är Taylorserien (kring $x=0$) för $h(x) = x\sin x$.

Satsen implicerar också att

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)(2n+1)!}$ är Taylorserien kring $x=0$ för

$h'(x) = \sin x + x\cos x$, och att

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{(n+2)(2n+1)!}$ är Taylorserien kring $x=0$

för en antiderivata till $h(x) = x\sin x$,

nämligen antiderivatan $\sin x - x\cos x$ (partiell integration) eftersom serien inte har någon konstantterm.

Övn./Ex. Finn Taylorserien kring $x=0$ av $f(x) = (x^2+1)\ln(1+x)$ och argumentera för att den konvergerar mot $f(x)$ i ett intervall kring 0.

Lösn. $f(x) = x^2\ln(1+x) + \ln(1+x)$ så

vi kan börja med att finna Taylorserier för respektive term.

Eftersom $\ln(1+x)$ är en antiderivata till $\frac{1}{1+x}$ så söker vi först en serie för $\frac{1}{1+x}$ (och integrerar sedan serien).

Vi vet att den geom. serien $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergerar mot $\frac{1}{1-x}$ för alla $x \in (-1,1)$,

så $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ för alla $x \in (-1,1)$.

Notera att $x \in (-1,1)$ om och endast om $-x \in (-1,1)$. Därför gäller också likheten

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

för alla $x \in (-1,1)$.

Integration (se Sats 16) ger

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad \text{för alla } x \in (-1,1).$$

Polynomet x^2 kan också betraktas som en serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ där $a_n = 0$ om $n \neq 2$ och $a_n = 1$ om $n = 2$, och denna serie konvergerar uppenbarligen mot x^2 för alla $x \in (-\infty, \infty)$. Sats 15 (del (3)) medför att

$$x^2 \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)\, x^{n+3}}{n+1} \quad \text{för alla } x \in (-1,1).$$

Och Sats 15 igen (del (2)) medför att för alla $x \in (-1,1)$, så

$$x^2 \ln(1+x) + \ln(1+x) =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+3}}{n+1}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\right) =$$

$$= \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2} x^{n+1}}{n-1}\right) + x - \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-2}}{n-1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\right) x^{n+1} =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2n}{n^2-1} x^{n+1}.$$

Sats 17 säger att serien ovan måste vara Taylorserien för $(x^2+1)\ln(1+x)$ kring $x=0$.

Fler exempel finns i kap. 9.5 och 9.6 i kursboken.

Läs kap 9.8 i kursboken på egen hand.