Sammanfattning och tenta/dugga-info

- Inga hjälpmedel (på tentan/duggan): endast papper, penna, sudd, linjal.

1. Gränsvärden

$$\lim_{x \to \tau} f(x), \quad \tau \in \mathbb{R}, \ \tau = \pm\infty.$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n$$

Förstå vad det innebär. Kunna beräkna dem.

2. Standardgränsvärden:

$\boxed{\begin{matrix} r > 0 \\ a > 1 \end{matrix}}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x}{x^r} = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} |x|^r a^x = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^r}{\log_a x} = \infty, \quad \lim_{x \to 0+} x^r \log_a x = 0$$

3. Kontinuitet i en punkt (a): $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

f är kontin. på I om dess graf är sammanhängande på I.

4. Derivator.

a) $f'(a)$ = tangentlinjens lutning i $x=a$.

b) Derivator av de elementära funktionerna

x^r $(r\in\mathbb{R})$, $\sin x$, $\cos x$,

a^x , $\log_a x$

Om man kan sina logaritmräkneregler, $a = e^{\ln a}$ och $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, så räcker det att kunna $\dfrac{d}{dx} e^x$ och $\dfrac{d}{dx} \ln x$

c) Deriveringsregler för

$$\frac{d}{dx} c f(x) \quad \frac{d}{dx}\left(f(x) \pm g(x)\right), \quad \frac{d}{dx} f(x)g(x),$$

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)}, \quad \frac{d}{dx} f^{-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)).$$

Genom att kombinera b) och c) så kan vi derivera många fler funktioner (än de i b)) som exempelvis $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

5. Tillämpningar av derivator och gränsvärden.

a). Användning av kunskap om nollställen och tecken (+, -) för f' (eller f'') på olika intervall för att dra slutsatser om var f är växande/avtagande, har lokala/globala maxima/minima.

b) Användning av gränsvärden för att förstå hur f beter sig då $x \to \pm\infty$ och/eller då $x \to a^{\pm}$ om a är en punkt där f inte är definierad.

c) Användning av derivator samt utnyttjande av informationen given i problemet för att lösa extremvärdesproblem.

(Exempel: Vad är den största area som en rektangel med omkrets 10 kan ha?)

d) Implicit derivering.

6. Injektivitet och inverser.

- Om f är växande/avtagande på I, så är f injektiv på I och har därmed en invers på I.

7. L'Hospitals regler.

Om $\lim_{x \to \tau} \frac{f(x)}{g(x)}$ är av typ "$\frac{0}{0}$" eller "$\frac{\infty}{\infty}$"

(där $\tau \in \mathbb{R}$ eller $\tau = \pm\infty$)

och $\lim_{x \to \tau} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existerar,

så $\lim_{x \to \tau} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \tau} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

8. Taylor-polynom/utvecklingar.

a) Taylor-polynomet för f av grad n kring $x = a$ är

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

b) Taylors sats:

$f(x) = P_n(x) + O((x-a)^{n+1})$ då $x \to a$.

c) Unikhetssatsen för Taylor-polynom:
Om $Q_n(x)$ är ett polynom av grad n och $f(x) = Q_n(x) + O((x-a)^{n+1})$ då $x \to a$, så $Q_n(x) = P_n(x)$ där $P_n(x)$ är som i 1.

d) Exempel på användning av Taylor-utvecklingar:

Antag att $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \to$ "$\frac{0}{0}$".

Om $f(x) = ax^n + O(x^{n+1})$,
$g(x) = bx^m + O(x^{m+1})$, $b \neq 0$, och
$n = m$ så $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{ax^n + O(x^{n+1})}{bx^n + O(x^{n+1})} =$

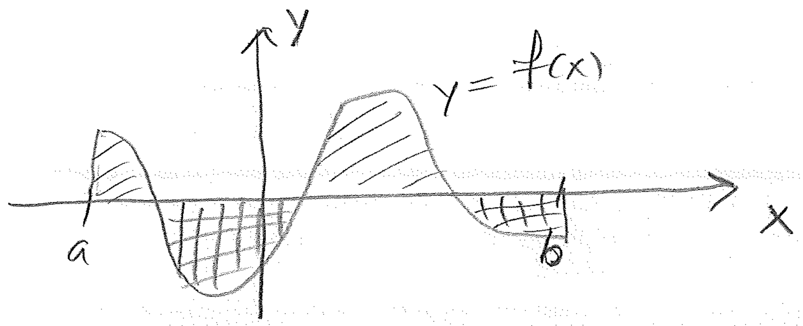
$$= \frac{a + O(x)}{b + O(x)} \to \frac{a}{b} \text{ då } x \to 0.$$

Om $b \neq 0$ och $n > m$ så $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{ax^{n-m} + O(x^{n-m+1})}{b + O(x)} \to 0$
då $x \to 0$.

Om $a \neq 0$ och $m > n$ så $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a + O(x)}{bx^{m-n} + O(x^{m-n+1})}$
och olika saker kan inträffa. (Gränsvärdet kan vara ∞, $-\infty$, eller inte existera.)

9. Integraler.

a) För f kontinuerlig på $[a,b]$,



$$\int_a^b f(x)\,dx = $$ (area av områdena inklämda under $y=f(x)$ och över x-axeln)

− (arean av områdena inklämda över $y=f(x)$ och under x-axeln).

b) $$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

där F är en antiderivata till f (dvs. $F' = f$).

c) Om F_1 och F_2 är antiderivator till f så $F_2(x) = F_1(x) + C$ för någon konstant C.

d) $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

där F är en antiderivata (vilken som helst) till f.

e) Substitution.

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \boxed{\begin{aligned} t &= g(x) \\ \frac{dt}{dx} &= g'(x) \\ dt &= g'(x)\,dx \end{aligned}}$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt.$$

f) Generaliserade integraler.

- $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$
- $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx.$

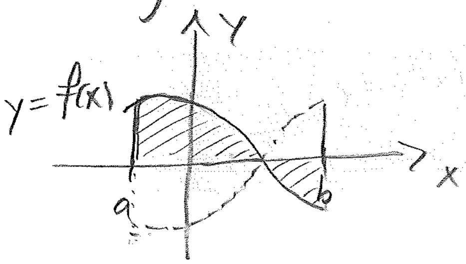
- Om f är kontinuerlig på $[a, b)$ $((a, b])$ så

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b-} \int_a^t f(x)\,dx$$

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a+} \int_t^b f(x)\,dx \right).$$

h) Rotationskroppar.

Rotationskropp kring x-axeln:

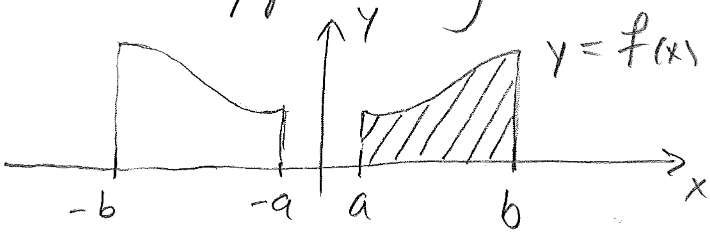


Dess volym: $\pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$.

Det gör inget om $f(x) < 0$ för $(f(x))^2 \geq 0$

Rotationskropp kring y-axeln:

Här antar vi $f(x) \geq 0$ på $[a, b]$



Dess volym: $2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$.